EX BIBLIOTECA
D. A. de VLLOA

CHRISTIANUS WOLFIUS. CONSILIARIUS AULICUS HASSIACUS. MATHEM. ET PH OSOPHIÆ PROFESSOR
Daudet sc d: 1731.

CHRISTIANI WOLFII,

POTENTISSIMI BORUSSORUM REGIS CONSILIARII INTIMI, FRIDERICIANÆ PRO-RECTORIS ET PRO-CANCELLARII, JURIS NATURÆ ET GENTIUM ATQUE MATHEMATUM PROFESSORIS ORDINARII, PROFESSORIS PETROPOLITANI HONORARII, ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ, SOCIETATUMQUE REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ MEMBRI,

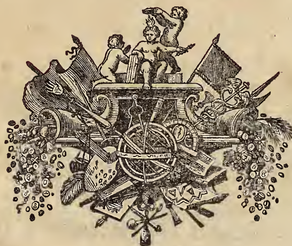
ELEMENTA MATHESEOS UNIVERSÆ.

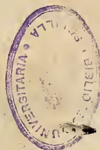
TOMUS PRIMUS,

Qui COMMENTATIONEM DE METHODO MATHEMATICA, ARITHMETICAM, GEOMETRIAM, TRIGONOMETRIAM PLANAM, & ANALYSIM, tam FINITORUM quam INFINITORUM complectitur.

EDITIO NOVISSIMA,

MULTO AUCTIOR ET CORRECTIOR.

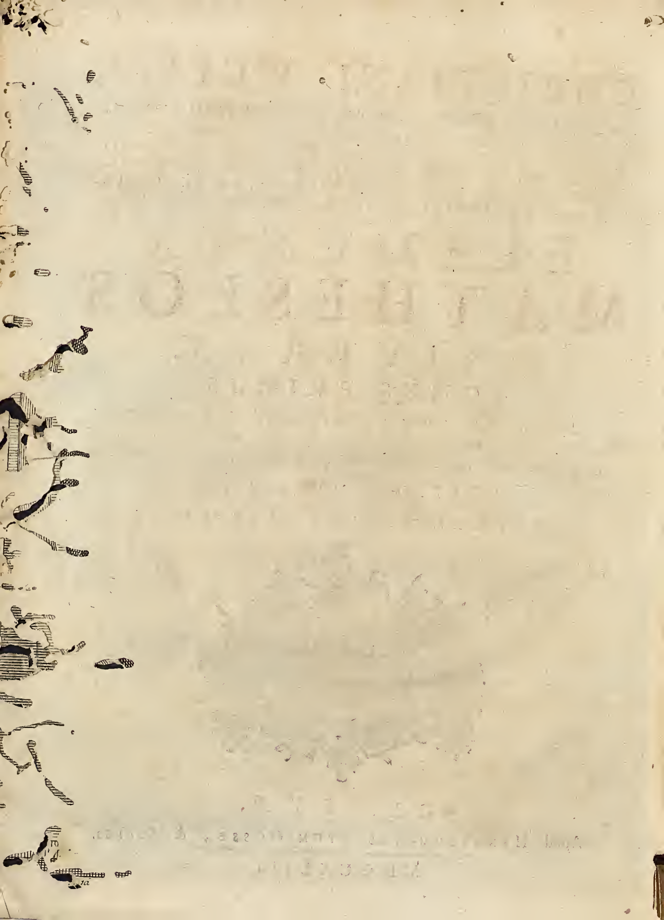




GENEVÆ,

Apud HENRICUM-ALBERTUM GOSSE, & SOCIOS.

MDCCXLIII.



SERENISSIMO PRINCIPI AC DOMINO,

D O M I N O,

WILHELMO,

HASSIÆ LANDGRAVIO,

PRINCIPI HERSFELDIÆ, COMITI

CATTIMELIBOCI, DECIÆ, ZIEGENHAINÆ,

NIDDÆ ET SCHAUMBURGI, &c. &c.

EXERCITUS EQUESTRIS FOEDERATI BELGII

GENERALI LOCUM TENENTI,

LEGIONIS PRÆTORIANÆ DESULTORIÆ CHILIARCHÆ,

NEC NON

OPPIDI TRAJECTI MOSANI SUPREMO

PRÆFECTO BELLICO, &c. &c.

PRINCIPI AC DOMINO CLEMENTISSIMO.

* 2 *SERE-*

SERENISSIME PRINCEPS,
DOMINE CLEMENTISSIME,

Cientiæ Mathematicæ Imperatoribus, Regibus & Principibus ab omni ævo in pretio fuere, ut non modo munificentia ſua eas promoverint, ſed & ipſimet animum ad eas excolendas applicaverint. Non opus eſt, ut de ALPHONSO X *Caſtellæ ac Legionis Rege, &* ULUGH BEIGHO, TAMERLANIS MAGNI *nepote, Aſtronomiæ inſtauratoribus, de* MATTHIA *Hunga-*

Hungariæ Rege inventorum mathematicorum insigni remuneratore, de FRIDERICO II *Daniæ & Norwegiæ Rege atque* RUDOLPHO II *Imperatore* TYCHONIS *Mecænatibus, de* FERDINANDO, *magno Etruriæ Duce,* GALILÆI *Protectore, de* CAROLO II *&* LUDOVICO XIV *Angliæ & Galliæ Regibus, Societatum Scientiarum conditoribus, de Duce* BURGUNDIÆ, *Elementorum Geometriæ scriptore, & de pluribus aliis Principibus summis dicamus: Eccur enim e longinquo petenda sunt exempla, ubi domestica prostant? Cur ad vetusta provocandum, ubi præsentia intuemur? Nemo profecto ignorat, quæ* WILHELMUS IV. *Hassiæ Landgravius successu felicissimo, quo* TYCHONI, *Phœnici illi Astronomorum, judice* HEVELIO, *palmam dubiam reddidit; Astronomiæ & Mechanicæ instaurandæ gratia Cassellis molitus est. Et Orbis universus admiratur, quæ Magnus Parens Tuus,* CAROLUS, *Sapientis cognomen instar* ALPHONSI *dudum meritus, in omni Mathesi ac Philosophia experimentali præstitit, atque munificentiam tanto Principe dignam deprædicat, qua Artes mathematicas & Naturæ cognitionem promovet. Tu,* PRINCEPS SERENISSIME, *qui omnibus virtutibus emines, quæ Heroem in bello, Regnatorem in pace exornant, nullis Principum in Scientiis Mathematicis magno æstimandis secundus. Quare cum Elementa mea Matheseos universæ multo auctiora novoque habitu induta, ut Opus plane novum existimari debeant, denuo in lucem proferam, quo via plana ad omnem theoriam & praxin sternitur, veræque methodi leges, ad accurate & utiliter philosophandum vitæque negotia dextre gerenda apprime necessariæ, animo Lectoris sensim sensimque instillantur; nullus dubitavi,* PRINCEPS SERENISSIME, *ad pedes*

 Tuos

Tuos ea deponere, certo persuasus Tibi non improbatum iri meum in Scientiis humano generi adeo utilibus propagandis studium. Deus Te servet, Principum Hassiæ Decus! Ita vovet,

SERENISSIME PRINCEPS,

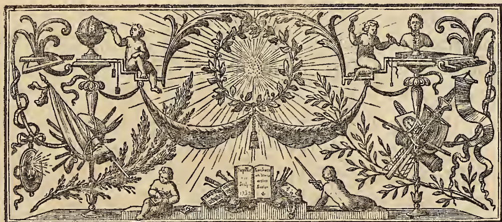
DOMINE CLEMENTISSIME,

SERENISSIMI NOMINIS TUI

MARBURGI d. 8. Martii 1730.

Humillimus cultor
CHRISTIANUS WOLFIUS.

PRÆ-



PRÆFATIO.

Tsi nullo tempore, quo ſcientiis honos fuit, defuerint Viri egregii, qui præclaris ingenii ac virtutum dotibus ſupra communem mortalium ſortem evecti, divina illa Mathemata digna ſtatuerunt, in quibus elaborarent, nec infelici ſucceſſu ſuſpiciendis inventis eadem amplificarunt, quemadmodum Veterum monumenta palam loquuntur; ante noſtram tamen ætatem ad illud faſtigium non fuerunt evecta, in quo hodie conſtituta miramur. Neque indigna ſunt, quæ in dies magis magiſque excolantur & exploſa loquaci ſophiſtica in Scholas revocentur, cum neminem, niſi aut tardiore fuerit ingenio, aut ignarus artis oſor affectu præpeditam habuerit mentem, fore exiſtimem, qui non eorum puritatem, evidentiam ac ſublimitatem miretur, & ob utilitates innumeras inde in genus humanum redundantes de Arte noſtra præclare ſentiat. Mentem enim humanam valde perficit Matheſis, ad Philo-

ſophiam aliaque ſtudiorum genera & latius, & profundius, & utilius tractandum inſtruit, ad ſolidiorem doctrinam adminicula inexſpectata ſuppeditat, maximas ad vitam utilitates affert.

Non ignota loquor, non inexſpectata Mathematum peritis. Attamen nullus dubito fore, ut vulgus litteratorum ex ſuo ingenio alios judicans perſuadere conetur ignaris, ex præpoſtero in Scientias mathematicas ſtudio proficiſci has laudes. Quamvis autem non ea ſit penes me garrientium † autoritas, ut, quæ inſcite obſtrepunt, ſcite retundam; non tam quod plurimi inſtitutione indignos judicent, qui convitiis extorquere volunt, ut doceantur, & illos demum lumine dignos cenſeant, qui modeſte id deſiderant; quam quod in ſciolis erudiendis oleum operamque perdi pro comperto habeam, quippe qui tum (ut cum Horoccio * loquar) *pulchre ſibi diſputare videntur, ſi, quod arguendo evertere non poſſunt, tanquam ridiculum contemnant, aut puerilibus dicteriis adſperſum aliorum riſui exponant:* cum tamen mearum partium eſſe exiſtimem, ut generoſa atque excelſa ingenia ad ſtudia mathematica incendam atque inflammem; quid, quæſo, impedit, quominus evincam, non eſſe Mathematicos

† Autor ſum his hominibus, ut Præfationem legant, quam *Philippus* Melanchthon, vir non Mathematicis, ſed elegantioribus, ſed Philoſophicis, ſed Theologicis ſtudiis celebris, communis Germaniæ Præceptor, *Joannis* Vogelini Elementis Geometriæ præmiſit. Ex ea notulas quaſdam hinc inde adſpergemus, conſenſum *Philippeorum* cum noſtris manifeſtaturas. Ita ergo generatim ad rem noſtram Melanchthon: *Scio*, inquit, *has adhortationes apud eos, qui ſordidis ingeniis præditi ſunt, nihil proficere, qui præſtantium diſciplinarum dignitatem non proſpiciunt, aut ſectantur quaſdam vendibiliores artes, quæſtus gratia. Nam & mentes habent monſtroſas, & magno ſcelere turbant proportionem geometricam, cum non tribuunt ſuam artibus dignitatem. Sed recta ingenia, etiam mediocria, incitari poſſunt ipſa artium admiratione, ſi admoneantur, deinde ſi accedat artifex, qui commode tradat. Ideo ſpero aliquorum ſtudia commoveri poſſe.*

* In *Aſtronomia* Kepleriana *defenſa atque promota*, c. 1. p. 23.

maticos (liceat mihi denuo Horoccii verbis † uti) *tam perfrictæ frontis, ut abſurdas quaſvis ampullas magno clamore ignaris divendant, modo in fucati laboris præmium breviſſimo inanis gloriæ ſtatu intumeſcant & inter inconditos plaudentium ſtrepitus placide ſibi adulentur;* multo minus ita dibuccinare laudes ſuas, ut apud alios merito nullam inveniant.

Agedum, ergo! quis eſt, qui Scientias mathematicas & rerum evidentia ac ſublimitate, & demonſtrationum rigore ac profunditate, & ordinis pulchritudine ac concinnitate ceteris omnibus longe ſuperiores mentem perficere negare auſit? Qui mentis dotes ignorat; qui judicium leve a gravi, ingenium hebes ab acri non diſtinguit; qui denique culmen perfectionum non proſpicit, ad quod menti pervenire datum eſt. Tum demum, me judice, ingenii acie pollebis, ſi non modo clara ab obſcuris, diſtincta a confuſis, adæquata ab inadæquatis, explorata ab inexploratis, certa ab incertis, probabiliora a minus probabilibus diſcernere valebis, ſed & ipſemet fueris exactus & perſpicuus in definiendo, ſolers & circumſpectus in obſervando, ingenioſus & accuratus in experimentando, ſeverus & acutus in judicando, concinnitatis & rigoris tenax in demonſtrando, patiens & profundus in meditando, ſagax & expeditus in inveniendo. Sed quomodo, quæſo, comparantur habitus tam præclari? Non niſi crebro exercitio. Multus ergo ſis neceſſe eſt in notionibus evolvendis, in demonſtrationibus concipiendis, in problematibus reſolvendis, nec proletaria in meditando & inveniendo collocanda eſt opera. Cum adeo diſciplinas, quæ huic ſcopo conveniant, præter mathematicas nullas noverint, qui

 Mathe-

† In *Prolegomen.* p. 8.

mathematicas & ceteras eadem diligentia pertractarunt; studium mathematicum ad acuendum judicium apprime necessarium pronunciamus & sine eo ad solidam rerum cognitionem perveniri posse negamus. *

Equidem non ignoro, homines quosdam, cum sint in Mathesi hospites ac plane rudes; se jactare, quod audiverint Mathematicos de rebus mathematicis optime, de aliis a Mathesi alienis pessime judicantes: veruntamen quod ad tam inconsiderate dicta reponam, non unum habeo. Quoniam nimirum non quævis terra Mathematicum alit (neque enim creantur in Academiis ut Doctores;) sane non apparet, unde imperitus Artis obtrectator certus fuerit factus, sibi rem cum Mathematico fuisse. Quid si Agrimensorem viderit, aut Architectum, aut Conspicillorum politorem, aut Instrumentorum fabrum, aut Virum, cui data est docendi quidem, sed non sciendi Mathesin potestas? Quis enim adeo insanus est, ut unumquemque censeat titulo, quem fama fallax aut fortuna cœca eidem tribuit? Non insolitum, nec inauditum, ut, quem ignari judicant Matheseos apprime peritum, quem Professores *Euclidis*, *Apollonii*, *Archimedis alterius* elogio etiam post fata mactant, idem tamen a Mathematicis summis, vere idoneis harum rerum arbitris, Matheseos imperitus appelletur. Enimvero etiamsi hoc demus, Artis nostræ osorem audivisse Mathematicum de rebus ad Mathesin non spectantibus judicantem; nondum tamen video, unde cognoverit, quod male judicaverit: aliter enim nisi judicaret qui ingenii

* MELANCHTHON, loc. cit. *Si qui non totos se huic studio dedent, tamen his ad judicia formanda --- opus est cognitione Elementorum Geometriæ.* Idem paulo ante: *Cum demonstrationes Geometriæ maxime sint illustres; nemo sine aliqua cognitione hujus artis perspicit, quæ sit vis demonstrationum, nemo sine ea erit artifex methodi.*

ingenii acumine pollet, aliter qui haud altius vulgo ſapit, inter ingenium acre & hebes nullum foret diſcrimen; nec concedendum erat, in Matheſi cum laude verſatis res quaslibet profundius ſcrutari datum eſſe. Denique ſi vel maxime aliquando contigerit, Mathematicum aliquem de rebus ad ſe non pertinentibus male judicaſſe; hinc ſaltem colliges, ipſum occaſione ita ferente de re, quam nondum meditatus fuerat, per præcipitantiam, vitium ἀγεωμετρήτοις tantum non ſemper familiare, ſtatuiſſe.

Neque enim defendimus, quod eadem opera, qua quis Mathemata ſibi familiaria reddit, ceterarum quoque rerum cognitione animum imbuat, & criminationis loco habemus, ſi qui per malitiam affirment, quod Mathematici glorientur, penes ſe ſolos eſſe principia veritatis; ſed quod Matheſeos cultura reliquis ſtudiis præmiſſa efficiat, ut alias diſciplinas facilius, rectius & profundius percipere poſſis, ubi ad eas induſtriam atque aſſiduitatem attuleris, id vero eſt quod aſſeveramus. Neſcio vero, qua fronte, qui inexperta loquuntur, majorem ſibi fidem haberi velint, quam iis, qui niſi experta non confitentur. Utinam tandem, qui Eccleſiæ ac Reipublicæ præſunt, caverent ne ad cetera ſtudia tractanda animum appellerent, niſi Mathematica cognitione imbuti, neque ullus dubito fore ut aliam Eccleſiæ, aliam Reipublicæ faciem contueremur †. Ut enim taceam, quæ a doctrina in Eccleſiam

† Melanchthon, loc. cit. *Jacent deſertæ & neglectæ Artes mathematicæ, multis jam ſeculis. Nam proxima ætas* (quidni & noſtra?) *juventutem ab hac vera Philoſophia ad inſulſſimas cavillationes abduxerat. Nunc, poſtquam hæ exploſæ ſunt e Scholis, annitendum erat, ut pura & nativa Philoſophia traderetur, quæ conduceret ad ſolidam doctrinam conſequendam. Nam hæc noſtra ætas ſatis commonefacit nos, quantum opus ſit Reipublicæ perfecta doctrina, quia multi paſſim, tum inopia judicii, tum quia diſerte explicare nihil poſſunt, ſparſerunt aut defendunt opiniones abſurdas & confuſaneas, ex quibus in Eccleſia magna certamina, magnæ diſſenſiones extiterunt. Nec finis horum malorum erit ullus, niſi ad veram & eruditam ſtudiorum rationem juventus revocata fuerit.*

& Rempublicam redundant ; emolumenta , plurimum refert , ſi , qui ob eruditionem utrique præficiuntur ſint aſſidui , conſiderati , moderati & veritatis amantes , quos Matheſeos ſtudium efficit , ubi ita tractetur , ut amplificet uſum rationis.

Quotquot humanæ mentis vires cognoſcere ſtudent earumque uſum ſcrutari geſtiunt, eos ad Mathematum culturam invitamus. Oſtendet Algebra atque Geometria ſublimior, nihil eſſe tam abditum, quin detegatur : docebit Aſtronomia cum Geographia , nihil eſſe a ſenſibus hominum tam remotum, quin id ſatis diſtincte cognoſcere & accurate dimetiri valeamus : teſtabitur Calculus aſtronomicus, quanta certitudine futura Cœli phænomena prædicere liceat, etſi Genius nullus motuum, quibus ſidera feruntur, leges Aſtronomis revelaverit : Optica cum Aſtronomia diſcrimen inter repræſentationes rerum in intellectu & in imaginatione monſtrabit : Arithmetica, Trigonometria & Analyſis regulas generales ſuppeditabunt, quibus in inveniendo dirigatur intellectus & una cum ſenſibus compeſcatur imaginatio, ne meditationes turbet : Methodus denique mathematica rectum rationis uſum manifeſtabit

Quanta ſit vis Mathematum in Scientia naturali , ex Statica, Mechanica , Hydroſtatica , Aerometria , Hydraulica , Optica , Catoptrica , Dioptrica, Aſtronomia & Geographia abunde perſpicitur : quæ omnes argumenta quædam Phyſica ſolidius atque profundius pertractata exhibent , quam ſine Matheſeos principiis fieri poterat. Nonne enim Phyſici eſt explicare motum, gravitationem corporum , proprietates aëris, Phænomena viſus, ſtructuram Univerſi , naturam &

pro-

proprietates corporum Mundi totalium? Quod si vero quæ de motu solidorum in Statica & Mechanica, de gravitatione corporum in fluidis in Hydrostatica, de motu fluidorum in Hydraulica, de aëre in Aërometria, de visu in Optica, Catoptrica & Dioptrica, de corporibus Mundi totalibus eorumque motuum legibus in Astronomia & Geographia traduntur, cum iis conferre dignatus fueris, quæ de iisdem argumentis in Physicorum systematibus occurrunt, demtis præsertim iis, quæ ex Mathematicorum voluminibus descripta sunt; quantum discriminis intercedat inter doctrinas physicas principiis mathematicis superstructas atque Mathematicorum opera excultas, & inter ea dogmata quæ Mathematicorum opem adhuc desiderant, illicò constabit. Unde non miramur *Robertum* BOYLIUM, de Scientia naturali experimentando præclare meritum, ita scribentem: † *De Mathematica nonnihil tibi propositurus sum, eum inprimis in finem, ne forte (quod & mihi olim evenit) seducaris Philosophorum istorum modernorum autoritate, qui cum Physici objectum sit materia, mathematicas disciplinas, tanquam abstractis saltem quantitatibus & figuris occupatas, studio naturali obesse magis, quam prodesse contendunt. Quamvis enim opinionem ipsius* KEPLERI, *trium Imperatorum Mathematici aliorumque Astronomorum recentium absurdam, hominibus persuadentem, quod Mathematica quempiam ad Studium naturale facilius absolvendum non omnino idoneum reddere possit, restabilire & defendere aliquando conatus fuerim; ingenue tamen confiteor, quod experimentis meis in specie Mechanicis, Mathe-*

† In *Considerationibus circa utilitatem Philosophiæ naturalis experimentalis*, Exercitat. VI. §. 1. & 2. p. m. 483.

Mathematicæ in Physica usum ingentem mihi demonstrantibus, sæpe jam exoptarim, ut in Geometriæ theoriam & studium Algebræ speciosæ, quam puer ferme addidici, majorem impendissem partem temporis & industriæ, quæ Planimetriæ & Fortificatoriæ (de qua me integrum Tractatum scripsisse memini) aliisque practicis Mathematicæ partibus a me attributa fuit. Imo nec miramur ingenue profitentem: * *Vereor, implorandam esse à Mathematicis lectoribus veniam pro iis rebus, quas, si in Mathesi magis pollerem, accuratius tractaßem.* Alibi nimirum ostendi †, tum demum in Scientia naturali ad certudinem seu evidentiam perveniri & dominium in res creatas obtineri, si Mathesis ad Physicam applicetur.

Nisi utilitates, quas Mathesis ad vitam affert, sponte sua occurrerent attentis; non modo Arithmeticæ, Geometriæ practicæ, Architecturæ, Mechanicæ, Hydrostaticæ, Hydraulicæ usus in Oeconomia amplissimus facile ostendi, sed etiam evidenter demonstrari posset, maximam felicitatis humanæ partem Mathesi superstructam: ut taceam commoda, quæ Mathesis præstat absolutis studiis Academicis in exteras regiones excurrentibus, quibus maxima utilitatis ac voluptatis ex itinere capiendæ pars perit, si in illa fuerint hospites ac peregrini.

Cum adeo disciplinarum mathematicarum utilitates innumeras mente attenta perpenderem, propria autem experientia edoctus non ignorarem, desiderari adhuc Matheseos universæ Elementa, quæ ad illas consequendum sufficerent; ante triennium idiomate patrio Elementa Matheseos universæ publici

* In Præfat. ad *Nova Experimenta Physico-Mechanica de vi Aëris elastica.*
† In Præfat. ad *Elementa Aërometriæ*, A. 1709. seorsim edita.

blici juris feci, in quibus ea potissimum explanavi, quæ ad praxin tendunt, adeoque theorias prætermisi, quarum non adeo manifestus est usus. Dum liber adhuc sub prælo sudabat, contigit ut multi eundem expeterent †: quo ipso adductus Bibliopola desiderabat, ut eundem in sermonem Latinum transfunderem. Hujus ego desiderio annuens bonam jam operis partem habitu Romano indutam prælo destinaveram, cum consultius mihi videretur, si theoretica uberius exponerentur, quam in Opere Germanico ad juvandum primos tyronum conatus composito fieri par erat, ut Latinum scilicet etiam satisfaceret ad sublimiora tendentibus. Quæ igitur sermone Latino prodeunt Elementa, a Germanicis multum differunt, novoque ordine digesta sunt. In iis elaborandis tantum operæ collocare non licuit, quantum opus istiusmodi requirere videbatur. Præterquam enim quod sex, minimum quinque per diem horas instituendæ juventuti Academicæ, cum in Mathesi, tum in Philosophia impendam; varia obstacula alia impediverunt, quo minus omnia ex voto fierent. Quoniam nimirum Bibliopola, qui aliquos jam sumptus in editionem fecerat, instabat ut opus cœptum perficerem; singulas fere propositiones typis describendas tradere coactus fui, quamprimum a me in chartam conjectæ essent, typothetis scilicet quotidie pensum semidiurnum a manu mea exspectantibus. Quodsi ergo quædam in hoc opere deprehendis, quæ jure displicent, ea nec mihi placere scias velim. Si totum displicet, ut meliora des hortor, gratum & mihi & aliis facturus. Interea patere, ut hoc duce

† Elementa ista Germanica ab eo tempore jam quarta vice typis rescripta, & in compendium redacta, quod ter lucem adspexit.

utantur, quotquot ad ſolidam Mathematum cognitionem, non ſine operæ, ſumptuum & temporis compendio adſpirant, quamdiu deſit magis fidus. Theoretica & practica eadem induſtria expoſui: Ex his unuſquiſque ſeligat, quæ ad palatum ſuum eſſe exiſtimaverit: reliqua aliis, non ſibi dicta putet. Indicem geminum ſubjunxi: quorum alter eſt rerum atque verborum, ut his Elementis etiam inſtar Lexici Mathematici uti poſſint, quorum ſtudia eodem juvantur; alter Elementa *Euclidea* cum noſtris confert, ut, quæ ex EUCLIDE paſſim citantur, etiam in noſtris inveniri poſſint, nec *Euclideis* habeant opus, qui noſtra poſſident. Vale, Lector benevole, & his noſtris utere. Tomum alterum, qui Opticam, Catoptricam, Dioptricam, Perſpectivam, Trigonometriam Sphæricam, Aſtronomiam, Chronologiam, Geographiam, Gnomonicam, Pyrotechniam, Architecturam militarem atque civilem, una cum Bibliotheca Mathematica complectetur, propediem exſpectans. Dabam Halæ Magdeburgicæ, ipſis Calendis Octobris A. 1713.

PLATO apud *Theonem Smyrnæum*, Cap. I. p. 20.

Adoleſcentibus eorumque ætati conveniunt Diſciplinæ Mathematicæ, quæ animam præparant & defæcant, ut ipſa ad Philoſophiam capeſſendam idonea reddatur.

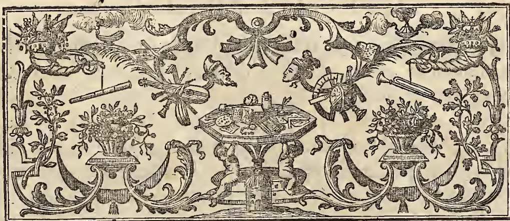
MONITUM

MONITUM AUTORIS DE EDITIONE NOVA.

NOvam horum Elementorum Editionem daturi operam dedimus, ut multo correctiora prodirent, multo etiam auctiora. Etenim in singulis disciplinis ea adjecimus, quæ adhuc desiderari posse videbantur & viam ad ulteriora sternunt: quo ipso contingit, ut disciplinæ nonnullæ novam plane formam adeptæ fuerint, &, quæ in Editione priore per duos Tomos digesta fuerant, in hac posteriore quatuor Tomis complecti necesse fuerit. Ita in Tomo primo, qui nunc prodit, ut taceamus, quæ passim intersperſa sunt, Arithmeticæ accesserunt Capita nonum & decimum integra, de fractionibus decimalibus & sexagesimalibus; Geometriæ Caput secundum partis posterioris de sectione & situ planorum; Trigonometriæ & Algebræ Problemata varia, quæ vel utilitate sese commendant, vel quædam inveniendi artificia continent per cetera nondum insinuata. Accessere etiam tum Geometriæ, tum Analysi finitorum, tum Analysi infinitorum figuræ novæ Tabulis æneis incisæ. Et quoniam Philosophiam certam ac utilem effecturi Mathematum notitiam amplificamus, ut ad eam capessendam animi defæcati præparentur,

nuperque in Opere Logico † methodum, quæ convenit doctrinæ ſolidæ, accuratius delineavimus, quam hactenus ab aliis factum fuerat, ac inprimis genuinam demonſtrationum formam diſtincte expoſuimus; ideo demonſtrationes ita digeſſimus, ut exempla regulis ad amuſſim reſpondeant, & Elementa hæc manu aſſidua volventibus naturalis ratiocinandi modus ſua veluti ſponte ſeſe inſinuet, naſcanturque in animo ideæ, quæ Logicæ præceptis reſpondent. Nulli igitur dubitamus fore, ut, qui in his Elementis attenta mente perlegendis fuerint aſſidui fructus eximios percipiant: id quod quemadmodum ſperamus, maxime optamus. Dabam Marburgi Cattorum, d. 11. Martii A. 1730.

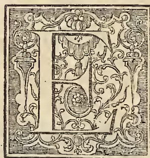
† Prodiit A. 1728. in 4°.



MONITUM AUTORIS

DE

EDITIONE NOVISSIMA.

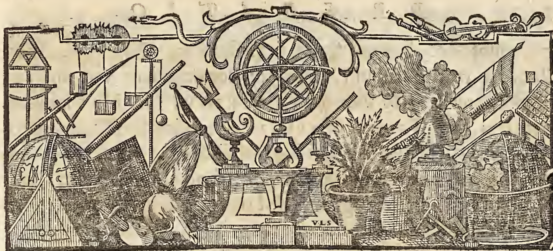


LEMENTA nostra Matheseos universæ abunde sese commendarunt iis, qui brevi temporis spatio ac magno laboris compendio vel eos in Mathesi progressus facere decreverunt, ut ad præclara Summorum Mathematicorum inventa, quæ nostro ævo magno numero prostant & in dies augentur, pateret aditus. Quoniam vero in Editiones anteriores plurima irrepserunt vitia typographica, nonnulla etiam, quæ festinanti calamo debentur; optandum omnino erat, ut [illegible] recta extaret Editio, ne quid utilitati eorum decederet. Nemo ignorat, quam vastum sit illud reformandæ Philosophiæ opus, quod condere cœpimus. Ea jam sumus ætate, quippe in anno climacterico magno constituti, ut, si vel maxime Numen optimum vitam ac corporis animique vires diutissi-

me

me conſervet, eidem tamen abſolvendo non ſufficere videatur reſiduum adhuc temporis ſpatium, præſertim cum minimam ejus partem iſti labori impendere detur. Hortantur nos plurimi tam Exteri, quam Germani, ut tempus omne in Opere philoſophico continuando conſumamus, additis rationibus, quæ plurimum apud me valere debent. Nobis itaque conceſſum minime videbatur, ut correctam Elementorum Matheſeos Editionem daremus. Enimvero cum a primis, quod Græci ajunt, unguiculis ſtatuerimus non nobis vivere, ſed aliis, aliisque inſerviendo conſumi; Elementa noſtra revidere &, quæ irrepſerunt, errata emendare placuit, eorundemque Editorem hortati ſumus ut correctionem typorum committeret Mathematum perito & in iis corrigendis ſedulo. Quodſi tamen nonnulla forſan adhuc attentionem noſtram ſubterfugerint, ea Lector benevolus boni ac æqui conſulet.

DE



DE METHODO MATHEMATICA BREVIS COMMENTATIO.

PRÆFATIO.

SI quid mei judicii eſt, operam non inanem ſumit, qui Methodum Mathematicorum diligentiſſime rimatur. Ejus enim vim qui tenet, is non modo ad Mathemata percipienda animum, quantum poteſt, attendit & rationes evidentiæ illorum funditus perſpicit; verum ad alias etiam diſciplinas, utut labore non adeo facili, cum fructu tamen prorſus inſigni, eandem transfert. Quodſi vero Matheſis non aliam, præter hanc unicam, cultoribus ſui afferret utilitatem; eidem tamen gnaviter incumbere deberent

quotquot diſciplinarum ſtudia ingrediuntur. Eumque in finem ſtudium mathematicum tantopere commendant Viri docti ac intelligentes, quos inter (*a*) LOCKIUM, (*b*) MALEBRANCHIUM, (*c*) TSCHIRNHAUSIUM nominaſſe ſufficiat, quorum in Philoſophia rationali illuſtranda ſolertia haud paucorum opinionem vicit. Hanc igitur de Methodo mathematica Commentationem, mole exiguam, ſed rerum ubertate gravem, Elementis Matheſeos univerſæ præmiſi, ne in iis deſiderari paterer induſtriam meam, quorum ad recte philoſophandum quam maxime neceſſaria eſt cognitio: (*d*) inprimis cum exiguus admodum ſit eorum numerus, quibus interiora methodi ſunt perſpecta; multo minor autem illorum, qui methodo mathematica prompte utuntur. Cæterum hæc Commentatio de Methodo, ſingulari cum attentione perlegenda, &, ubi Arithmeticæ ac Geometriæ Elementa evolvuntur, præcepta methodi ſunt relegenda; tum ut penitus intelligantur, tum ut appareat, quomodo iis ſatisfiat. Ita demum Matheſeos ſtudium vere acuet intellectum,

(*a*) In Tractatu *De directione ingenii* (qui inter *Opera poſthuma* idiomate Anglico *Londini* 1706, edita habetur) p. 30.

(*b*) *De inquirenda veritate*, lib. 6. c. 6. & 7.

[illegible] *Introductione ad Matheſin & Phyſicam* Germanice conſcripta p. m. 17. & ſeqq.

(*d*) Uberius huc ſpectantia expoſuimus in Logica, ſeu Philoſophia rationali.

CON-

CONSPECTUS COMMENTATIONIS DE METHODO MATHEMATICA.

Methodus mathematica definitur §. 1, *& ejus forma generaliter describitur* §. 2. *Hæc ut specialius explicetur, docetur quid sint Definitiones* §. 3, *& harum gratia traditur explicatio Notionum, tum in genere* §. 4, *cum in specie clararum* §. 6, *obscurarum* §. 7. *distinctarum* §. 8, *confusarum* §. 9, *adæquatarum* §. 10, 11, *& inadæquatarum* §. 12. *Ostenditur, quænam notiones in numerum Definitionum admittantur* §. 13, 14, 15. *Definitiones dividuntur in nominales & reales* §. 16, 17, 18. *Exponuntur quatuor modi inveniendi Definitiones nominales* §. 19, 20, 21, 22, *& quatuor alii inveniendi reales* §. 25, 26, 27, 28. *Indicatur quomodo innotescat, quod definitiones tam nominales* §. 23, 24, *quam reales* §. 29, *possibiles sint. Declaratur indoles Axiomatum & Postulatorum* §. 30, 31, 33, *& abusus quidam notantur* §. 32. *Differitur quoque de Experientia* §. 34, 35, 36, 37. *Definitur Theorema* §. 38, *& distincte agitur de propositionis partibus, Thesi, atque Hypothesi* §. 39, 40, 41, 42, *& de Demonstratione* §. 43, 45, 47; *ubi etiam docetur usus citationum Mathematicis in demonstrationibus solennis* §. 44. *Similiter declaratur Problematum* §. 48, *Corollariorum* §. 49, 50, *Scholiorum* §. 51, *ratio. Afferitur Methodi mathematicæ universalitas* §. 52, *& ratio redditur, cur interdum Mathesis judicium acuere debeat* §. 53, *interdum minus* §. 54. *Denique respondetur ad objectiones, quæ contra Methodum mathematicam a nonnullis afferri solent* §. 55, 56, 57.

DE METHODO MATHEMATICA BREVIS COMMENTATIO.

§. 1. PER *Methodum mathematicam* intelligo Ordinem, quo in tradendis dogmatis suis utuntur Mathematici.

§. 2. Ordiuntur autem Mathematici a Definitionibus: inde ad Axiomata & Postulata; in Mathesi mixta, ad Experientias, seu Observationes, progrediuntur: his tandem Theoremata & Problemata superstruunt: ubique vero Corollaria & Scholia, si e re visum fuerit, annectunt.

§. 3. Sunt autem *Definitiones* primæ rerum notiones, quarum ope inter se distinguuntur, & unde, quæ de ipsis concipiuntur, reliqua deducuntur.

§. 4. Per *Notionem* quamlibet rei cujuslibet in mente repræsentationem intelligo.

§. 5. Notionum differentiam primus distincte tradidit sagacissimus LEIBNITIUS (*a*): quæ quanti sit ponderis, pauci hactenus agnoverunt.

§. 6. Est scilicet *Notio clara*, quæ ad rem oblatam recognoscendam sufficit; ex.gr. quod figura data in numero triangulorum habeatur.

§. 7. *Obscura* est *notio*, quæ ad rem oblatam recognoscendam non sufficit. Talis est, ex. gr. plantæ, ad cujus conspectum dubitas, utrum ea sit, nec ne, quam alio tempore alibi videras, & cui hoc vel illud nomen tribui suevit.

§. 8. Clara *notio distincta* habetur, si notas recensere valeas, ex quibus rem oblatam recognoscis: ex.gr. quod circulus sit figura, linea curva in se redeunte terminata, cujus singula puncta ab eodem puncto intermedio æqualiter distant.

§. 9. *Confusa* est *notio* clara, si notas, ex quibus rem oblatam recognoscis, recensere minime valeas, utut in tales sit resolubilis: qualis est, ex. gr. notio coloris rubri.

§. 10. Distincta *notio adæquata* dicitur, si & notarum, ex quibus componitur, notiones distinctas habueris; ex. gr. notio circuli paulo ante tradita censetur adæquata, ubi curvæ in se redeuntis, puncti intermedii, distantiæ æqualis, & terminationis notiones distinctas habueris.

§. 11. In hac analysi cum progredi liceat, donec ad notiones irresolubiles perveniatur; notionum adæquatarum dari gradus manifestum est, in præsenti tamen non explicandos. Sufficit monuisse, quod notiones quædam confusæ admitti queant, quarum evolutio ad demonstrationes non apprime necessaria. Ita EUCLIDES non resolvit notionem æqualitatis, utut eadem notiones trianguli æquilateri, rhombi, & figurarum regularium ingrediatur. Propositiones enim, ad quarum demonstrationem necessaria erat, facile ipsi sine probatione concedi poterant; ex. gr. quod æqualia eidem tertio sint æqualia inter se; quod figuræ sibi mutuo congruentes sint æquales; quod æqualibus per æqualia multiplicatis facta sint æqualia, &c. Defectum scilicet analyseos supplent propositiones, quæ per experientiam satis certæ sunt.

§. 12. *Inadæquata* est *notio*, si notarum, quæ distinctam ingrediuntur, nonnisi confusas notiones habueris.

§. 13. In numerum Definitionum mathematicarum non admittuntur nisi notiones distinctæ, &, quantum fieri potest, aut pro re nata sufficit, adæquatæ.

§. 14. Hinc in Definitionibus subsequentibus non utuntur vocibus, nisi vel ex antecedentibus, vel aliunde, satis intelligatur, quæ res iis subjiciantur.

§. 15. Et, si quando notione confusa contenti sumus, res, ad quam spectat, obvia

(*a*) In *Actis Eruditorum*, An. 1684. p. 537.

obvia sit, necesse est, ut vel præsentem quandocunque libuerit percipere, vel sæpius jam olim perceptæ haud difficulter reminisci valeamus.

§. 16. Definitiones vero ad duas classes commode revocantur. Sunt nimirum aliæ nominales, aliæ reales.

§. 17. *Definitio nominalis* est enumeratio notarum ad rem oblatam ab aliis distinguendam sufficientium. Talis est Quadrati, si figura quadrilatera, æquilatera, rectangula esse dicatur.

§. 18. *Definitio realis* est notio distincta rei genesin, hoc est, modum quo fieri potest, exponens. Talis in Geometria est Circuli, si per motum lineæ rectæ circa punctum fixum describi concipitur.

§. 19. Ad Definitiones nominales multis modis pervenitur: quos inter primus nominari debet, si ad rem præsentem, quam percipimus, attendimus. Hac ratione Astronomis innotuit, Eclipsin Lunæ esse privationem luminis Lunæ plenæ. Cum cura vero distinguenda sunt quæ distingui possunt; eaque fini singula primum sigillatim considerari, mox inter se conferri debent, ut Definitio notio distincta evadat, qualis (*vi* §. 13) esse debet.

§. 20. Definitiones hac vel alia methodo investigatas expendentes, varias plerumque determinationes animadvertimus, quibus omissis generaliores evadunt. Ex. gr. Si ex definitione Trianguli quod sit spatium tribus lineis comprehensum, linearum numerus expungatur; notionem Figuræ habebis, quod sit spatium lineis terminatum.

§. 21. Si determinationes in Definitionibus obvias consideres, alias iis geminas comminisci datur: qua ratione Definitiones aliæ inveniuntur. Ex. gr. Ubi perpendis figuram trianguli a ternario laterum numero dependere; quaternarium aut numerum quemcunque alium ternario majorem substitue, ut Definitio Figuræ quadrilateræ, aut multilateræ cujuscunque prodeat.

§. 22. Quemadmodum vero (*vi* §. 20) determinationes quædam omitti, sic etiam novæ superaddi possunt. Ex. gr. in definitione trianguli, species & ratio linearum, quam inter se habent, determinari potest. Ponamus nimirum lineas esse rectas; generalis notio trianguli in notionem Trianguli rectilinei abit. Ponamus porro esse latera omnia inter se æqualia; notio trianguli generalis in notionem Trianguli æquilateri degenerabit.

§. 23. Definitionum per methodum primam inventarum realitas extra omnem dubitationis aleam posita. Quis enim, quæ actu existere cognoscit, utrum esse possint, nec ne, dubitabit? Dubitaret enim, num perciperet, quæ se percipere sibi conscius est: id quod valde absonum. Ex. gr. Si quis Lunam deficientem intuetur; quod Eclipsin pati possit, dubitare nequit. Idem de illis Definitionibus judicium esto, quæ a possibilibus abstrahuntur.

§. 24. Alia vero Definitionum, per methodum tertiam & quartam inventarum, est ratio. Utrobique enim arbitrium regnat; sive, juxta tertiam, determinationes datas in alias similes con-

vertas; five, juxta quartam, datis alias superaddas: noſtrum autem arbitrium nullam rebus exiſtendi neceſſitatem imponit. Licet ex. gr. ſpatium tribus lineis rectis comprehendi poſſit, inde tamen nondum liquet, quod etiam quatuor, quinque, aut pluribus quotcunque aliis terminari queat. Et quamvis tres lineæ rectæ ſpatium comprehendant; inde tamen nondum apparet, quod inter ſe æquales eſſe poſſint. Tales itaque Definitiones poſſibiles eſſe demonſtrandum eſt: id quod Geometræ circa figuras præſtant, dum earum conſtructionem tradunt.

§. 25. Definitiones reales, vel a priori inveniuntur, vel a poſteriori innoteſcunt. A priori Definitiones reales inveſtigabis, ſi ex plurium poſſibilium, quæ tibi innotuerunt, combinatione novum quoddam poſſibile producis; ex. gr. ex combinatione machinarum ſimplicium machinam quandam compoſitam, cujus nullam antea habebas notionem. Et in hac quidem methodo caſui perſæpe aliquid datur. Exemplo eſt compoſitio teleſcopii, per fortuitam combinationem lentis convexæ cum concava detecta, narrante BORELLO.

§. 26. Difficilius idem præſtatur; ſi, ex data Definitione nominali, realis invenienda. Hoc enim in caſu notiones diſtinctas eorum evolvere tenemur quæ in ipſa continentur; ut appareat, qualia ad rei formationem requirantur: poſtea cognitiones jam ante acquiſitas mente recolere debemus, viſuri num talia ſuccurrant, per quæ rei formationem concipere licet. Ex. gr. datur in Aſtronomia Definitio nominalis Eclipſis Lunæ, quod ſcilicet ſit privatio luminis Lunæ plenæ; invenienda eſt Definitio realis ejuſdem. Lumen igitur lunare & plenilunium meditari debemus. Ubi iſtud a Sole ſecundum lineas rectas in corpus lunare incidere, & tempore plenilunii ecliptici Lunam Soli diametraliter opponi, adeoque Tellurem duobus hiſce corporibus interpoſitam in locum Soli oppoſitum projicere umbram ſuccurrit; haud difficulter innoteſcit, Eclipſin Lunæ oriri, ſi ea umbram Terræ ingrediatur.

§. 27. A poſteriori Definitiones reales innoteſcunt, ſi rei formationi præſentes attendimus. Ex gr. Si quis videat in campo circulum deſcribi, fune circa clavum fixum in gyrum acto; is geneſin circuli concipit per motum lineæ rectæ circa punctum fixum.

§. 28. Ad Definitiones reales quoque pervenitur, dum compoſitum totum in ſuas partes ſimplices reſolvitur; quod in organicis potiſſimum locum habet. Hac ratione, ex. gr. ſtructuram machinæ jam extantis aſſequimur.

§. 29. Circa hoc Definitionum genus duo conſideranda ſunt, antequam de illarum poſſibilitate judicare licet; nempe 1°. utrum ea exiſtant, aut exiſtere poſſint, nec ne, quæ ad geneſin rei concurrere aſſumimus; 2°. num ab iis proficiſci queant, quæ in formatione rei iiſdem tribuimus; id quod ex natura Definitionis realis (§. 18.) liquet. Horum vero certitudinem, vel experientia, vel eorum quæ per conſequentias legitimas alio tempore deduximus, remi-

reminiſcentia conſequimur. Ita, ex. gr. in Definitione Circuli ſuperius (§. 27.) tradita, per experientiam claret lineam rectam circa punctum fixum in gyrum agi poſſe. Aſt, in Definitione Eclipſis lunaris, ratione, experientia licet ſtipata, aſſequimur Lunam Telluris umbram ingredi poſſe.

§. 30. Definitiones tam reales, quam nominales, cum in ſe conſiderari, tum inter ſe conferri poſſunt. Quicquid ex conſideratione eorum, quæ in una Definitione continentur, immediate deducitur, *Axioma* vocatur, ſi quid rei convenire, aut non convenire enunciet; *Poſtulatum* vero, ſi quid effici poſſe affirmet, vel neget. Ex. gr. Ex geneſi Circuli, liquet omnes rectas ex centro ad peripheriam ductas inter ſe æquales eſſe, cum unam eandemque lineam in diverſo ſitu referant. Hæc adeo propoſitio in Axiomatum numero habetur. Aſt dum per eandem Definitionem intelligitur, ex quovis puncto, quovis intervallo, circulum deſcribi poſſe: id inter Poſtulata collocatur.

§. 31. Quoniam igitur Axiomatum & Poſtulatorum veritas per intuitum Definitionum, ex quibus fluunt, cognoſcitur, demonſtratione nulla indigent. Vera enim eſſe intelliguntur, quam primum realitas Definitionum fuerit evicta. Et hoc intuitu *Propoſitiones per ſe notæ*, item *ex terminis manifeſtæ* dicuntur.

§. 32. Multi hac Axiomatum proprietate abutuntur, dum præmiſſas ſyllogiſmorum, quas probare neſciunt, pro Axiomatibus venditant. Hinc videas in Axiomatum numerum referri propoſitiones, quas ſine probatione non admittunt intelligentes. Equidem negandum non eſt ipſum EUCLIDEM, qui in demonſtrando ſe virum præſtitit, propoſitiones utique demonſtrabiles in Axiomatum numerum retuliſſe, propterea quod æqualitatis, congruentiæ, lineæ rectæ, aliarumque rerum notiones explicare non poterat: monuimus tamen jam in ſuperioribus (§. 11.), ipſum non ſuppoſuiſſe niſi propoſitiones, quarum certitudo ſtatim cuique patet, per recordationem vel maxime confuſam eorum quæ olim ſæpius experti ſumus, aut etiamnum, ſi ita viſum fuerit, denuo extemplo experiri poſſumus; immo quibus in judicando tantum non quotidie utuntur omnes; quale ex. gr. eſt, quod eidem tertio æqualia ſint æqualia inter ſe, item quod figuræ & lineæ rectæ ſibi mutuo congruentes ſint æquales. EUCLIDIS igitur exemplum abuſum, quem taxamus, minime tuetur.

§. 33. Notandum nimirum, eo minorem fieri Axiomatum numerum, quo ſufficientius notiones evolvuntur. Immo, ſi verum fateri fas eſt, vera Axiomata non ſunt niſi propoſitiones identicæ.

§. 34. Cum Axiomatibus & Poſtulatis etiam *Experientiæ* nonnunquam confunduntur. Experiri autem dicimur, quicquid ad perceptiones noſtras attenti cognoſcimus: ex. gr. dum, accenſa candela, conſpicua fieri videmus quæ ante non apparebant.

§. 35. Experientiæ itaque ſunt rerum ſingularium, quoniam nonniſi res ſingulares

gulares percipimus. Quamobrem ad illas provocans casum singularem in medium proferre tenetur, nisi vel sensui, vel memoriæ fuerint obviæ: id quod in Mathesi exactissime observatur. Neque enim, ex.gr. in Astronomia Solis orientis & occidentis Observationes recensentur; utpote quotidianæ, ac omnibus satis notæ. Diametri vero apparentis Planetarum Observationes, a diversis Astronomis, tempore diverso, diversisque instrumentis celebratæ, fideliter referuntur; cum non in cujusvis potestate existant.

§. 36. Mathematici quoque Experientias a conclusionibus inde deductis accurate distinguunt; aliis ut plurimum has cum istis confundentibus. Ex. gr. quod, candela accensa, corpora, quæ ante non apparebant, in conspectum prodeant, per Experientiam innotescit. Quodsi vero perpendens, lumen in causa esse cur tenebris discussis appareant, & una expendens rerum naturalium eodem modo se habentium eundem esse effectum, infero; Quicquid lumine collustratur, videri potest: hæc propositio non in Experientiarum, sed conclusionum per legitimam consequentiam inde derivatarum numerum referenda.

§. 37. Istiusmodi conclusiones, omissis Experientiis, commemorantur, si modus, quo ex his eliciuntur, omnibus fuerit cognitus atque perspectus. Ex. gr. maximam Solis declinationem non immediate metimur, sed ex data elevatione æquatoris & altitudine meridiana Solis in solstitio invenimus. Proprias igitur de ea observationes traditurus, non altitudinem Solis meridianam in solstitio observatam annotet opus est; sed sufficere potest, ut ipsam declinationem statim indicet. Si enim constet, quantam elevationem æquatoris assumserit; nec quanta meridiana fuerit altitudo Solis ignoratur. Quod si vero non appareat, quomodo propositio data ex prævia quadam Experientia eliciatur; casus singularis omnino adducendus, ut ratio deductionis ad examen revocari possit. Quod enim aliquid perceperis cum demonstrare nequeas; ut credatur jure poscis: sed quomodo unum ex altero deductum fuerit, cum rationis examini subsit, ut fides deductis habeatur sine ratione flagitas.

§. 38. Propositio theoretica ex pluribus Definitionibus inter se collatis eruta *Theorema* appellatur. Ex. gr. Si, in Geometria, Triangulum cum Parallelogrammo super eadem basi & ejusdem altitudinis confertur, & partim immediate ex ipsis eorundem Definitionibus, partim ex aliis ipsorum proprietatibus jam ante erutis infertur; Parallelogrammum esse Trianguli duplum: ea propositio in Theorematum numerum referenda.

§. 39. Duo autem sunt, quæ in omni Theoremate attentionem merentur, *Propositio* nempe, atque *Demonstratio*. Ista quidem enunciatur, quid rei cuidam sub certis conditionibus convenire possit, quid non: in hac autem rationes exponuntur, ob quas intellectus illud ipsi convenire concipere valet.

§. 40.

§. 40. Absolute possibile non est nisi Ens a se: reliqua vero omnia tantum admisso alio possibilia esse intelliguntur, hoc est, nil eorum est sine quadam conditione. Hæc igitur in Propositione una exprimenda. E. gr. triangulum est dimidium parallelogrammi, si bases & altitudines fuerint sigillatim æquales. In Propositione itaque, tam basium, quam altitudinum æqualitas exprimenda. Hinc quælibet Propositio in *Hypothesin* & *Thesin* commode distinguitur; quarum ista conditiones recenset, sub quibus aliquid affirmatur, vel negatur; hæc vero complectitur quod, vel affirmatur, vel negatur. Ex. gr. in Propositione allata, Hypothesis est, *si triangulum & parallelogrammum super æquali basi & ejusdem altitudinis existant*; Thesis autem, *illud hujus dimidium est*.

§. 41. Notandum vero, si in ipsa rei Definitione conditiones, de quibus dixi, continentur, Hypothesin distincte non exprimi. Ex.gr. si tres in triangulo anguli 180 graduum dicantur; Hypothesi carere videtur Propositio: quæ tamen statim comparet, si pro voce trianguli definitionem ejus substituas. Ita enim habet Propositio: si quædam figura tribus lineis rectis terminatur, tres habet angulos junctim sumtos duobus rectis æquales. En Hypothesin, quæ urget, ut tres lineæ rectæ spatium comprehendant.

§. 42. Datur autem in Propositione affirmativa necessarius nexus inter Hypothesin atque Thesin; in negativa autem nullus concipi potest, sed hæc illi repugnat. Quoniam scilicet in subjecto deprehenditur, quod Hypothesis involvit; ei quoque convenire debet, quod in Thesi continetur. E. gr. in hoc Theoremate, quod *triangulum sit dimidium parallelogrammi super eadem basi & ejusdem altitudinis*, primum triangulo tribuimus basin & altitudinem basi ac altitudini parallelogrammi æquales, dein asserimus, quod sit parallelogrammi dimidium. Posterius concipitur propter prius.

§. 43. Nexum inter Thesin & Hypothesin in Propositionibus affirmativis, repugnantiam in negativis, *Demonstratio* manifestat. Eorum igitur Definitiones, quæ in Hypothesi ac Thesi continentur, eorundemque proprietates, ex istis derivatæ, aut aliunde cognitæ, Demonstrationum principia existunt. Quoniam vero in Mathesi principia non admittuntur, nisi quæ ante fuerunt evicta; Definitiones ac Propositiones, quibus Demonstrationes superstruuntur, citari solent; partim ut appareat genuina principia adhiberi; partim ut ignaris constet, unde ipsorum certitudo haurienda.

§. 44. Enimvero citationes Definitionum, Axiomatum, Postulatorum, Theorematum & Problematum non exiguum habent usum; nec sine ratione in Mathesi singulis cogitationum generibus singula nomina imponuntur. Demonstratio namque non convincit, nisi principiis demonstrandi extra dubitationis aleam positis. Quamobrem ex citationibus liquet, quænam tanquam vera supponenda sint, antequam

veritatis propoſitionis datæ convinci poſſis. Et quoniam Definitiones primi conceptus exiſtunt, Axiomata vero ex iis immediate deducuntur, Theoremata vero, vel immediate, vel mediate, ex iiſdem derivantur; ex nomine veritatis cujuſlibet, ad quam in Demonſtratione provocatur, ſtatim addiſcitur, utrum multa ſupponenda ſint, nec ne, & quo ordine ſit procedendum, ut convictio locum habeat. Immo cum ad veritatem Definitionum, Axiomatum & Poſtulatorum, Theorematum & Problematum, dijudicandam peculiaribus artificiis opus ſit; nomina veritatum citatarum ſimul methodos in memoriam revocant, quibus principia demonſtrandi perſuadeas convincendo.

§. 45. Non alia vero eſt ratio ex principiis concluſiones inferendi, quam quæ in omnibus libellis logicis, ubi de ſyllogiſmo agitur, dudum expoſita. Sunt enim Demonſtrationes Mathematicorum congeries quædam enthymematum, ita ut omnia vi ſyllogiſmorum concludantur, omiſſis ſaltem præmiſſis, quæ vel ſponte meditanti occurrunt, vel per citationes in memoriam revocantur. Perfecta autem ut ſit Demonſtratio, præmiſſæ ſyllogiſmorum novis ſyllogiſmis tamdiu probandæ ſunt, donec perveniatur ad ſyllogiſmum, in quo præmiſſæ ſunt, vel Definitiones, quas jam conſtat eſſe poſſibiles, vel Propoſitiones aliæ identicæ.

§. 46. Equidem demonſtratu haud difficile foret, (*a*) genuinam Demonſtrationem, quæ convictionem plenariam pariat, fieri non poſſe, niſi cogitationes noſtræ juxta regulas ſyllogiſticas dirigantur; his tamen ambagibus in præſenti opus non eſt. Cum enim de quæſtione facti diſputemus; exempla allegaſſe ſufficit. Scilicet non ignotum eſt, CLAVIUM Demonſtrationem Propoſitionis primæ Elementi primi EUCLIDIS in ſyllogiſmos reſolviſſe: immo HERLINUM atque DASIPODIUM ſex priora Elementa EUCLIDIS & HENISCHIUM integram Arithmeticam per ſyllogiſmos in forma exhibitos demonſtraſſe.

§. 47. Equidem non ignoro eſſe, hac noſtra præſertim ætate, non paucos qui ſibi perſuadent Demonſtrationum mathematicarum formam a legibus ſyllogiſmorum abhorrere, multo minus concedere, illas vim omnem ad convincendum ab his unice habere; ſed nec me latet, contrarium videri Viris non modo præclara judicii vi pollentibus, ſed & attentione magis ſevera utentibus; quorum autoritas me permovit, ut eam in rem penitius inquirerem & ſic præjudicium ex præcipitantia in judicando ortum cognoſcerem. Fatetur certe LEIBNITIUS (*b*), Vir in Matheſi & omni eruditione reliqua ſummus, *firmam eſſe demonſtrationem, quæ præſcriptam a Logica formam ſervat.* Similiter *Johannes* WALLISIUS, Mathematicus profundus (*c*), agnoſcit, *id, quod in Matheſi proponitur probandum, ſyllogiſmi unius pluriumve ope deduci.* Immo

(*a*) Oſtendimus id in *Logica* §. 551, & ſeqq.

(*b*) *Acta Erudit.* A. 1684, p. 541. Conf. *Eſſais de Theodicée* p. 37, 40, 41, 73. (*c*) *Operum Mathem.* Vol. 3, f. 180, hoc eſt *Logic.* lib. 3, c. 22.

Immo ingeniosissimus etiam HUGENIUS (*d*) observavit, *paralogismos in Mathesi sæpius vitia formæ existere.* Verum enimvero ne autoritatibus magis, quam rationibus (*e*) pugnare videar (quanquam in hoc argumento maximum pondus habeat tantorum Virorum autoritas,) fontes præjudicii vulgaris retegere libet. Quamdiu scilicet in Mathesi versamur, figuris & characteribus in ratiocinando juvamur, ex quarum inspectione non minus quam ex aliarum propositionum citatione, multæ præmissæ syllogismorum supplentur: ad quod si non satis attendatur, quam sancte in Demonstrationibus mathematicis leges syllogismorum custodiantur non apparet.

§. 48. *Problemata* facienda proponunt & tribus partibus constant, *Propositione* scilicet, *Resolutione*, ac *Demonstratione.* In Propositione, quid fieri debeat, indicatur. In Resolutione singuli actus ordine decenti recensentur, quibus efficitur quod erat faciendum. Denique in Demonstratione evincitur, factis iis, quæ Resolutio præcipit, effectum intentum obtineri. Quoties itaque Problema demonstrandum, in Theorema convertitur, cujus Hypothesin Resolutio, Thesin vero Propositio constituit. Generalis enim omnium Problematum demonstrandorum (ut jam innuimus) tenor hic est; Factis iis quæ Resolutio præcipit, illud quoque efficitur quod erat faciendum. Quare non opus est, ut de Problematibus plura dicantur.

(*d*) *Acta Erudit.* A. 1711. p. 477.
(*e*) Vide eas in *Logica* §. 551, & seqq.

§. 49. Rationes subinde non desunt, cur ad casus speciales applicentur Propositiones generales, & ex quibusdam Propositiones sæpe alias prona consequentia deducere licet. Quæ utroque modo eruuntur Propositiones *Corollaria* nuncupantur.

§. 50. Primum Corollariorum genus demonstratione non indiget. Quod enim in genere de omnibus in universum casibus demonstratum fuit, de hoc, vel isto, in specie ut denuo demonstretur opus non est. Ex. gr. ubi de omnibus triangulis ostensum, tres angulos eorum una sumtos duobus rectis æquari; idem in specie de triangulis rectangulis confirmari haud debet. Ast alterum Corollariorum genus demonstrationem requirit. Quotiescunque nimirum ex aliis Propositionibus aliquid infertur, ratio illationis indicanda. Ex. gr. Si theoremati, cujus modo mentionem feci, hoc Corollarium subjungatur; *in triangulo rectangulo unus saltem actu rectus angulus esse potest*: ratio illationis non negligenda, quod scilicet, positis duobus actu rectis, tertius nihilo æqualis foret.

§. 51. In *Scholiis* denique, tam Definitionibus, quam Propositionibus, earumque Corollariis, subjungi solitis, obscura declarantur, ad dubia respondetur, usus doctrinarum indicatur, historia ac fontes inventionum describuntur, &, si qua alia scitu nec injucunda nec inutilia occurrunt, inseruntur.

§. 52. Explicatam hactenus methodum qui probe perpendit, ejus universalitatem haud dubie agnoscet; nec dissi-

diffitebitur fine ea ad folidam rerum cognitionem perveniri haud quaquam poffe. Dicitur vero *Methodus mathematica*, immo fæpius *Geometrarum Methodus*, quia huc ufque Mathematici fere foli, in Geometria inprimis, ejus leges fancte cuftodiverunt. Quanquam enim non defuerint, qui eandem aliis difciplinis applicare ftuduerunt; conatui tamen ipforum eventus minime refpondit. Etenim nunc notiones non fatis evolverunt; nunc fine probatione affumferunt quæ maxime probari debebant; nunc per faltum ratiocinati funt, inferentes nimirum, quæ nullo argumento inferri poffunt.

§. 53. Explicatæ Methodi legibus cum ex affe fatisfiat, in Mathefi præfertim pura; non ex vano prædicatur, quod Mathemata judicium acuant; hoc eft, quod eorum cultores promptitudinem acquirant veritatem quamlibet, ad quam cognofcendam animum appellunt, accuratius, quam alii folent, dijudicandi. Exercitio enim comparatur judicandi etiam ac ratiocinandi habitus, qualе Demonftrationum mathematicarum meditatio cenferi debet.

§. 54. Fructus igitur, quem ex ftudio Mathefeos maximum percipere licet, participes non fiunt, quotquot praxes quafdam mathematicas, aliafque parum mathematici habentes, vulgo tamen ad eandem referri folitas, addifcunt. Licet enim in vita communi utiles exiftant; neminem tamen judicii acumine ac inveniendi habitu beant, quia *per* §. *præc.* hæc non nifi a feria Demonftrationum meditatione expectare licet.

§. 55. Supereft ut ad objectiones duas refpondeam, quas contra methodum Geometrarum nonnulli afferre folent; præfertim cum fatis prævideam non defuturos, qui eafdem contra Elementa mea Mathefeos urgebunt. Nempe vitio vertitur Geometris, 1°. quod multa definiant, quæ definitione non habent opus, & quod multa probent, quæ probatione non indigent: 2°. quod ordinem, quo generaliora & fimpliciora fpecialibus & compofitis præponi neceffe eft, negligant, nec ad unum argumentum pertinentia uno loco abfolvant.

§. 56. Objectioni primæ ut fatisfiat, explicandum eft, quando Definitiones fint fuperfluæ, & quales effe debeant Propofitiones ut probatione non indigeant: id quod ex fine Definitionum, atque indole Demonftrationum redditur manifeftum. Definitiones nimirum hunc habent ufum, ut vel fubfequentibus aliis intelligendis inferviant, vel principia demonftrandi præbeant. Oftendant igitur adverfarii EUCLIDEM, aut Geometram alium, ullam dediffe Definitionem qua, nec ad fubfequentes explicandas, nec in Propofitionibus demonftrandis utuntur. Quamdiu vero exempla iftiufmodi in medium afferre nequeunt, Geometras reprehendere definant, quod nimii fint in definiendo, & fuum potius errorem agnofcant, quod Definitionibus non alium tribuant ufum, nifi qui in rebus definitis agnofcendis & ab aliis diftinguendis confiftit. Diximus porro fuperius, præmiffas fyllogifmorum tamdiu continuan-

nuandas esse, donec ad Definitiones, quas jam constat esse possibiles, & Propositiones identicas perveniatur. Sine ratione itaque non admittuntur nisi Propositiones identicæ, ac Experientiæ claræ, in quibus Notiones primæ fundantur. Reliquæ Propositiones omnes sunt demonstrandæ. Ostendant igitur adversarii EUCLIDEM, aut Geometram alium, Propositiones identicas, & Notiones in Experientiis claris fundatas demonstrasse. Quamdiu vero hujusmodi exemplum nullum in medium afferre valent; Geometras reprehendere desinant, quod probent, quæ probatione non indigere ipsis videntur, & potius discant, quod in demonstrando nunquam nimis accurati esse possimus; præsertim ubi extra Mathesin versamur, nec, ut ibi, figuris ac characteribus in ratiocinando juvamur.

§. 57. Quoniam igitur rigor in demonstrando laudi ducitur Geometris (§. 56.); nec ordo jure taxatur, quo sine in demonstrando accurati esse nequimus. Eo nimirum ordine singula proponenda sunt, quo unum ex altero facilius infertur. Quare cum satis experiamur, id fieri minime posse, si in unum cumulum congerantur, quæ de subjecto eodem cognosci possunt: *Ordo scholæ* Philosophis vulgaribus relinquendus, & a Geometris aliisque, quibus res profundius meditari datum est, *Ordo naturæ* retinendus.

ELEMENTA

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

PRÆFATIO.

ON dubito fore aliquos, qui mirabuntur quod Elementa Matheseos universæ conscribens MATHESIN UNIVERSALEM prætermittam. Enimvero, quam perperam nonnulli Mathesin universalem appellant, eam ego ab ARITHMETICA diversam non agnosco. Quantitates enim, quarum affectiones & relationes in ea considerant, pro numeris indeterminatis habeo: quæ etiam ratio est, cur non aliæ ipsarum quam numerorum sint affectiones ac relationes. Ea igitur, quæ in Mathesi universali vulgo tractari solent, ego in Arithmetica pertracto: quo rationum potissimum doctrina spectat. Calculum tamen numerorum indeterminatorum, quem LITTERALEM appellare solent, non integrum trado, quia in demonstrationibus arithmeticis & geometricis integro opus non habeo. Plenior adeo explicatio ANALYSI reservatur. Nec rationum doctrinam ope calculi hujus solius demonstro, quia cum rigore demonstrandi, quem mihi observandum proposui, ea demonstrandi ratio non subsistit; utpote in qua multa communiter sine probatione assumuntur, quæ & a Veteribus demonstrata, nec mihi sine probatione concedi posse visa sunt, ubi solidam doctrinam cordi habueris. Veram

autem

autem MATHESIN UNIVERSALEM in desideratorum numero colloco; eam nempe, quæ leges metiendi generales & ad omnium rerum quantitatem determinandam mensuras convenientes præscribit: nec repertu adeo facilem judico. Cæterum quæ commodius ope calculi litteralis eruuntur, nec ad communis Geometriæ elementa intelligenda necessaria sunt; ea ad Analysin rejeci. Tyrones, sub initium, praxes arithmeticas solas, cum definitionibus, sibi familiares reddere debent; theorematibus problematumque demonstrationibus omissis. In calculo exercitati theoremata ad multa exempla numerica applicent; ut non modo eorum sensum clare perspiciant, sed eadem quoque memoriæ firmiter insigant, quo in promptu sint, quoties iis, vel ad demonstrandum, vel ad inveniendum opus est. Iis intellectis, problematum demonstrationes expendere, ac his perceptis inoffenso pede ad theorematum demonstrationes progredi licebit. Absit autem, ut quis arbitretur omnibus calcandam esse hanc semitam. Quorum enim est major mentis acies, congenita vel aliis studiis acquisita, & facilius conservatur attentio; illi Elementa integra eo ordine perlegere possunt, quo conscripta sunt. Usus Arithmeticæ per disciplinas reliquas omnes se diffundit. Ea igitur reliquis omnibus præmittenda fuit, & ante eas cum cura addiscenda est. Quantus Arithmeticæ in vita civili usus sit, experientia loquitur: quantus in Physicis & aliis Philosophiæ partibus, experientur quotquot, Mathesi absoluta, solidam extra eam doctrinam quærere allaborabunt. Quantum denique in perficiendo intellectu possit, in ipsa pertractatione hinc inde annotavimus, &, si quis culturam convenientem studio arithmetico non negaverit, experientia optima erit Magistra.

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Arithmeticæ.

DEFINITIO I.

1. ARITHMETICA est Numerorum scientia. Pars ejus *practica* est scientia computandi, hoc est, ex quibusdam numeris datis inveniendi alios, quorum ad cognitos relatio datur; ut si fuerit inveniendus numerus, qui duobus 6 & 8 junctim sumtis æqualis est.

SCHOLION.

2. Patet adeo, Arithmeticam practicam esse methodum inveniendi specialem. Ab ea igitur, si rite meditemur, regulas inveniendi generales abstrahere licet. Particularis enim methodus in applicatione regularum generalium consistit. Dederunt aliqua huc spectantia CARTESIUS, *cum in Tractatu* De methodo, *tum in iis, quæ* De ingenii directione *inter posthuma habentur; &* R. P. MALEBRANCHIUS *in egregio opere* De inquirenda veritate. *Plura, quamvis paucis, nos damus infra* (§. 125).

DEFINITIO II.

3. *Unum* est, quod ita est aliquid, ut aliud præterea idem esse nequeat. Illustris LEIBNITIUS unum sic definit: Si A sit B, nec præterea D ponatur B, nisi A & D idem sint, ponetur B unum.

DEFINITIO III.

4. *Unitas* est abstractum, per quod dicimus unum.

DEFINITIO IV.

5. *Unitates eædem* sunt, quæ per eandem notionem agnoscuntur: *diversa* sunt, quæ agnoscuntur per diversas.

SCHOLION.

6. Ponamus ex. gr. A esse globum lapideum, B similiter esse globum lapideum alium: erunt A & B unitates eædem. Sed si A fuerit globus lapideus, C plumbeus: erunt A & C unitates diversæ. Quodsi A, B & C tantum ut globos consideres, erit etiam C eadem unitas cum A & B.

DEFINITIO V.

7. Si A sit unum, B sit unum, C sit unum, D sit unum &c. nec tamen B, C, D &c. sint idem cum A; erunt A, B, C, D &c. *Plura*, seu *Multa*.

DEFINITIO VI.

8. *Multitudo* est abstractum, per quod dicuntur plura.

DEFINITIO VII.

9. Si A sit idem cum B, C & D simul sumtis, dicetur A *Totum*; B vero, C, & D dicentur ejus *Partes*; & intuitu partis B, reliquas C, & D, &c. *Complementum ad Totum* vocabimus.

DEFINITIO VIII.

10. Quicquid refertur ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam, *Numerus* dicitur.

SCHOLION I.

11. *Nempe si pro unitate linea recta sumatur, numerus quoque exprimi potest per rectam: id quod infra in* Geometria *&* Analysi *abunde patebit.*

SCHOLION II.

12. *Numerus autem adeo generaliter definiendus, ut sub eadem definitione numeros, cum integros, tum fractos, tam rationales, quam irrationales, comprehendere valeamus.*

DEFINITIO IX.

13. *Numerus determinatus* est, qui refertur ad unitatem datam, ut ternarius. *Indeterminatus* est, qui refertur ad unitatem vagam, diciturque *Quantitas.*

SCHOLION.

14. *In quantitatum numerum refertur latitudo fluvii. Quodsi quæsiveris, quanta ea sit; quantitatem concepturus unitatem quandam ad arbitrium assumit, & illius ad hanc relationem quærit, ac pro diversa unitate assumta per diversum numerum determinatum latitudinem fluvii enunciat. Latitudo igitur fluvii inter quantitates collocatur, quatenus refertur ad unitatem vagam: qua determinata, per numerum determinatum distincte intelligitur.*

DEFINITIO X.

15. *Æqualia* sunt, quorum unum alteri salva quantitate substitui potest. *Inæqualia* sunt, si pars unius alteri toti substitui potest.

COROLLARIUM I.

16. Quoniam pars unius inæqualium alteri toti substitui potest; quod vero alteri, salva nempe quantitate, substitui potest, alteri æquale est (§. 15); pars unius inæqualium alteri toti æqualis est.

COROLLARIUM II.

17. Similiter cum unum inæqualium pro alterius parte substitui possit (§. 15): erit idem alterius parti æquale.

HYPOTHESIS I.

18. *Signum æqualitatis est* $=$.

SCHOLION.

19. *Hoc signo primus usus est* HARIOTUS Anglus (*a*), *& hodie plerique eodem utuntur. Nonnulli cum* CARTESIO *adhibent Signum sequens* ∞; *quidam etiam alia. Apud Autores* HARIOTO *antiquiores nullum æqualitatis signum occurrit.*

DEFINITIO XI.

20. *Majus* est, cujus pars alteri toti æqualis est: *Minus* vero, quod parti alterius æquale.

COROLLARIUM.

21. Cum pars unius inæqualium A alteri toti B æqualis sit (§. 16), & vicissim B æquale parti ipsius A (§. 17); inæqualium unum A majus, alterum B minus est (§. 20).

HYPOTHESIS II.

22. *Signum majoritatis est* $>$; *minoritatis* $<$.

SCHOLION.

23. *Signis his itidem primus usus est* HARIOTUS (*b*). *Eum secuti Celeberrimus* WALLISIUS (*c*) *&* R. P. LAMY (*d*). *Aliis alia placent: plerisque nulla sunt.*

DEFINITIO XII.

24. *Similia* sunt, in quibus ea eadem sunt, per quæ a se invicem discerni debebant. *Dissimilia* sunt, in quibus ea diversa sunt, per quæ a se invicem discerni debent. Atque adeo *Similitudo*

(*a*) In *Artis Analyticæ praxi*, Sect. 1. f. 10.
(*b*) Loc cit. (*c*) Vide *Arith.* c. 35. f. 186. Vol. 1. Oper. Mathem. (*d*) *Element. Geometriæ*, lib. 3. sect. 5. p. 177. Edit. Par. 1710.

militudo eſt identitas; *Diſſimilitudo* diverſitas eorum, per quæ res a ſe invicem diſcerni debent.

COROLLARIUM I.

25. Nihil ergo in uno Similium deprehenditur, quod non æque deprehendatur in altero; modo ſit iſtiuſmodi ut ſine alio aſſumto intelligi poſſit.

COROLLARIUM II.

26. Cum quantitas ſine alio aſſumto per ſe non intelligi, ſed tantum dari poſſit (§. 13, 14); Similia, ſalva ſimilitudine, quantitate differre poſſunt (§. 25), atque adeo quantitas eſt diſcrimen internum ſimilium.

SCHOLION.

27. *Similitudinis notionem diſtinctam primus eruit* LEIBNITIUS. *Dixit nempe* Similia, quæ non poſſunt diſtingui, niſi per compræſentiam. *Quoniam vero terminus* compræſentiæ *pleriſque obſcurus videtur; aliam definitionem intellectu planiorem ſubſtituere libuit. Ceterum res* compræſentes *fiunt duplici modo, nimirum vel immediate unum alteri, vel utrique idem aliquod tertium applicando: id quod intellectu facilius evadet, ſi in exemplum aliquod aciem ingenii intendamus. Ponamus itaque duo horologia portatilia prorſus inter ſe ſimilia eſſe. Illorum unum poſſideat* Grachus; *alterum* Cajus. *Quodſi* Cajus *in præſentia* Grachi *horologium ſuum depromat; næ is attonitus ſibi perſuadebit horologium ſuum eſſe, quod* Cajus *manu tenet; at diverſum a ſuo agnoſcet, ubi & ſuum depromit, hoc eſt horologium* Caji *a ſuo diſtinguit* Grachus *per compræſentiam, unum nempe alteri immediate applicando. Sed ſi locorum vel temporum intervallum inter duo ædificia ſimilia interjectum menti una cum ipſis exhibetur; vel ſi dimenſiones templorum aut ſtatuarum ſimilium ad ſtaturam noſtram aut menſuram datam aliam referimus; ſimilia animo compræſentia ſiſtuntur idem tertium utrique eorum applicando.*

HYPOTHESIS III.

28. *Signum ſimilitudinis eſt* ∼.

SCHOLION.

29. *Commendatur in* Miſcellaneis Berolinenſibus (e). *Communiter nullo utuntur.*

DEFINITIO XIII.

30. *Pars aliquota* eſt, quæ aliquoties repetita integro fit æqualis. *Pars* vero *aliquanta* eſt, quæ repetita aliquoties ſemper vel major, vel minor eſt toto.

DEFINITIO XIV.

31. *Commenſurabilia* ſunt, quæ partem aliquotam communem habent, vel quorum unum eſt pars aliquota alterius. *Incommenſurabilia* ſunt, quorum nulla datur pars aliquota communis.

DEFINITIO XV.

32. *Quantitates homogeneæ* ſunt, quarum una aliquoties ſumta alteram ſuperare poteſt, ſeu quarum una ab altera vel ſemel, vel aliquoties ablata, tandem vel nihil, vel ſe minus relinquit. *Heterogeneæ* vero ſunt, quarum una aliquoties ſumta alteram ſuperare nequit.

DEFINITIO XVI.

33. *Numerus numerans* eſt, cujus unitas denotat ens in genere: *Numerus* vero *numeratus* eſt, cujus unitas denotat certam quandam entis ſpeciem, vel genus quoddam determinatum.

SCHOLION.

34. Ex. gr. *Si quis ſimpliciter dicat,* ſex *is non determinat, quænam ſint illa entia, quæ numerantur, adeoque utitur* numero numerante. *Contra ſi quis dixerit cum addito,* ſex globi aurei; *is ſpeciem entium deter-*

(e) Part. 3. pag. 139.

terminat, quæ numerat, adeoque utitur numero numerato. *Vocant nonnulli numerum numerantem* abstractum; *numeratum vero* concretum.

DEFINITIO XVII.

35. *Numeri inter se homogenei* sunt, qui ad eandem; *heterogenei*, qui ad diversas unitates referuntur.

SCHOLION.

36. *Hæc divisio numerum numeratum potissimum respicit. Omnis nempe numerus determinatam quandam unitatem supponit* (§. 10). *Determinatur ea per notionem, ad quam in numerando respicimus* (§. 5). *Ex. gr. ea globi proprietas est, qua ab aliis corporibus distinguitur, quod singula puncta superficiei a centro æqualiter distent. Quodsi igitur hanc unitatis notam constituas; singula corpora, quibus eadem convenit, unitatis naturam induunt, suntque unitates eædem, quatenus sub hac notione continentur* (§. cit.). *Quodsi vero globos porro distinguas, ex. gr. per materiam ex qua constant, & alios ut aureos, alios ut plumbeos spectes; quæ antea eædem erant unitates, nunc diversæ evadunt. Hinc tres globi aurei & sex globi aurei sunt numeri homogenei inter se; sed tres aurei & sex argentei sunt inter se heterogenei.*

DEFINITIO XVIII.

37. *Numerus integer* est, qui refertur ad unitatem tanquam totum ad partem.

DEFINITIO XIX.

38. *Numerus fractus* est, qui refertur ad unitatem tanquam pars ad totum. Dicitur is etiam *Fractio*, itemque *Minutia*.

DEFINITIO XX.

39. *Numerus rationalis* est, qui unitati commensurabilis. Vocatur etiam *effabilis*.

DEFINITIO XXI.

40. *Numerus rationalis integer* est, cujus pars aliquota est unitas.

DEFINITIO XXII.

41. *Numerus rationalis fractus* est, qui unitatis parti aliquotæ, aut aliquot partibus aliquotis æqualis est.

DEFINITIO XXIII.

42. *Numerus rationalis mixtus* est, qui constat ex integro & fracto, seu ex unitate & fracto.

DEFINITIO XXIV.

43. *Numerus irrationalis*, sive *surdus* est, qui unitati incommensurabilis. Vocatur etiam *ineffabilis*, item *geometricus*.

HYPOTHESIS IV.

44. *Si in numerando ad denarium pervenitur, initium numerandi repetatur, nisi quod denariorum numerus una exprimatur.*

COROLLARIUM.

45. Decem ergo nominibus opus est ad decem numeros rationales primos indigitandos, & præterea aliis, quibus decadum multitudo denotetur, & ita porro.

SCHOLION.

46. *Lex numerandi, quam in Hypothesi tradimus, ubivis (quantum constat) gentium recepta, & cum a prima ætate eidem adsueverimus, indispensabilis necessitatis videtur. Enimvero non modo* Erhardus WEIGELIUS *in Arithmetica tetractyca ostendit, fieri quoque posse, ut in numerando non ultra quaternarium progrediamur; sed & Illustris* LEIBNITIUS (*f*) *Arithmeticam binariam excogitavit, nonnisi duabus notis* 1 *&* 0 *utentem, ac numerorum proprietatibus investigandis aptam: cujus aliquod specimen dedit Cl.* DANGI-

(*f*) *Histoire de l'Academie Royale des Sciences*, An. 1703. p. 175. & seqq. Edit. Amstel.

DANGICOURT *circa progressiones arithmeticas* (g). *Nimirum quoniam Arithmetica dyadica duabus tantum notis utitur, leges progressionum numerorum dyadice expressorum facillime omnium deteguntur. Et* CAROLUS XII, *Rex Sueciæ, calculum sexagenarium excogitavit, referente* Emanuele SUEDENBORGIO (h), *novis characteribus & numeris, novisque denominationibus adinventis. Arithmetica autem decadica, qua vulgo utimur, denario digitorum numero procul dubio originem debet; digitis enim in computando utimur, quamdiu in computo nondum satis versati.*

DEFINITIO XXV.

47. Decem illa nomina, quibus in numerando utimur, sunt, *Unum*, *Duo*, *Tria*, *Quatuor*, *Quinque*, *Sex*, *Septem*, *Octo*, *Novem*, *Decem*. Iidem numeri generali *Unitatum* nomine insigniri solent, nec opus est ut definiantur. Dicuntur etiam *Digiti*. Ex decem unitatibus componitur una *Decas*. Duæ decades dicuntur *Viginti*; tres *Triginta*; quatuor *Quadraginta*; quinque *Quinquaginta*; sex *Sexaginta*; septem *Septuaginta*; octo *Octoginta*; novem *Nonaginta*. Ex decem decadibus componitur *Centenarius*; ex decem centenariis *Millenarius*; ex mille millenariis *Millio*; ex mille millenariis millionum *Billio*; ex mille millenariis billionum *Trillio* &c. Denarius, ejusque quævis multipla, dicentur *Articuli*.

SCHOLION.

48. *Vocibus millionum, billionum, trillionum, &c. utimur ad confusionem in numeris magnis evitandam, quorum distinctis notionibus formandis inserviunt.*

HYPOTHESIS V.

49. *Notæ numericæ constituantur novem sequentes*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. *Ut vero non solum unitates, sed & decades, centenarios, millenarios, &c. indigitare possimus, valor ipsis tribuatur localis; ita ut solitariæ, vel in loco dextimo positæ, unitates sive digitos, in secundo decades, in tertio centenarios, in quarto millenarios &c. denotent. Loca vacua repleantur cyphra* 0, *quæ scilicet sit* Nullitatis *nota.*

COROLLARIUM I.

50. Numerorum igitur partes hoc ordine se invicem excipiunt:

Unitates Decades Centenarii	Simplices.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum.
Unitates Decades Centenarii	Millionum.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum Millionum.
Unitates Decades Centenarii	Billionum.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum Billionum.
Unitates Decades Centenarii	Trillionum.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum Trillionum &c.

SCHOLION I.

51. *Characterum arithmeticorum electio arbitraria. Hinc apud varias gentes varii occurrunt; ut inter alios docent* Georgius HENISCHIUS *in libello* De numeratione multiplici, vetere & recenti, *atque* Guil. BEVEREGIUS *in* Arithmeticæ chronologicæ *libro primo*

(g) In *Miscellaneis Berolinens.* p. 336. & seqq.
(h) *Observat. miscellan.* part. 5. p. 1. & seqq.

mo integro. Non tamen omnes æque commodi. Seligendi adeo sunt, per quos numerus quantumvis magnus facillime exprimi & computus optime absolvi potest. Quod autem notæ nunc usitatæ reliquis præstent, has cum illis conferentes experiuntur. Dicuntur subinde cyphræ, quamvis usitatius sit ut hoc nomen soli notæ nullitatis imponatur; quem morem nos sequimur. Ab Arabibus *inventæ vulgo feruntur. Sed docuit celeberrimus* WALLISIUS (*i*), *quod* ALSEPADI *Arabs in Commentario ad* TOGRAI *poema* Lamiat 'o l Ajam *dictum, inventionis gloriam* Indis *tribuat. Idem refert* (*k*), *quod* Saraceni *eas in Hispaniam attulerint, & quod ex Hispania in Galliam pervenerint studio* GERBERTI, *monachi Floriacensis in Gallia, qui a variis dignitatibus Ecclesiasticis tandem ad Pontificatum maximum, nomine* SYLVESTRI II, *circa* A. C. *999 evectus, ex ipsis ejus Epistolis* A. *1636 Parisiis recusis probat.* Joannes Fridericus WEIDLERUS, *Mathematum apud Wittebergenses Professor clarissimus* (*l*), *ex MSC.* BOETHII *de Geometria, quod in Bibliotheca Academiæ Altorfinæ asservatur, & in quo Noster characteres numerorum arabicis similes expressos vidit, probare nititur, eos jam* BOETHIO *fuisse cognitos, quem* A. C. 524 *vitam finiisse constat.* WALLISIUS (*m*) *non negavit, in* BOETHII, BEDÆ, *aliorumque antiquiorum editionibus figuras istiusmodi comparere; sed id in vetustioribus MSC. contigisse negat. Quamobrem cum* WEIDLERUS *MSC., cujus authoritate nititur, seculo quarto non junius existimet; criticorum est statuere, num tanta illius antiquitas admittenda sit.*

SCHOLION II.

52. *Ex collatione diversarum figurarum numeralium discant velim, qui Artem inveniendi cordi habent, quantum momenti in eo situm sit, ut Ars characteristica perficiatur.*

(*i*) *Arithmet.* Oper. c. 9. f. 48. Vol. I. Oper. Math. (*k*) In Tract. *De Algebr.* c. 4. f. 11. & seqq. Vol. II. Oper. Mathem. (*l*) In Dissertatione *De characteribus numerorum vulgaribus, & eorum ætatibus,* An. 1727. publice ventilata, §. 8. & seqq. p. 17. & seqq. (*m*) In Tract. *De Algebr.* loc. cit.

COROLLARIUM II.

53. Quodsi notis numericis substituantur litteræ ad arbitrium electæ, iisque idem tribuatur valor, qui illis tribui solet (§. 49); numerum occulte scribere licet.

SCHOLION III.

54. Ex. gr. *Denotent litteræ infra scriptæ in secunda serie eosdem numeros, quos designant notæ superiores supra scriptæ in prima.*

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.
p. s. a. c. e. h. o. i. n. g.

erit 3748 = aoci. *Hoc artificio utuntur mercatores ad designanda mercium pretia in schedulis affixis.*

PROBLEMA I.

55. *Numerum scriptum enunciare; hoc est, cuilibet characteri valorem competentem assignare.*

RESOLUTIO.

1. Numerus propositus per commata dividatur in classes, tres notas unicuique assignando, initio a dextris facto.
2. Nota dextima classis tertiæ notetur lineola transversa apici adscribenda; dextima classis quintæ duabus; dextima septimæ tribus &c.
3. Comma solitarium per millenarios, lineola transversa una per milliones, duæ per billiones, tres per trilliones, &c. nota vero sinistima classis uniuscujusque per centenarios, media per decades, dextima per unitates enuncietur (§. 50). *Sic factum est, quod petebatur.*

Ex. gr. Numerus sequens.

2‴, 125, 473″, 613, 578′, 432, 597

ita enunciatur: Duæ trilliones, centum & viginti quinque millia billionum una cum quadrin-

quadringentis ſeptuaginta tribus billionibus, ſexcenta & tredecim millia millionum una cum quingentis ſeptuaginta octo millionibus, quadringenta & triginta duo millia, quingenta & nonaginta ſeptem.

SCHOLION.

56. *Quantum conveniens terminorum uſus in rebus diſtincte concipiendis, ſeu ex confuſione extricandi, vires intellectus humani extendat; abunde perſpicient oculatiores, ſi ad præſens Problema fuerint ſatis attenti.*

HYPOTHESIS VI.

57. *Quantitates aut numeros indeterminatos litteris Alphabeti minoribus a, b, c &c. vel etiam majoribus A, B, C &c. indigitamus.*

SCHOLION.

58. *Litteris majoribus uſus eſt* VIETA (n): *minores introduxit* HARIOTUS (o), *quem mox imitatus eſt* CARTESIUS (p), *& nunc ſequuntur plerumque omnes.*

HYPOTHESIS VII.

59. *Fractiones per duos numeros exprimuntur, quorum alter alteri interjecta lineola ſubſcribitur. Eorum inferior, ſeu* Denominator, *indicat unitatem, ſeu totum in partes diviſum; ſuperior vero ſeu* Numerator, *numerat partes in caſu propoſito datas.* Ex. gr. Duæ partes tertiæ unius lineæ ita ſcribuntur $\frac{2}{3}$: ubi denominator 3 indicat, lineam eſſe in tres partes æquales diviſam; numerator 2 vero duas iſtiuſmodi partes aſſignat.

SCHOLION.

60. *Neque vero mirentur tyrones, quod in numeris fractis numeratori denominator ſubſcribatur, qualis in integris non occurrit. Additur enim, ut appareat, quamnam partem aliquotam cum unitate communem habeat fractus* (§. 41).

(n) In variis ſcriptis Analyticis, quæ inter Opera ejus habentur. (o) In *Artis Analyticæ praxi.* (p) In *Geometria.*

DEFINITIO XXVI.

61. *Additio* eſt inventio alicujus numeri, ex duobus vel pluribus homogeneis datis, qui datis junctim ſumtis æqualis eſt. Numeri dati dicuntur *Summandi*; quæſitus autem *Summa*, vel *Aggregatum.*

COROLLARIUM.

62. Iterata ergo ejuſdem numeri additio eſt inventio numeri alteri cuidam aliquoties ſumto æqualis, & contra.

HYPOTHESIS VIII.

63. *Signum additionis eſt* +, *quod per* plus *efferri ſolet.* Ita 3 + 4 denotat Summam ex 3 atque 4, & pronunciatur, 3 plus 4.

DEFINITIO XXVII.

64. *Subtractio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus homogeneis datis, qui cum uno datorum alteri æqualis eſt. Numerus, qui ſubducitur, dicitur *Subtrahendus*; alter, a quo ſubtractio fit, *Minuendus*; qui denique invenitur, *Differentia*, a nonnullis *Reſiduum.*

HYPOTHESIS IX.

65. *Signum ſubtractionis eſt* —, *quod per* minus *efferri ſolet.* Ex. gr. 7 — 3 denotat Differentiam inter 3 & 7, pronunciatur, 7 minus 3.

DEFINITIO XXVIII.

66. *Multiplicatio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur datorum unus, quoties unitas in altero. Numeri dati dicuntur *Factores*, item *Efficientes*; quæſitus *Factum*, item *Productum.* In ſpecie, factorum alter, qui aliquoties ſumitur,

sumitur, vocatur *Multiplicandus*; alter vero, qui indicat quoties ille sumatur, *Multiplicator*.

COROLLARIUM.

67. Quoniam itaque in multiplicatione numerus invenitur alteri cuidam aliquoties sumto æqualis (§. 66), istiusmodi autem inventio non est nisi iterata additio (§. 62); multiplicatio est iterata ejusdem numeri additio.

HYPOTHESIS X.

68. *Signum multiplicationis est punctum unicum* (.) *inter factores duos medio loco positum*, *quod per* multiplicatum *effertur*. Ex. gr. 4. 3 denotat factum ex 4 in 3; item 7. 5. 9, factum, cujus factores sunt 7, 5 & 9. *Litteræ sine ullo signo junguntur*. Ex. gr. *ab* denotat factum ex *a* in *b*; *b c d*, factum cujus factores *b*, *c* & *d*.

DEFINITIO XXIX.

69. *Divisio* est inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur unitas quoties datorum unus in altero. Numerus, qui dividi debet, *Dividendus*; alter, per quem fit divisio, *Divisor*; qui denique indicat, quoties divisor in dividendo contineatur, *Quotus* dicitur.

SCHOLION.

70. *In multiplicatione & divisione opus non est, ut numeri dati sint homogenei, quemadmodum in additione & subtractione requirebatur* (§. 61, 64). *Cum enim in additione, ex duobus vel pluribus numeris componatur unus, tanquam ex partibus totum* (§. 61, 9); *omnes omnino summandi ad eandem unitatem referri* (§. 10), *consequenter homogenei inter se esse debent* (§. 35). *Quoniam vero porro liquet summam, quæ fit ex numeris aggregandis, ad eandem cum ipsis unitatem referri; consequenter iisdem homogeneam esse* (§. *cit.*); *in subtractione vero numerus minuendus respondet summæ, subtrahendus & residuus aggregandis seu summandis* (§. 61, 64): *ulterius patet, in subtractione etiam minuendum, subtrahendum, & residuum numeros inter se homogeneos esse debere. In multiplicatione contra, multiplicator ad unitatem exprimit rationem, quam habet factum ad multiplicandum, sicut in divisione, divisor ad unitatem rationem dividendi ad quotum; adeoque opus non est, ut multiplicator multiplicando & facto, divisor dividendo & quoto sit homogeneus. Quodsi divisor consideretur tanquam pars dividendi; ex dictis constat divisorem esse dividendo homogeneum: sed tum quotus, qui indicat quoties pars ista ex suo toto auferri potest, nec dividendo, nec divisori homogeneus. Singula suo loco clarius patebunt.*

HYPOTHESIS XI.

71. *Signum divisionis sunt duo puncta* (:), *quæ per* divisum *efferri solent*. Ex. gr. 8 : 4 denotat quotum ex divisione 8 per 4 emergentem. Similiter *a* : *b* est quotus ex divisione *a* per *b* prodiens.

DEFINITIO XXX.

72. *Numerus par* est, qui bifariam sive per 2, dividi potest; ut 4, 12, 16.

DEFINITIO XXXI.

73. *Numerus impar* est, qui a pari unitate differt; ut 3 differt unitate a 2, item a 4.

DEFINITIO XXXII.

74. Numerus A *metiri*, vel juxta alios *numerare* dicitur numerum B, si eum ita dividit, ut quotus sit numerus integer sine fractione, vel si fuerit pars ejus aliquota. Ita 2 metitur 8 per 4.

DEFI-

DEFINITIO XXXIII.

75. *Numerus primus in se* est, quem sola unitas metitur, vel numerat, ut 5, 7, 11.

DEFINITIO XXXIV.

76. *Numerus compositus* est, quem præter unitatem alius numerus metitur. Ita 4 metitur 8 per 2, item 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO XXXV.

77. *Mensura numeri* est numerus, qui ipsum metitur. Ita 2 & 4 sunt mensuræ numeri 8. *Mensura maxima numeri* est numerus maximus, qui ipsum metitur. Ita 4 est mensura maxima numeri 8.

DEFINITIO XXXVI.

78. *Mensura communis duorum pluriumve numerorum* est numerus, qui singulos sigillatim metitur. Ita 3 est communis mensura numerorum 12 & 24. *Maxima* dicitur, si fuerit numerus maximus qui omnes metitur. Ita 12 est communis mensura maxima numerorum 12 & 24; 3 vero numerorum 9 & 12.

DEFINITIO XXXVII.

79. *Numeri primi inter se* sunt, qui nullam communem mensuram habent, præter unitatem. Ita 12 & 19 sunt numeri primi inter se.

DEFINITIO XXXVIII.

80. *Numeri compositi inter se* sunt, qui, præter unitatem, communem mensuram aliam habent. Ita 12 & 15 sunt compositi inter se.

AXIOMA I.

81. *Idem est æquale sibimet ipsi.*

SCHOLION.

82. *Hujus axiomatis amplissimus est in Analysi usus.*

AXIOMA II.

83. *Quantitates homogeneæ aut æquales sunt, aut inæquales* (§. 15).

THEOREMA I.

84. *Totum est majus qualibet sua parte.*

DEMONSTRATIO.

Cujus pars alteri toti æqualis est; id ipsum altero majus est (§. 20). Sed quælibet pars totius parti totius, hoc est, sibi ipsi æqualis est (§ 81). Ergo totum qualibet sua parte majus est.

SCHOLION.

85. *En exemplum analyseos perfectæ! Continetur enim demonstratio syllogismo, cujus altera præmissa est definitio, altera vero propositio identica. Id vero analyseos perfectæ indicium est* (§. 45, de Meth.) *Ne tyrones Logicæ, qui propositiones oblique universales ignorant, nec regulæ Logicorum de tribus syllogismi terminis vim atque efficaciam percipiunt, circa formam argumentandi hæreant, ad lineas demonstrationem applicare libet.* Sit itaque linea AB totum, linea AC ejus pars; demonstrandum erit, lineam AB esse majorem linea AC: id quod fit sequentem in modum. Cujus lineæ pars alteri lineæ toti æqualis est, illa linea altera major est (§. 20). Sed lineæ AB pars [nempe AC] alteri lineæ AC toti [nempe sibimet ipsi] æqualis est. Ergo linea AB linea AC major [nempe totum AB parte AC majus] est. *Quod erat demonstrandum.*

THEOREMA II.

86. *Totum est æquale omnibus suis partibus simul sumtis.*

DEMONSTRATIO.

Cum idem sit æquale sibimet ipsi (§. 81); quod idem est cum partibus totius simul sumtis, id iisdem æquale est.

Sed totum idem est cum omnibus partibus suis simul sumtis (§. 9): ergo iisdem æquale est. *Q. e. d.*

THEOREMA III.

87. *Quæ æqualia sunt eidem tertio, vel æqualibus æqualia, ea sunt æqualia inter se.*

DEMONSTRATIO.

1. Sit $A = C$ & $B = C$; dico esse $A = B$. Quoniam enim $B = C$, *per hypothesim*, B salva quantitate substitui potest ipsi C (§. 15). Substituatur adeo B ipsi C in casu priore, ubi $A = C$: habebimus $A = B$. *Quod erat primum.*

2. Si jam porro sit $A = B$ & præterea $C = A$, $D = B$; dico esse $C = D$. Quoniam enim $A = B$ & $C = A$, *per hypothesim*, erit $B = C$, *per cas.* 1. Quare cum porro sit $D = B$, *per hypothesim*, erit quoque $C = D$, *per cas.* 1. *Quod erat alterum.*

THEOREMA IV.

88. *Si æqualibus (A & B) æqualia (C & D) addas; aggregata ($A + C$ & $B + D$) sunt æqualia.*

DEMONSTRATIO.

$A + C = A + C$ (§. 81). Sed quoniam $C = D$, *per hypothesim*, poterit D substitui pro C (§. 15): quo facto, habemus $A + C = A + D$. Porro $B + D = B + D$ (§. 81). Sed $A = B$, *per hypothesim*. Ergo A substitui potest pro B (§. 15): quo facto, habemus $B + D = A + D$. Quare $B + D = A + C$ (§. 87). *Q. e. d.*

THEOREMA V.

89. *Quod uno æqualium majus vel minus est, etiam altero æqualium majus vel minus est.*

DEMONSTRATIO.

1. Sit $A = B$ & $C > A$; dico esse $C > B$. Quoniam enim $C > A$, *per hypothesim*, A parti ipsius C æquale est (§. 20), quæ dicatur P. Porro cum sit $A = B$, *per hypothesim*, erit etiam $P = B$ (§. 87). Ergo $C > B$ (§. 20). *Quod erat unum.*

2. Sit $A = B$, & $C < A$, dico esse $C < B$. Quia $C < A$, *per hypothesim*, parti hujus æquale est (§. 20), cujus complementum ad totum dicatur P. Cum adeo sit $P + C = A$ (§. 86) & $A = B$, *per hypothesim*; erit quoque $P + C = B$ (§. 87). Est itaque C parti ipsius B æqualis (§. 9); consequenter $C < B$ (§. 20). *Quod erat alterum.*

THEOREMA VI.

90. *Si majori (B) & minori (A) idem (C), vel æqualia addas; aggregatum prius ($B + C$) majus est, posterius vero ($A + C$) minus. Quodsi majori (B) majus (C), & minori (A) minus (D) addas; aggregatum prius ($B + C$) majus est, posterius ($A + D$) minus.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A > B$, *per hypothesim*, parti hujus æquale est (§. 20). Componitur ergo B ex A & parte alia (§. 9), quæ dicatur P, estque adeo $B = P + A$ (§. 86). Quare cum etiam sit $B + C = P + A + C$ (§. 88); erit $A + C$ pars ipsius $P + A + C$ (§. 9) & hinc $P + A + C > A + C$ (§. 84), consequenter $B + C > A + C$ (§. 89). *Quod erat unum.*

Quoniam $B > A$, *per hypothesim*, erit

B+C

$B+C > A+C$, *per demonstrata*. Similiter quia $C > D$, *per hypothesim*, erit $A+C > A+D$, *per demonstrata*. Ergo cum $A+D$ sit pars ipsius $A+C$ (*§.* 20); erit multo magis $B+C > A+D$ (§. 84). *Quod erat alterum.*

THEOREMA VII.

91. *Si æqualia (A & B) ab æqualibus (C & D) subtrahas; quæ relinquuntur (C–A & D–B) æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

$C-A=C-A$ (§. 81). Sed quoniam $A=B$, *per hypothesim*, salva quantitate B pro A substitui potest (§. 15). Quod si ergo substituatur, habebimus $C-A = C-B$. Similiter $D-B=D-B$ (§. 81). Sed quia $C=D$, *per hypothesim*, salva quantitate C pro D substitui potest (§. 15). Quod si ergo substituatur, habebimus $D-B=C-B$. Quamobrem $C-A=D-B$ (§. 87).

THEOREMA VIII.

92. *Si a majore (A) & minore (B) idem (C), vel æqualia subtrahas; residuum prius (A–C) majus est, posterius (B–C) minus.*

DEMONSTRATIO.

Quia $B < A$, parti hujus æquale est (§. 20). Componitur ergo A ex B & parte alia (§. 9), quæ dicatur P. Itaque $A=P+B$ (§. 86), consequenter $A-C=P+B-C$ (§. 91). Sed $B-C$ est pars ipsius $P+B-C$ (§. 9), consequenter $P+B-C > B-C$ (*§.* 84). Ergo & $A-C > B-C$ (§. 89). *Q. e. d.*

THEOREMA IX.

93. *Si æqualia (A & B) per æqualia (m & n) multiplices; facta (m A & n B) æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Quia $A=B$, *per hypothesim*, erit etiam $A+A=B+B$, seu in genere $A+A+A+A$ &c. $=B+B+B+B$ &c. (§. 88). Jam cum multiplicatio sit iterata ejusdem numeri additio (§. 67), si m & n fuerint multiplicatores, erit $A+A+A$ &c. $= mA$ (§. 67, 68). & $B+B+B+B = nB$ (§. §. *cit.*). Quare cum in eo casu, ubi $A+A+A+A$ &c. $=B+B+B+B$ &c. sit $m=n$; erit etiam $mA=nB$ (§. 87). *Q. e. d.*

THEOREMA X.

94. *Si æqualia (A & B) per æqualia (C & D) dividas; quoti (A: C & B:D) æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

$A:C=A:C$ (§. 81). Sed quia $A=B$, *per hypothesim*, salva quantitate B pro A substitui potest (§. 15). & sic $A:C=B:C$. Ob eandem rationem $B:D=B:C$. Quare $A:C=B:D$ (§. 87). *Q. e. d.*

SCHOLION.

95. *Non dubito fore multos, quibus ridiculum videbitur aut minimum superfluum talia demonstrari, quorum casus singulares, in numeris præsertim rationalibus, per se evidentes videntur. Ego vero has demonstrationes maximi facio, tum quia prima & secunda (id quod supra §. 85 annotavimus)* Analyseos perfectæ; *tum quia reliquæ* Calculi universalis *ideam animo ingenerant, in talium substitutione consistentis; quæ relationes datas non mutant. Illa cavetur, ne laxius in demonstrando versemur (id quod hactenus fecerunt plerique omnes, qui extra Mathesin demonstrationes mathematicæ certitudinis dare conati sunt:) hic, si tandem in apricum produceretur, maximum foret intellectus humani subsidium.*

CAPUT II.

De speciebus Arithmeticæ in numeris integris.

PROBLEMA II.

96. *Numeros quotcunque datos addere.*

RESOLUTIO.

1. Numeri homogenei sub homogeneis scribantur, hoc est, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis, &c. respondeant.
2. Sub iis ducatur linea recta, ne aggregatum cum aggregandis confundatur.
3. Sigillatim addantur unitates & summa earum ipsis subscribatur.
4. Quodsi in ea decades reperiantur, eas decadibus numerorum datorum addi oportet: decadum vero summa sub decadibus collocanda.
5. Hac operatione per reliquas numerorum datorum series continuata, habebitur summa quæsita.

Ex. gr. Si numeri A, B, C addendi; ita procedendum: 3 & 4 sunt 7, additis 8, prodeunt 15. Collocentur 5 sub unitatibus, & 1 decas connumeretur decadibus datis. Itaque 1 (sc. *decas*) & 6 (*decades*) sunt 7 (*decades*): additis 2, prodeunt 9; additis porro 7, habentur 16 (*decades*). Collocentur 6 sub decadibus datis, & reliquæ 10, hoc est, 1 centenarius annumeretur centenariis datis. Sunt itaque 1 & 5 (*centenarii*) 6 &, additis adhuc 5, prodeunt 11 (*centenarii*). Collocetur 1 sub centenariis datis, 10 centenarii reliqui, hoc est, 1 millenarius addatur 3 (*millenariis*) datis, summaque 4 sub iis scribatur. Ita prodit summa quæsita 4165.

3578	A
524	B
63	C
4165	

DEMONSTRATIO.

Cum unitates, decades, centenarii, millenarii &c. numerorum datorum sunt partes eorumdem (§. 50); idem sunt cum omnibus numeris datis simul sumtis (§. 9). Liquet vero ex operatione, numerum inventum compositum esse ex omnibus unitatibus, decanibus, centenariis, millenariis &c. numerorum datorum. Compositus ergo est ex omnibus numeris datis simul sumtis, consequenter ipsis æqualis (§. 86); adeoque summa eorundem est (§. 61). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

97. *Unitates numerorum singulæ tamdiu per digitos repræsentantur & eorum ope additio absolvitur, donec memoriæ infigatur, quinam numerus prodeat, si unitates quotlibet cuicunque numero addas, ex. gr. quod* $3+2=5$, $9+5=14$ *&c. Hoc modo talia natura docet.*

COROLLARIUM I.

98. Quoniam seriei finisteriori tot unitates accedunt, quot decades ex summatione in proxime dexteriore emergunt (§. 96); additio minore tædio absolvetur, si ex qualibet numerorum serie tot decades deleantur, quot ex iis colligi possunt, residuum infra lineam scribatur, & numerus decadum abjectarum seriei proxime finisteriori connumeretur.

Ex. gr.

Ex. gr. Si numeri addendi fuerint A,B,C, ita procedendum : cum 7 & *3*

8763	A	fint 10; refiduus numerus 5 fcri-
5247	B	batur infra lineam & 1 connu-
2125	C	meretur decadibus. Dic itaque
———		*6* & 4 funt 10 ; 2 & 1 funt 3.
16135		Scribe *3* infra lineam & 1 repone in locum centenariorum.

Quoniam vero 7 & 2 funt 9, porro 9 & 1 funt 10; adde 1 feriei millenariorum & refiduum 1 fcribe in loco centenariorum. Dic itaque 8 & 2 funt 10 millenarii, feu 1 decas millenariorum, 5 & 1 vero funt 6. Scribe *6* in loco millenariorum & 1 in loco decadum millenariorum.

Scholion II.

99. *Modus hic addendi eft maxime naturalis* (§. 49) : *nec abfimili artificio numeri heterogenei adduntur. Ex ferie nimirum fpeciei minoris toties colligitur valor fpeciei proxime majoris, quoties fieri poteft, & pro unoquoque unitas reponitur in ferie proxime majore. Ex. gr. fint expenfæ :*

Januarii	45 thal.	16 grofs.	9 num.
Februarii	60	12	3
Martii	72	13	6
Aprilis	180	19	9
Maji	55	15	6
erit fumma	425	5	9

Cum enim 12 *nummi conficiant groffum, in ferie nummorum additis 6 & 6 , itemque 3 & 9, valor groffi bis colligitur & relinquuntur 9. Scribuntur itaque 9 infra lineam in loco nummorum & 2 adduntur feriei grofforum. Similiter quoniam thalerus 24 groffis conftat, in ferie grofforum ut ante valor thaleri ter colligitur, relictis 5. Quare denuo 5 in loco grofforum reponuntur & 3 thaleris connumerantur. Reliqua ut in Corollario aut Problemate peraguntur.*

Corollarium II.

100. Si omnes numeri dati unitatum inftar confiderentur, evidens eft inter fummandum tot novenarios omitti, q[illegible] unitates ex fumma feriei dexterioris in finifteriorem transferuntur. Sic, in exemplo Problematis, loco *quindecim* fub unitatibus fcribimus 5 , fub decadibus 1 , quorum numerorum inftar unitatum confideratorum fumma eft *6*. Unus itaque novenarius omittitur, cum ex loco unitatum in locum decadum una rejicitur decas. Similiter fi fumma unitatum *viginti feptem* ; fub unitatibus collocamus 7 , fub decadibus 2. Duo igitur novenarii omittuntur, cum 2 decades ex loco monadum in locum decadum rejiciuntur. Hinc folvitur

Problema III.

101. *Examinare additionem ; hoc eft, explorare , utrum numerus inventus fit æqualis omnibus datis fimul fumtis, nec ne.*

Resolutio.

1. Notentur a latere numeri, qui inter addendum ex ferie qualibet dexteriore in proxime finifteriorem jiciuntur, & operatione abfoluta addantur, ut numerus novenariorum inter fummandum omifforum innotefcat (§. 100).
2. Abjiciatur præterea ex fumma inventa novenarius, quoties fieri poteft, abjectorumque novenariorum numerus addatur numero inter fummandum omifforum : quæ fumma una cum numero refiduo , fi quis fuerit, probe notetur.
3. Tandem ex numeris fummandis, qui omnes tanquam unitates fpectantur, novenarius abjiciatur, quo-

ties fieri poteſt, & numerus novenariorum abjectorum una cum numero reſiduo, ſi quis fuerit, denuo notetur.

Quodſi enim uterque fuerit æqualis utrique ante reperto; numerus inventus æquatur omnibus datis ſimul ſumtis (§. *91*), conſequenter additio rite peracta (§. *61*). *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. in exemplo Problematis 2, inter ſummandum 3 novenarii omittuntur, & ex ſumma reperta unus adhuc deleri poteſt: quo facto, relinquuntur 7. Sed ſi ex numeris ſummandis 4 novenarii abjiciantur, 7 ſimiliter relinquuntur. Quare additio rite peracta.

SCHOLION.

102. *Diſcrimen inter Demonſtrationem & Examen haud obſcurum eſt. Illa evincit per regulas præſcriptas inveniri debere numerum quæſitum; hoc docet regulas ad caſum ſingularem rite fuiſſe applicatas. Unde apparet Examinis utilitas, fruſtra obnitente* RAMO (*a*), *qui Demonſtrationem cum Examine confundit. Vulgo præcipiunt, ut tam ex ſumma quam aggregandis, notis ſingulis inſtar digitorum conſideratis, abjiciatur novenarius, & ex reſidui identitate operationis bonitatem colligunt. Sed cum Examen tum fallere poſſit, quando error novenarium vel ejus multiplum adæquat; ideo aliquantiſper idem immutavi, ut hunc quoque excluderet errorem. Ceterum non inutilia ſunt Examina, etſi non omnes errores detegant, modo iiſdem ſeſe non ſubducant, qui frequentius admittuntur.*

PROBLEMA IV.

103. *Numerum minorem e majore ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Numerus minor ea lege majori ſubſcribatur, ut homogenei homogeneis reſpondeant, quemadmodum in additione præcepimus (§. *96*).
2. Sub numerus hiſce ducatur linea recta.
3. Subtrahantur ſigillatim unitates ab unitatibus, decades a decadibus, centenarii a centenariis &c. & reſidua ſingula loco conveniente infra lineam ſcribantur, nempe reſiduum unitatum ſub unitatibus, decadum ſub decadibus, &c.
4. Quod ſi nota major e minore veniat ſubtrahenda, ex ſiniſteriore loco in dexteriorem transferatur unitas, quæ (§. 50) hic 10 valebit, ut ſubtractio fieri queat. Numerus vero unitate mulctatus puncto notetur, ne ipſum mulctatum eſſe obliviſcamur.
5. Si in loco ſiniſteriore cyphram reperiri contingat, unitas a numero proxime ſequente mutuetur, puncto propterea notando, ut ipſum unitate minutum eſſe conſtet. Unitas vero illa in locum dexteriorem translata decadis valorem tuebitur (§. 50). Quamobrem ubi plures cyphræ ſeſe inſequuntur, omnes hac ratione in novenarios mutentur, & numerus minor, a quo ſubtractio fieri debet, decade augeatur.

Juxta has regulas numerum quemcunque ex alio quocunque majore ſubtrahere licet.

Ex. gr. Si ex 9 8. 0. 0. 4. 0. 3 4. 5 9
ſubtrahas 4 7 4 3 8 6 5 2 6 3

Differentia eſt 5 0 5 6 5 3 8 1 9 6

Demtis enim 3 ex 9, relinquuntur 6 unitates

(*a*) In *Schol. Mathem.* lib. 4. pag. 114.

tates infra lineam ſcribendæ. Decades 6 ex 5 auferri nequeunt: a centenariis itaque 4 auferatur unus, & ejus loco decem decades decadibus jungantur. Ablatis itaque 6 ex iis, remanent 9 decades infra lineam loco conveniente ponendæ. Centenarii 2 ex 3 ſubducti relinquunt 1. Millenarii 5 ex 3 auferri nequeunt: a centenariis itaque millenariorum 4 auferatur unus, qui in locum vacuum delatus cyphram in decem decades millenariorum vertet. Inde ſi 1 decadem in locum millenariorum transferas, habebis hic 13 millenarios, ibi 9 decades millenariorum. Subductis jam 5 ex 13, reſidui fiunt millenarii 8. Demtis porro 6 millenariorum decadibus ex 9, relinquuntur 3. Jam ſi 8 ex 3 ſubtrahere debes, ab 8 ſiniſterioribus mutuetur unitas, cujus beneficio duæ cyphræ in 9 & 3 in 13 degenerabunt, ut tandem ſubtractio facillime abſolvatur.

DEMONSTRATIO.

Numerus inventus prodit, ſi unitates, decades, centenarios &c. numeri minoris, ex unitatibus, decadibus, centenariis &c. majoris ſubducas, *vi operationis*, hoc eſt, ſi ſingulas partes numeri minoris a ſingulis partibus majoris ſubtrahas (§. 50). Sed ſingulæ partes numeri minoris ſimul ſumtæ ſiunt numero minori, & partes ſingulæ majoris ſimul ſumtæ ſunt majori æquales (§. 86). Ergo idem relinqui debet numerus, ſi totum numerum minorem e toto majore ſubtrahas (§. 91). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

104. *Si numeri heterogenei fuerint a ſe invicem ſubtrahendi; unitas mutuo petita non* 10, *ſed tot unitates valet, quot unitates ſpeciei minoris conſtituunt valorem unitatis ſpeciei majoris.*

Ex. gr.	45. thal.	16. gr.	6. num.
	27	23	9
	17 thal.	16 gr.	9 num.

Nimirum cum 9 nummi ex 6 ſubtrahi nequeant, ex 16 groſſis unus converti[...] nummos, ut loco 6 habeantur 18. Subductis adeo 9 nummis ex 18, relinquuntur 9. Similiter cum 23 groſſi ex reſiduis 15 auferri nequeant, ex 45 thaleris unus ablatus in 24 groſſos convertitur: unde ſi ſubtrahantur 23, reſiduus eſt 1 groſſus 15 addendus, ut reſidui loco ponantur 16 groſſi. Denique 27 thaleri a 44 ablati relinquunt 17.

SCHOLION II.

105. *Quodſi numerus major e minore ſubtrahi jubeatur, evidens eſt id fieri non po[...]. Subtrahitur itaque minor e majore, & defectus notatur ſigno —. Ex. gr. Si quis 8 thaleros ſolvere debet, atque 3 nonniſi poſſidet: tribus ſolutis, 5 adhuc debet, qui per — 5 indigitantur.*

PROBLEMA V.

106. *Examinare ſubtractionem.*

RESOLUTIO.

Reſiduo addatur ſubtrahendus (§. 96). Quodſi enim ſumma fuerit æqualis minuendo; ſubtractio rite peracta (§. 64).

Ex. gr.		
	980040359	Minuendus.
	474386526 3	Subtrahend.
	505653819 6	Differentia.
	980040345 9	

ALITER.

Quoniam in Subtractione reſiduum cum ſubtrahendo æquatur minuendo (§. 64); ſi minuendus ſumatur pro aggregato, reſiduum cum ſubtrahendo pro aggregandis (§. 61); examen per novenarium ſuccedet ut in additione (§. 101).

PROBLEMA VI.

107. *Examinare additionem per ſubtractionem.*

1. Deſcribantur in continua ſerie multi-

pla

pla ſeptenarii centenario inferiora, nempe 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, continua ſeptenarii additione invenienda. Eſt enim $7+7=14$, $14+7=21$, &c.

2. In exemplo ad examinandum propoſito, veluti

	5 6 6
8259	8 2 5 9
	5 2 6
2687	2 6 8 7
	3 4 2 5
10946	1 0 9 4 6

ſumantur in aggregato binæ notæ ſiniſtimæ 10 & cum multiplis ſeptenarii conferantur.

3. Multiplum proxime inferius, aut ipſe ſeptenarius, veluti in noſtro caſu, ab iſtis notis ſubtrahatur & reſiduum 3 iiſdem ſuperſcribatur.

4. Juncta huic reſiduo 3 nota proxime ſequente 9, numerus inde reſultans 39 conferatur ut ante cum ſeptenarii multiplis; &, proxime minori 35 inde ſubducto, reſiduum 4 ſupra ſcribatur.

5. Hæc operatio continuetur, donec reſiduum ultimum 5 ſuper nota dextima obtineatur.

6. Singulæ aggregandorum ſeries 2687 & 8259 eodem modo tractentur.

7. Reſidua ſuper notis dextimis 6 & 6 addantur, & a ſumma 12 ſeptenarius, vel ejus multiplum proxime inferius abjiciatur.

Quodſi reſiduum fuerit idem cum reſiduo ſuper nota dextima aggregati, velut in noſtro exemplo 5; operatio rite peracta.

DEMONSTRATIO.

Ad operationem attento manifeſtum eſt, tum ex aggregato, tum ex aggregandis abjici omnia multipla ſeptupli, ex. gr. in noſtro caſu millenariorum, centenariorum, decadum, unitatum. Jam cum aggregatum ſit aggregandis æquale (§. 61), omnia quoque iſta multipla junctim ſumta utrobique æqualia eſſe debent (§. 86, 87). Cum adeo ab æqualibus æqualia auferantur; reſidua omnino æqualia ſint neceſſe eſt (§. 91). Quare ſi contingat, inæqualia reſidua fieri; id indicio erit, ſi examen rite inſtitutum, errorem in operatione admiſſum fuiſſe. *Q. e. d.*

ALITER.

1. Colligantur ſigillatim in unam ſummam ſingulæ ſeries verticales, quibus conſtant numeri ſummandi, initio facto a ſiniſtra & progrediendo verſus dextram, & quidem deſcendendo (§. 96).

2. Summæ partiales ſubtrahantur a notis ſummæ, quæ ſingulis ſeriebus reſpondent (§. 103).

Quodſi in loco dextimo, qui eſt unitatum, relinquatur cyphra, additio rite peracta.

Ex. gr. Sit exemplum additionis

A B C D
3 5 7 9
8 4 6 2
5 3 7 6
1 7 4 1 7
1 2 1 0

Collectis in unam ſummam notis in ſerie A, 16 ſubducatur ex 17, & reſidua 1 ſcribatur

hatur sub 7. Similiter summa notarum in serie B 12 auferatur ex 14, residuo 2 sub 4 scripto. Summa notarum in serie C 20 tollatur ex 21 & residuum 1 ponatur sub 1. Denique si summa seriei D 17 ex 17 subtrahatur, relinquitur 0: quod indicio est, numerum 17417 esse summam quæsitam.

DEMONSTRATIO.

Ex operatione patet, a millenariis summæ subtrahi omnes millenarios summandorum, & a centenariis, decadibus, unitatibus summæ omnes centenarios, decades, unitates summandorum. Quodsi ergo operatione absoluta nihil relinquitur, summa tot præcise millenarios, centenarios, decades, unitates continet, quot numeri summandi simul sumti continent, atque adeo summa numeris summandis simul sumtis æqualis est (§. 87); consequenter additio rite peracta (*§. 61*).

SCHOLION.

108. *Examen primum adhuc procedere, si loco septenarii numerus alius sumatur ipsa Demonstratio insinuat. Solent etiam, examinis loco, additionem iterare, sed diversa ratione, ita ut una vice ascendendo, altera vero descendendo summatio perficiatur; facto tamen in utraque operatione initio a dextra & progrediendo versus sinistram.*

PROBLEMA VII.

109. *Abacum* Pythagoricum, *hoc est*, *Tabulam construere, in qua facta ex singulis digitis in singulos repræsentantur.*

RESOLUTIO.

1. Latera quadrati alicujus singula in 9 partes æquales dividantur & per lineas ipsi parallelas in areolas quadratas area ejus resolvatur.
2. In serie horizontali summa & laterali sinistima scribantur novem notæ numericæ, seu singuli digiti.
3. Addantur 2 & 2; aggregatum 4 scribatur infra 2. Addantur porro 2 & 4; aggregatum 6 collocetur sub 4. Addantur 2 & 6; aggregatum 8 ponatur sub 6; & ita porro.
4. Quodsi hæc additio per reliquos digitos eadem lege continuetur, Abacus *Pythagoricus* construetur. *Q. e. f.*

ABACUS PYTHAGORICUS.								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

SCHOLION.

110. *Abacum* Pythagoricum *memoriæ mandare tenetur multiplicationem ac divisionem expedite absoluturus. Quamdiu vero memoriæ infixus non est, ad manus esse debet, quoties multiplicas aut dividis.*

PROBLEMA VIII.

111. *Numerum quendam datum per alium datum multiplicare.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicator scribatur sub multiplicando, ut in additione (§. 96).
2. Ducatur sub iis linea recta.
3. Infra hanc ex Abaco *Pythagorico* scribantur singula producta ex sin-

gulis multiplicandi notis in unitates multiplicatoris; similiter ex illis in reliquas hujus notas; ea quidem lege, ut decades cujuslibet producti annumerentur producto proxime sinisteriori, & productum ex multiplicando in decades multiplicatoris in loco decadum, productum ex multiplicando in centenarios multiplicatoris in loco centenariorum &c. scribere incipiamus. Producta partialia addantur (§. 96). Dico aggregatum esse factum quæsitum.

Ex. gr. Sint factores 38476 & 35. Multiplicatore sub multiplicando scripto, duc 5 in 6, cumque factum, vi Abaci *Pythagorici*, sit 30, scribe 0 sub 5 & 3 decades annumera facto ex 5 in 7, quod est 35. Additis itaque 3 ad 35, prodeunt 38. Pone 8 juxta 0 versus sinistram & facto ex 5 in 4, nempe 20, adde 3, ut prodeant 23 (scilicet centenarii). Scribe itaque 3 in loco centenariorum & 2 millenarios annumera facto 40 ex 5 in 8, ut habeatur summa 42 millenariorum. Scribe 2 in loco millenariorum; 4 vero decades millenariorum adde facto 15 ex 5 in 3, & summam 19 in loco conveniente repone. Ita habetur factum ex multiplicando in dexteram multiplicantis notam. Quodsi eadem ratione quæratur factum ex multiplicando in sinistram multiplicatoris notam 30 & producta partialia addantur; prodibit tandem factum ex 35 in 38476, nempe 1346660.

```
  38476
     35
-------
 192380
 115428
-------
1346660
```

DEMONSTRATIO.

Vi operationis & Abaci *Pythagorici*, primus numerus intra lineas scriptus singulas multiplicandi notas, hoc est, singulas ejusdem partes (§. 50), adeoque multiplicandum ipsum (§. 9), toties continet, quoties prima multiplicatoris nota unitatem. Eodem modo patet, quod numerus secundus intra lineas scriptus multiplicandum toties contineat, quoties nota secunda multiplicantis unitatem, &c. Sed cum numeri intra lineas scripti adduntur, summa iisdem æqualis est (§. 61), adeoque multiplicandum toties continet, quoties singulæ multiplicatoris notæ, hoc est, partes (§. 50), consequenter totus multiplicator (§. 9) unitatem continet. Est igitur factum ex multiplicando in multiplicantem (§. 66). *Q. e. d.*

SCHOLION.

112. *Si factoribus* cyphræ *adhæreant, producto invento eædem adjunguntur, ut ex sequentibus exemplis manifestum.*

```
  3578        4760
    30        2000
------     -------
107340     9520000
```

PROBLEMA IX.

113. *Lamellas* Neperianas *parare, quarum ope multiplicationem ac divisionem facilius absolvere licet, quam per Abacum* Pythagoricum.

RESOLUTIO.

1. Ex orichalco, ligno, aut charta compacta, parentur lamellæ oblongæ in novem quadratula divisæ, quæ per diagonales denuo in duo triangula singula resolvantur. *Fig. 2.*

2. In illis quadratulis ea lege scribatur Tabula *Pythagorica*, ut notæ solitariæ, aut dextræ, triangulum dextrum, notæ autem sinistræ sinistrum cedat. *Sic factum est, quod petebatur.*

SCHO-

SCHOLION.

114. *Has lamellas sub initium seculi superioris invenit* Joannes NEPERUS, *Baro* Merchistonii, *Scotus, & peculiari libello descripsit, cui* Rhabdologiæ *nomen imposuit.*

PROBLEMA X.

115. *Multiplicare numerum datum per datum alium, lamellarum* Neperianarum *ope.*

RESOLUTIO.

1. Lamellas ita dispone, ut in fronte exhibeant multiplicandum.
2. Eis ad sinistram junge lamellam unitatum.
3. In hac quære dextimam multiplicatoris notam, &
4. Ipsi respondentes numeros in quadratulis reliquarum lamellarum ita exscribe, ut in unam summam colligantur numeri in eodem rhombo obvii.
5. Eodem modo exscribe numeros reliquis multiplicatoris notis respondentes & decenter infra factores (§. 111) scribe.
6. Tandem ut ante (§. 111) facta hæc partialia in unam summam collige. *Sic f e. q. p.*

Fig. 3. Ex. gr. Sit multiplicandus 5978, multiplicator 937; ex triangulo dextimo, quod dextimæ multiplicatoris notæ 7 respondet, exscribe 6 & pone infra lineam. Mox in rhombo versus sinistram proxime sequente 9 & 5 adde & summæ 14 notam dextram scribe juxta 6, sed 1 connumera 3 & 4 in rhombo ulteriore obviis. Aggrega-

```
   5987
    937
-------
  41846
 17934
53802
-------
5601386
```

tum 8 junge jam inventis 46. Similiter in rhombo ultimo adde 6 & 5. Summ[illegible] notam dextram 1 pone, ut ante, infra lineam; sinistram vero itidem 1 adde notæ 3 in sinistro triangulo deprehensæ. Summam 4 si 1846 a sinistris jungas; habebis factum ex 7 in 5978. Eodem modo reperies facta ex 5978 in reliquas multiplicatoris notas 3 & 9.

PROBLEMA XI.

116. *Numerum quemlibet per alium quemcunque, sine Abaci* Pythagorici *subsidio, multiplicare.*

RESOLUTIO.

Omne artificium huc redit, ut ex simplo, duplo, & decuplo, per additionem, subtractionem, & mediationem, singula multipla inveniantur. Nimirum numerus quilibet sibimetipsi additus producit sui *duplum.* Addatur huic simplum, summa est numeri dati *triplum.* Duplum addatur sibimetipsi, aggregatum est numeri dati *quadruplum.* Medietur decuplum, hoc [illegible], ipse numerus datus cyphra auctus (§. 112), prodibit *quintuplum.* Quintuplo addatur simplum, vel duplum, habebitur *sextuplum*, vel *septuplum.* Ex decuplo subtrahatur duplum, vel simplum, residuum erit *octuplum*, vel *noncuplum.* Sine Abaci itaque *Pythagorici* subsidio multiplicaturo familiaris sit sequens a *Jobo* LUDOLFFO, in Academia Erfordiensi nuper Mathematum Professore, in Arithmeticam primum introducta

NOMENCLATURA.

[illegible]plum.	1 *Simplum.*
2. Duplum.	1 + 1 *Simplum & ſimplum.*
3. Triplum.	2 + 1 *Duplum & ſimplum.*
4. Quadruplum.	2 + 2 *Dupli duplum.*
5. Quintuplum.	$\frac{10}{2}$ *Decupli dimidium.*
6. Sextuplum.	$\frac{10}{2}$ + 1 *Decupli dimidium & ſimplum.*
7. Septuplum.	$\frac{10}{2}$ + 2 *Decupli dimidium & duplum.*
8. Octuplum.	10 − 2 *Decuplum ſine duplo.*
9. Noncuplum.	10 − 1 *Decuplum ſine ſimplo.*

Ex. gr. 3894.

Simplum	Duplum	Triplum
3894	3894 3894 7788	3894 7788 11682
Quadruplum	**Quintuplum**	**Sextuplum**
7788 7788 15576	38940 19470	3894 19470 23364
Sextuplum	**Octuplum**	**Noncuplum**
7788 19470 27258	38940 7788 31152	38940 3894 35046

γ. Si multiplicator ex pluribus notis conſtet, infra lineam ſcribatur multiplicandi duplum & decupli dimidium, ut beneficio *Nomenclaturæ* exinde multipla ejus erui poſſint, quæ deſiderantur. Sub ducta igitur altera linea ſcribantur more conſueto (§. 111) multiplicandi multipla.

37896 A 6874	Ex. gr. Sit multiplicans 6874, multiplicandus A 37896. Infra lineam ſcri-
75792 B 189480 C	batur B ipſius A duplum & porro C decupli ipſius A dimidium. Reperies er-
151584 D 265272 E 303168 F 227376 G	go 1°. D ipſius A quadruplum, ſumendo duplum ipſius B; 2°. E ſeptuplum ipſius A, addendo B & C; 3°. F octuplum ipſius A,
260497104	vel addendo C, B & A, vel

B ſubducendo a decuplo ipſius A, hoc eſt ex A cyphra aucto; 4°. denique G, addendo C & A.

Si multiplicator ex pluribus notis conſtet, ſæpius ex productis jam inventis, per additionem vel ſubtractionem, inveniri poſſunt quæ adhuc deſiderantur; nec tum *Nomenclaturæ* propoſitæ ſtricte inhærendum, ita ut non opus ſit infra lineam demum ſcribi duplum multiplicandi & decupli ejuſdem dimidium.

743) 895765482	Ex. gr. ſit multiplicans 743. Factum facillime
1791530964 3583061928 6270358374	invenietur, ſi multiplicando ſubſcribatur 1.° duplum, 2° dupli duplum, 3° ſumma ex
665553753126	ſimplo, duplo & dupli duplo, & tria hæc mul-

tipla multiplicando addantur.

Similiter ſi multiplicans fuerit 789, ſub multiplicando ſcribitur decuplum ſine ſimplo, quod eſt noncuplum. Ex eo ſi denuo auferatur ſimplum, relinquetur octuplum. Quod ſi & ab hoc ſimplum ſubducas, reſiduum erit ſeptuplum.

789) 895765482
8061889338
7166123856
6270358374
706758965298

PRO-

PROBLEMA XII.

117. *Numerum datum per alium minorem dividere.*

RESOLUTIO.

Caſus I. Si diviſor unica fuerit nota:

1. Scribatur is ſub nota dividendi ſiniſtima, aut, ſi ea minor fuerit ſub proxime ſequente, ac ope Abaci *Pythagorici* inveſtigetur, quoties in nota vel notis ſupraſcriptis contineatur. Numerus, qui hoc indicat, ponatur dexteram verſus poſt lunulam loco quoti.
2. Quotus ducatur in diviſorem & productum ex nota vel notis ſupraſcriptis dividendi ſubtrahatur, & his deletis, ſi quod fuerit reſiduum, ſupraſcribatur.
3. Diviſor ad notam ſubſequentem verſus dexteram promoveatur, & ope Abaci *Pythagorici* denuo inveſtigetur, quoties is in notis ſupraſcriptis contineatur. Reliqua peragantur ut ante.
4. Quodſi hæc operatio per ſingulas dividendi notas continuetur, quotus invenietur. *Q. e. f.*

Ex. gr. Sit dividendus 7856, diviſor 3. Ponantur 3 ſub 7, & per Abacum *Pythagoricum* innoteſcit 3 in 7 bis contineri. Scribantur ergo 2 poſt lunulam loco quoti & factum ex 2 in 3, hoc eſt 6, ſubtrahatur ex 7 lineola tranſverſa delendis, reſidua unitas ſupraſcribatur. Promoveatur diviſor 3 ſub 8, cumque, vi Abaci *Pythagorici*, 3 in 18 ſexies contineatur, ſcribantur 6 loco quoti & factum 18 ex 3 in 6 ex 18 ſubducatur: quo in caſu nihil relinquitur. Quodſi eadem ratione pergatur, quotus tandem integer prodit 2618 & binarius 2 remanet: id quod indicio eſt, numerum propoſitum in tres partes æquales exacte dividi non poſſe.

```
1  22
7856 (2618 2/3
3333
```

DEMONSTRATIO.

Ex ipſa operatione liquet, numerum inventum indicare, quoties diviſor in millenariis, centenariis, decadibus, unitatibus dividendi, hoc eſt, in ſingulis ejus partibus (§. 50), adeoque in toto dividendo (§. 9) contineatur, conſequenter unitatem toties continet, quoties dividendus diviſorem. Eſt igitur quotus (§. 69). *Q. e. d.*

Caſus II. Si diviſor ex notis pluribus conſtet.

1. Siniſtima ejus nota ſcribatur ſub nota ſiniſtima dividendi & reliquæ dexteriores ſub proxime ſequentibus verſus dexteram.
2. Ope Abaci *Pythagorici* inveſtigetur, quoties prima diviſoris nota in prima dividendi contineatur.
3. Numerus inventus ducatur in diviſorem integrum & diſpiciatur, utrum factum ex numeris ſupraſcriptis ſubtrahi poſſit, nec ne.
4. Si ſubtractio fieri queat, ſcribatur is loco quoti poſt lunulam & ſubtractio actu peragatur. Numeri, ex quibus ſubtractio fit, lineola tranſverſa deleantur, & qui reſidui fuerint, ſupraſcribantur. Quodſi vero ſubtractio non ſuccedat, loco quoti ſumatur numerus unitate vel aliquot unitatibus minor, donec factum

tum ex eo in diviſorem ad notas ...idendi quam proxime accedat & ex iis auferri queat.

5. Diviſor loco uno verſus dexteram promoveatur & reliqua ut ante peragantur.

6. Hæc operatio continuetur, donec diviſor ulterius promoveri nequeat. *Sic f. e. q. p.*

Ex. gr. Sit dividendus 7856, diviſor 32. Scribantur 32 ſub 78 & inquiratur, quoties 3 in 7 contineantur. Cum itaque bis in ea contineantur; ducantur 2 in 32 &, quia factum 64 ex 78 ſubtrahi poteſt, 2 ſcribantur poſt lunulam &, ſubtractione peracta reſiduiſque 14 ſupraſcriptis, diviſor loco uno promoveatur. Quo facto inveſtigetur quoties 3 in 14 contineantur, & factum ex 4 in 32, hoc eſt 128, ſubducatur ex 145, reſiduo 17 ſupraſcripto & 4 in loco quoti poſt lunulam repoſitis. Promoveatur diviſor denuo loco uno & quæratur, quoties 3 in 17 contineantur. Numerus 5, qui ...c indicat, jungatur quoto jam invento, & factum ex eo in diviſorem 32, nempe 160 ſubtrahatur ex 176, reſiduo 16 ut ante ſupraſcripto. Dico numerum inventum $246\frac{16}{32}$ eſſe quotum quæſitum.

```
 1
 11
 147
7856 (245 16/32
3222
 33
```

Si diviſor ex pluribus præſertim conſtet notis, præſtat multipla quoti ſubtrahenda ſub notis dividendi, ex quibus ſubtractio fieri debet, immediate ſcribi & ſub ſubtrahendo reſiduum, cui continuandæ diviſionis gratia jungitur nota dividendi ſequens, donec nulla ſuperfuerit, adeoque diviſio abſoluta.

Ex.gr. Sit dividendus 385797, diviſor 8672, quem tibi ſub loco quoti notabis. Jam cum 8 in 38 quater contineatur, ſcribe diviſoris 8672 quadruplum ſub notis dividendi 38579, & reſiduum 3891 ſub eodem, juncta eidem nota ſequente 7, ut diviſio continuari poſſit. Quoniam itaque diviſor in notis 38917 denuo 4 continetur, quadruplum diviſoris ut ante ſub iiſdem ponitur & ex ipſis aufertur. Erit $44\frac{4229}{8672}$ quotus.

```
385797 (44
        8672
34688
-----
 38917
 34688
 -----
  4229
```

D E M O N S T R A T I O.

Eadem fere eſt demonſtratio, quæ in caſu primo, hoc unice notato, quod, cum ex Abaco *Pythagorico* conſtare nequeat quoties diviſor integer in notis dividendi ſupraſcriptis contineatur, interea ſupponatur toties illum in his contineri, quoties ſiniſtima diviſoris nota continetur in ſiniſtima aut duabus ſiniſtimis dividendi notis. Licet enim hæc ſuppoſitio ſubinde fallat, in errorem tamen inducere nequit, quia examen mox inſtituitur, cum factum ex diviſore in quotum juxta eam inventum cum dividendo comparatur, & pſeudoquotus unitate tamdiu minuitur, donec in verum abeat.

S C H O L I O N.

118. *Equidem hæc methodus tædioſa videtur, quod raro verus quotus prima ſtatim vice per eam eliciatur. Enimvero experientia comprobatur, examen, quod inſtituendum, cogitationum celeritati parere in exercitatis.*

P R O B L E M A XIII.

119. *Diviſionem per lamellas* Neperianas *abſolvere.*

R...

RESOLUTIO.

1. Lamellas ita diſpone, ut in fronte referant diviſorem.
2. Eis ad ſiniſtram junge lamellam unitatum.
3. Sub diviſore deſcende, donec occurrant notæ dividendi, in quibus quoties contineatur, diſquiritur, aut numerus ipſis proxime minor ex dividendo ſubtrahendus.
4. Numerus in lamella unitatum reſpondens ſcribatur loco quoti.
5. Quodſi eadem ratione partes quoti reliquas inveſtiges, diviſio tota abſolvetur.

Fig. 3. Ex. gr. Sit dividendus 5601386, diviſor 5978. Quoniam quæritur, quoties in 56013 contineantur 5978; ſub diviſore deſcendendo in infima ſerie reperitur numerus 53802 quam proxime ad 56013 accedens, quorum ille ex hoc ſubtrahitur, & in lamella unitatum reſpondens 9 loco quoti ſcribitur. Reſiduo 2211 jungitur nota dividendi ſequens 8, cumque ut ante per lamellas reperiatur huic convenire quam proxime numerus 17934, ipſi in lamella unitatum reſpondens 3 ſcribatur loco quoti, & ſubtractio ut ante peragatur. Eodem modo pars tertia quoti 7 reperitur.

```
5601386(937
53802..
-------
 22118.
 17934.
-------
  41846
  41846
-------
  00000
```

PROBLEMA XIV.

120. *Sine Abaci* Pythagorici *ſubſidio, numerum datum dividere per alium datum.*

RESOLUTIO.

1. Dividendo ad dexteram more conſueto jungatur lunula & infra locum quoti ducatur linea recta.
2. Infra hanc lineam ſcribatur diviſor, ejus duplum & decupli dimidium ſive quintuplum: quibus numeris a dextris 1, 2, & 5 adſcribi oportet. Inde nimirum quodcunque diviſoris multiplum (§. 116) elicitur.
3. Tot dividendi notæ, quot diviſor habuerit, comparentur cum illius multiplis modo inventis: ita enim quotus innoteſcet.
4. Is more ſolito poſt lunulam ſcribatur, ipſi vero reſpondens multiplum diviſoris ſub notis dividendi, quas modo diximus, atque ex his ſubducatur.
5. Reſiduo adjungatur nota dividendi proxime ſequens: reliqua ut ante peragantur.

Quodſi hæc operatio continuetur, ſine Abaci *Pythagorici* ſubſidio quotus eruetur. *Q. e. f.*

Ex. gr. Sit dividendus 385724615, diviſor 175. Scribantur numeri dati cum diviſoris multiplis, ut hic factum eſſe apparet. Cum multiplis diviſoris compara 385 & quoniam illius duplum 350 quam proxime convenit; ſcribe 2 loco quoti & 350 ſubduc ex 385. Reſiduo 35 junge notam dividen-

```
385724615 (2204140
350        -------
---        175 | 1
 357       350 | 2
 350       875 | 5
 ---
   724
   700
   ---
   2.46
    175
    ---
     711
     700
     ---
     115
```

videndi proxime ſequentem 7 & 357 denuo compara cum diviſoris multiplis. Quoniam vero denuo duplum 350 quam proxime accedit, idem ex 357 ſubtrahe & quoti loco rurſus ſcribe 2. Reſiduo 7 junge notam ſubſequentem 2. Quia dividendus 72 eſt diviſore 175 minor, quotus erit 0. Junge numero 72 notam dividendi 4, & cum 724 inter duplum 350 atque quintuplum 875 cadant, ipſique dupli duplum, hoc eſt quadruplum diviſoris, 700, quam proxime conveniat, quotus erit hoc in caſu 4. Quodſi hac ratione operationem continuare libuerit, reperietur quotus integer 2204140 & reſiduum erit 115.

SCHOLION.

121. *Hæc dividendi methodus & meditandi difficultatem & errandi facilitatem tollit, cui obnoxia eſt altera in Problemate duodecimo expoſita. Quamvis igitur eam ſerio commendem, nolim tamen ut Abacus* Pythagoricus *prorſus rejiciatur, quoniam ſubinde caſus occurrunt, in quibus eodem minus commode caremus. Fractionum reductio ad minores terminos inter alia aſſertum noſtrum confirmabit.*

PROBLEMA XV.

122. *Examinare multiplicationem.*

RESOLUTIO.

Dividatur factum per multiplicandum, quotus erit multiplicans; aut factum dividatur per multiplicantem, quotus erit multiplicandus, ſi multiplicatio rite fuerit peracta.

```
38476) 1346660 (35
        115428
       --------
        192380
        192380
       --------
        000000
```

Ex. gr. Si multiplicandus 38476, multiplicator 35; factum eſt 1346660 (§. 111). Si vero 1346660 per 38476 dividas, quotus eſt 35.

ALITER.

1. Abjiciatur ex multiplicando 857 novenarius, quoties fieri poteſt.
2. Reſiduum 2 ducatur in multiplicatorem 4, ſi novenario minor fuerit, & ex facto, ubi novenarium ſuperaverit, abjiciatur itidem novenarius, quoties fieri poteſt, noteturque reſiduum.
3. Ex facto 3428 exterminetur etiam novenarius, quoties datur.

Quodſi reſiduum 8 idem fuerit cum facto anteriore, aut ejus reſiduo; operatio rite peracta.

4. Si multiplicator fuerit novenario major, reſiduum in multiplicando ducatur non in ipſum multiplicatorem, ſed in id, quod abjectis novenariis relinquitur.

Ex. gr. Si multiplicandus 857, multiplicator 65; factum erit 55705. Abjectis novenariis, in facto relinquitur 4, in multiplicando 2, in multiplicatore itidem 2: quorum reſiduorum factum cum ſit 4, id indicio eſt multiplicationem rite fuiſſe peractam.

```
  857
   65
 ----
 4285
5142
 ----
55705
```

DEMONSTRATIO.

Cum multiplicatio ſit iterata ejuſdem numeri additio (§. 67), & factum quidem ſummæ, multiplicandus toties iteratus quot multiplicator unitates habet numeris aggregandis reſpondeat (§. 61, 66); ex facto & multiplicando iterato abjiciendus eſt novenarius, quoties fieri poteſt (§. 101). Quoniam itaque novenario ex multiplicando abjecto quoties datur, reſiduum toties relinquitur quot multiplicator

unitates habet; evidens eſt, iſtud in multiplicatorem duci atque ex facto novenarium denuo exterminari debere quoties licet, ut habeatur reſiduum numeris aggregandis reſpondens. *Quod erat unum.*

Quoniam vero perinde eſt, ſive reſiduum in multiplicatorem, ſive multiplicator in reſiduum ducatur, quemadmodum inferius (§. 207) independenter ab his demonſtrabitur; per primum patet, etiam ex multiplicatore, ſi novenario major fuerit, novenarium toties exterminari debere quoties fieri poteſt, & reſiduum hoc ducendum eſſe in reſiduum ex multiplicando, ut habeatur reſiduum numeris aggregandis reſpondens. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

123. *Demonſtratio majorem evidentiam nanciſcitur, ubi ad exemplum applicatur: id quod etiam de quacunque alia intelligendum.*

PROBLEMA XVI.

124. *Examinare diviſionem.*

RESOLUTIO.

1. Quotus ducatur in diviſorem, aut diviſor in quotum.
2. Facto addatur, ſi quod a diviſione fuerit reſiduum.

Quodſi hac ratione prodeat dividendus, diviſio legitime peracta. (§. 212).

Ex. gr. Si 7856 dividas per 32, quotus eſt 245, reſiduum 16. Duc 245 in 32 & facto 7840 adde 16; habebis dividendum 7856. Conſtat igitur diviſionem legitime fuiſſe peractam.

```
 245
  32
----
 490
735
----
7840
  16
----
7856
```

ALITER.

Cum, vi examinis prioris, dividendus ſit factum ex diviſore in quotum; examen quoque inſtituetur, abjiciendo ex dividendo, itidemque ex diviſore & quoto, novenarium quoties datur, atque reſiduum in diviſore multiplicando per reſiduum in quoto, & facto, quod inde emergit, addendo reſiduum ex diviſione.

Ex. gr. In exemplo antecedente exterminato in dividendo 7856 novenario, relinquitur 8. Idem ſi tentetur in diviſore 32 & quoto 245; ibi 5, hic 2 reſiduum erit. Quodſi ulterius facto 10 ex 5 in 2 addatur reſiduum ex diviſione 16, & ex aggregato 26 tentetur more communi abjectio novenarii; habebitur, ut in dividendo, reſiduum 8.

SCHOLION GENERALE.

125. *Supereſt ut videamus, juxta quasnam regulas intellectus in hactenus expoſitis operationibus arithmeticis dirigatur. Meditaturi regulas duplicis generis offendemus, quarum aliæ imaginationem, aliæ intellectum purum dirigunt. Priores in numerorum ſcriptione, linearum ac lunulæ ductu, notarum in diviſione a ſubtractione peracta deletione, &c. continentur. Scriptio numerorum varias ſuppeditat regulas, quibus vires imaginationis extenduntur. Numeros enim quoſvis, quantumvis magnos & una varios, menti præſentes exhibet quamdiu libuerit, qui alias diſparent cum vix eam ſubierint: quo ipſo cogitationes a meditationibus alienæ arcentur, domeſticæ autem quantolibet temporis intervallo in promta qualibet numerorum datorum deſignentur. Hinc diſcimus*

1. Intellectum uti debere in meditando ſubſidiis imaginationis, objecto meditationis convenientibus, ex ejus adeo indole in dato quolibet caſu particulari derivandis.

2. Quæ intellectus meditatur, ea, quantum fieri potest, imaginationi præsentia sistenda esse: quod observasse in tyronibus quoque instituendis plurimum prodest, cum ad disciplinas animum appellentes operationibus intellectus puri parum sint adsueti, operationes vero imaginationis a primis (quod Græci aiunt) unguiculis familiarissimæ ipsis existant.

Ipsa vero hæc numerorum scriptio præstat, ut intellectus tum singula sigillatim meditari, tum singula cum singulis, prout commodum visum fuerit, conferre possit. Vide imprimis [illegible] 1, *Probl.* 2, (§. 98), *Probl.* 4, (§.103), *Probl.* 11, (§.116), *& Probl.* 14, (§. 120.) *Utrumque difficultates partim ex rerum meditandarum serie nimis longa enasci solitas, partim ordini, quo cogitationes promoventur, parum convenienti debitas tollit. Unde liquet*

3. Ad minuendam in meditando difficultatem, singula distincte imaginationi repræsentanda esse; ita ut objectum meditationis repræsentetur secundum omnes relationes datas, & tota totius repræsentatio ex partialibus singularum relationum componatur. Hanc regulam in *Arte characteristica* perficienda magni momenti esse, inferius in Analysi patebit. Eadem secundæ juncta tyronum institutioni egregia suppeditat adjumenta. Inservit etiam confusæ cognitioni eorum, quæ sigillatim distincte cognita fuerunt: cujus usum Demonstrationes geometricæ inferius concipiendæ loquentur.

Linearum & lunulæ ductus, notarum deletio, punctum notis unitate mulctatis adjectum impediunt, ne eadem pro diversis aut diversa pro iisdem habentes in errorem incidamus: quo ipso docemur

4. Quæ sunt eadem in intellectu, ut eadem & repræsentari debere imaginationi; quæ vero diversa sunt in intellectu, ut diversa quoque repræsentanda esse. Sunt eadem in intellectu, quæ sub notione communi continentur. Hæc vero regula errori potissimum discavet.

Progrediendum nunc ad alterum regularum genus, quibus intellectus purus juvatur. Numeri dati distinguuntur in varias classes, nempe in unitates, decades, centenarios, &c. & in hisce classibus singuli numeri singulis characteribus discernuntur. Satisfit igitur huic regulæ generali:

1. Quæstio proposita in tot partes resolvenda, quot res diversæ naturæ in eadem involvuntur.

Additio & subtractio in singulis numerorum classibus sigillatim peragitur: nec minus, in multiplicatione ac divisione, facta & quoti particularia quæruntur, ut inde componatur numerus quæsitus. Discimus adeo

2. Singula quæ in quæstione proposita involvuntur, esse sigillatim expendenda, &, quæ inde deducta sunt, inter se conferenda.

In operationibus arithmeticis, vel ad notiones numerorum respicimus, vel eorum proprietates, ex.gr. ex Abaco Pythagorico, *in memoriam nobis revocamus. Unde patet*

3. Dum singula in se considerantur, vel notiones eorundem evolvendas, vel proprietates & relationes ad alias alio tempore cognitas in memoriam revocandas esse.

Si divisor ex pluribus notis constet, ad facilitandum laborem assumitur integrum divisorem in omnibus dividendi notis suprascriptis toties contineri, quoties nota divisoris prima in nota prima dividendi continetur. Sed cum hypothesis fallere queat, utrum quotus inventus sit verus nec ne, probatur. In his vero continetur regula generalis hujusmodi:

4. Si datorum numerus de re eadem sit ingens, ex.gr. si in Astronomia multa admodum phænomena motus siderum dentur, qualis

qualis esse debeat rei natura, ex. gr. structura systematis mundani, ut quibusdam phænomenis satisfiat, primo investigandum; dein ulterius disquirendum, utrum phænomenis quoque reliquis satisfiat nec ne. Ita si contingat, nos in hypothesin falsam incidere, eam facilius emendare, quam ex simultanea omnium consideratione, prima statim vice, veram elicere licebit. Hæc regula in scientia naturali multum habet usum, non minus in inveniendo, quam in aliorum hypothesibus dijudicandis.

Licet abunde constet per demonstrationes, regularum, quibus utimur, ope numerum quæsitum inveniri; examina tamen non negantur, quibus convincimur nos in regularum applicatione non aberrasse. Docemur ergo

5. Consultum esse, ut dispiciamus, an veritates a priori deductæ experientiæ respondeant.

Plura non addimus, cum hæc speciminis tantum loco in medium proferantur.

CAPUT III.

De Ratione ac Proportione Quantitatum.

DEFINITIO XXXIX.

126. R*Atio* est ea homogeneorum relatio, quæ quantitatem unius determinat ex quantitate alterius, sine tertio homogeneo assumto. Homogenea, quæ comparantur, dicuntur *Termini Rationis* & in specie *Antecedens* vocatur, qui ad alterum refertur; *Consequens* vero, ad quem alter refertur.

SCHOLION I.

127. EUCLIDES *Rationem definit per* habitudinem magnitudinum ejusdem generis secundum quantitatem. *Sed hæc definitio incompleta: dantur enim & aliæ magnitudinum relationes, quæ sunt constantes, nec tamen in rationum numero continentur. Talis est sinus recti ad sinum complementi in Trigonometria. Completam reddidit Vir summus* LEIBNITIUS. *Equidem &* HOBBESIUS *Definitionis* Euclideæ *correctionem tentavit* (a); *sed infeliciter. Cum enim Rationem definiat per* magnitudinis ad magnitudinem relationem; *definitio ejus non modo id vitii habet, quod* Euclidea, *quod scilicet relationis speciem non determinet; verum etiam in eo peccat, quod speciem magnitudinum non exprimat, quæ rationem inter se habere possunt.*

SCHOLION II.

128. *Ceterum hic de ratione quantitatum in genere, non tantum de ratione numerorum agimus, quia hæc doctrina non modo ad commensurabilia, sed etiam ad incommensurabilia, hoc est, ad quantitatum quodvis genus applicari debet.*

COROLLARIUM I.

129. Cum in fractionibus relatio numeratoris ad denominatorem sine tertio homogeneo assumto intelligatur (§. 59); erit ea ratio.

COROLLARIUM II.

130. Si duæ quantitates inter se comparantur sine tertia homogenea assumta, aut una alteri æqualis, aut inæqualis deprehenditur (§. 83). Ratio itaque vel æqualitatis, vel inæqualitatis.

COROLLARIUM III.

131. Si termini rationis fuerint inæquales,

(a) In Tractatu *De principiis & ratiocinatione Geometrarum*, c. XI. p. 22.

les, vel minor refertur ad majorem, vel major ad minorem (§. 21); minor nempe ad majorem tanquam pars ad totum, major vero ad minorem tanquam totum ad partem (§. 20): Ratio itaque determinat, quoties minus in majore contineatur, vel quoties majus minus contineat, hoc est, quantæ majoris parti minus æquetur: id quod divisio prodit (§. 69).

COROLLARIUM IV.

132. Ceterum quia ratio per se intelligibilis (§. 126), iis discernendis inservire potest, quæ compræsentia non sunt (§. 27).

DEFINITIO XL.

133. *Ratio majoris inæqualitatis* est, quam habet majus ad minus, ex. gr. 6 ad 3. *Ratio* vero minoris *inæqualitatis* est, quam habet minus ad majus, ex. gr. 3 ad 6.

DEFINITIO XLI.

134. *Ratio rationalis* dicitur, quæ est ut unitas, vel numerus rationalis, ad numerum rationalem, ex. gr. ut 3 ad 4. *Irrationalis* vocatur, quæ numeris rationalibus exprimi nequit.

SCHOLION.

135. *Sint duæ quantitates A & B, sitque A < B. Si A & B toties subtrahas, quoties fieri poterit, ex. gr. quinquies, relinquetur vel nihil, vel aliquid. In priori ergo casu A erit ad B ut* 1 *ad* 5, *hoc est, A in B quinquies continetur, seu* $A = \frac{1}{5} B$. *Ratio ergo est rationalis. In casu posteriori aut dabitur pars aliqua, quæ aliquoties ex A, ex. gr. ter, itidemque ex B, ex. gr. septies subducta nihil relinquit; aut nulla dabitur istiusmodi pars. Si prius: erit A ad B ut 3 ad 7, seu* $A = \frac{3}{7} B$, *adeoque ratio denuo rationalis. Si posterius: ratio ipsius A ad B numeris exprimi nequit rationalibus, hoc est, dici nequit, quanta pars ipsius B sit A. Suo autem loco ostendetur, quomodo pars illa aliquota communis inveniri possit, nec minus demonstrabitur, dari quantitates quæ rationem irrationalem habent. Hinc simul lumen affunditur Definitioni Rationis, dum ostendimus, quomodo ex comparatione duorum homogeneorum, sine tertio homogeneo assumto, ratio intelligi possit. Nimirum aut minus majoris, aut pars, quæ utrique inest, utriusque mensura constituitur, vel, quod perinde est, minus, aut prædicta pars, pro unitate assumitur, & in casu priore majus, in posteriore majus & minus per numerot exprimuntur: quos in ratione irrationali irrationales esse suo loco constabit.*

DEFINITIO XLII.

136. *Exponentem rationis* dico quotum, qui ex divisione antecedentis per consequentem emergit. Ex. gr. rationis 3 ad 2 exponens est $1\frac{1}{2}$; sed rationis 2 ad 3 est $\frac{2}{3}$. Vocatur is etiam *Denominator*, nec non *Nomen rationis*.

SCHOLION.

137. *In Geometria demonstrabitur, quod exponens rationis datæ exprimi possit linea, licet in numeris, vel rationalibus, vel irrationalibus, eundem exhibere non valeamus.*

COROLLARIUM I.

138. Si consequens est unitas, antecedens ipse exponens rationis; ex. gr. rationis 4 ad 1 exponens est 4.

COROLLARIUM II.

139. Numerus ergo quilibet integer exprimit rationem multi ad unum, seu multitudinis ad unitatem.

COROLLARIUM III.

140. Exponens rationis est ad unitatem ut antecedens ad consequentem (§. 69).

COROL-

COROLLARIUM IV.

141. Rationes per exponentes discernuntur (§. 131, 136), atque adeo, si antecedens A, consequens B, ratio ipsius A ad B commode exprimitur per A : B (§. 71).

DEFINITIO XLIII.

142. Si terminus minor est pars aliquota majoris, *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex*; *Ratio* vero minoris inæqualitatis *submultiplex*. Speciatim in casu primo *dupla*, si exponens 2; *tripla*, si 3, &c. in altero *subdupla*, si exponens $\frac{1}{2}$; *subtripla*, si $\frac{1}{3}$, &c. Ex. gr. 6 ad 2 habet rationem triplam, continet enim senarius binarium ter; contra 2 ad 6 est in ratione subtripla, continet enim binarius tertiam senarii partem.

DEFINITIO XLIV.

143. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partem ipsius aliquotam; *Ratio* majoris inæqualitatis dicitur *superparticularis*, *Ratio* minoris inæqualitatis *subsuperparticularis*. Speciatim in casu primo vocatur *sesquialtera*, si exponens $1\frac{1}{2}$; *sesquitertia*, si $1\frac{1}{3}$, &c. in altero *subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{3}$; *subsesquitertia*, si $\frac{3}{4}$, &c. Ex. gr. 3 ad 2 est in ratione sesquialtera; 2 ad 3 in subsesquialtera.

DEFINITIO XLV.

144. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partes ipsius aliquot aliquotas; *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *superpartiens*, *Ratio* minoris inæqualitatis *subsuperpartiens*. Speciatim in casu priore dicitur *superbipartiens tertias*, si exponens $1\frac{2}{3}$; *supertripartiens quartas*, si $1\frac{3}{4}$; *superquadripartiens septimas*, si $1\frac{4}{7}$, &c. in posteriore *subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{3}{5}$; *subsupertripartiens quartas*, si $\frac{4}{7}$; *subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{11}$, &c. Ex. gr. 5 ad 3 est ratio superbipartiens tertias; sed 3 ad 5 ratio subsuperbipartiens tertias.

DEFINITIO XLVI.

145. Si terminus major minorem aliquoties continet & insuper partem ipsius aliquotam; *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex superparticularis*; *Ratio* minoris inæqualitatis *submultiplex subsuperparticularis*. Speciatim in casu primo dicitur *dupla sesquialtera*, si exponens $2\frac{1}{2}$; *tripla sesquiquarta*, si $3\frac{1}{4}$, &c. in altero *subdupla subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{5}$; *subtripla subsesquiquarta*, si $\frac{4}{13}$, &c. Ex. gr. 16 ad 5 habet rationem triplam sesquiquintam; 4 ad 9 rationem subduplam subsesquiquartam.

DEFINITIO XLVII.

146. Denique si terminus major minorem aliquoties continet ac insuper aliquot partes ipsius aliquotas, *Ratio* majoris inæqualitatis dicitur *multiplex superpartiens*; *Ratio* minoris inæqualitatis *submultiplex subsuperpartiens*. Speciatim in casu primo vocatur *dupla superbipartiens tertias*, si exponens $2\frac{2}{3}$; *tripla superquadripartiens septimas*, si $3\frac{4}{7}$, &c. in altero *subdupla subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{3}{8}$; *subtripla subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{25}$, &c. Ex. gr. ratio 25 ad 7 est tripla superquadripartiens septimas; 3 ad 8 subdupla subsuperbipartiens tertias.

SCHOLION I.

En genera & species rationum rationalium, quarum quidem nomina apud Recentiores rarius occurrunt (eorum enim loco terminis rationum minimis utuntur, ex. gr. pro dupla 2 : 1, pro sesquialtera 3 : 3;) non tamen ab eo ignorari possunt, qui scripta Mathematicorum evolvit. Ceterum jam CLAVIUS annotavit (a) exponentes rationis majoris inæqualitatis & re, & nomine; rationes vero minoris inæqualitatis re tantum, non autem nomine denominare. Facile vero in his nomen invenies, si denominatorem exponentis dividas per numeratorem. Ex. gr. si exponens fuerit $\frac{5}{8}$; erit 8 : 5 = $1\frac{3}{5}$. Unde innotescit, rationem vocari subsupertripartientem quintas. De nominibus rationum irrationalium nemo hactenus cogitavit.

SCHOLION II.

148. *Nomina rationum rationalium facile memoriæ mandaturus, idemque perspecturus speciebus recensitis plures non dari, considerare debet, quotum ex divisione termini majoris per minorem emergentem, seu exponentem rationum majoris inæqualitatis, vel esse 1°. Numerum integrum, vel mixtum; hunc vero vel 2°. ex unitate & fractione, cujus numerator est unitas, vel 3°. ex unitate & fractione, cujus numerator est numerus, vel 4°. ex numero & fractione, cujus numerator est unitas, vel denique 5°. ex numero & fractione, cujus numerator numerus est, constare. Habemus ergo in casu primo* rationes multiplices & submultiplices, *in secundo* superparticulares & subsuperparticulares, *in tertio* superpartientes & subsuperpartientes, *in quarto* multiplices superparticulares & submultiplices subsuperparticulares, *in quinto denique* multiplices superpartientes & submultiplices subsuperpartientes. *Rationes minoris inæqualitatis per proprios quoque exponentes determinari possunt. Aut enim exponens 1°. est fractio, cujus numerator unitas; aut fractio, cujus numerator unitate major, tumque vel simplum numeratoris, vel ejus multiplum denominatore minus. Si simplum numeratoris denominatore minus, ejus differentia a denominatore vel 2°. unitas est, vel 3°. unitate major. Similiter si multiplum numeratoris denominatore minus, differentia vel 4°. unitas est, vel 5°. unitate major. In casu primo* ratio est submultiplex; *in secundo* subsuperparticularis; *in tertio* subsuperpartiens; *in quarto* submultiplex subsuperparticularis; *in quinto* submultiplex subsuperpartiens.

(a) In *Comment. ad Elem.* V. EUCLIDIS. f. 179. Tom. 1. Oper.

DEFINITIO XLVIII.

149. *Rationes eædem* sunt, quarum antecedentes ad suos consequentes eodem modo referuntur, hoc est, quarum antecedentes per suos consequentes divisi dant exponentes æquales.

SCHOLION I.

150. *Per hanc definitionem agnosci posse etiam identitatem rationum irrationalium patet ex Schol. Def.* 42. (§. 137).

COROLLARIUM I.

151. Quoties ergo antecedens unius rationis suum consequentem, vel quantam consequentis partem continet; toties antecedens alterius suum consequentem, vel tantam consequentis partem continet: vel etiam quoties antecedens unius in consequente suo continetur, toties antecedens alterius continetur in suo consequente (§. 131).

COROLLARIUM II.

152. Si fuerit A ad B ut C ad D; erit A : B = C : D, seu, in exemplo singulari, 8 : 4 = 30 : 15. Et hoc modo identitatem rationum in posterum designabimus (§. 141).

SCHO-

SCHOLION II.

153. *Alii signis aliis utuntur. Communiter* A. B : : C. D *scribere solent. Sed secundum leges Artis characteristicæ signa scientifica non-scientificis præferri debent. Sunt autem signa scientifica, seu ad inveniendum apta, quæ per characteres derivativos exprimunt, quorum notiones ex aliis simplicioribus componuntur.*

COROLLARIUM III.

154. Cum rationes non discernantur nisi per exponentes (§. 141), in rationibus autem iisdem exponentes iidem sint (§. 149), rationes eædem sunt etiam similes (§. 24), & contra.

DEFINITIO XLIX.

155. Rationum duarum identitas, vel similitudo, dicitur *Proportio*. Et hinc quantitates eandem rationem habentes dicuntur *proportionales*. Ex. gr. Si $A:B = C:D$, dicuntur A, B, C & D, seu 8, 4, 30 & 15 proportionales.

DEFINITIO L.

156. *Proportio continua* est, si consequens primæ rationis idem est cum antecedente secundæ, ut si $3:6 = 6:12$: *Discreta* vero, si consequens primæ diversus ab antecedente secundæ, ut si $3:6 = 4:8$. In proportione continua *Terminus*, qui consequentis primæ & antecedentis secundæ vicem tuetur, *medius proportionalis* appellatur. Ita numerus 6 est medius proportionalis inter 3 & 12.

SCHOLION.

157. Gregorius A S. VINCENTIO (a) *considerat quoque rationes, quas habent rationum exponentes, &* Proportionalitatem *vocat proportionem, quæ inter exponentes quatuor rationum intercedit, ut modos argumentandi in Geometria etiam a rationibus dissimilibus desumere liceat. Sed nos ha[illegible] trina non utemur.*

(a) *Quadratura Circuli* lib. 8. f. 865.

DEFINITIO LI.

158. Rationum diversarum A : B & F : G *major* dicitur A : B, si fuerit $A:B > F:G$; contra *minor* F : G, si $F:G < A:B$. Unde & rationem majorem ac minorem hoc modo designabimus. Ex. gr. 6 ad 3 majorem habet rationem quam 5 ad 4, nam $6:2 (= 3) > 5:4 (= 1\frac{1}{4})$; sed 3 ad 6 minorem habet, quam 4 ad 5, nam $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$.

DEFINITIO LII.

159. *Ratio* ex duabus vel pluribus aliis *composita* dicitur, quam habet factum ex duarum vel plurium rationum antecedentibus ad factum ex earundem consequentibus. Ita 6 ad 96 est in ratione composita 2 ad 8 & 3 ad 12. In specie *duplicata* vocatur, quæ ex duabus; *triplicata*, quæ ex tribus; *quadruplicata*, quæ ex quatuor &c. & in genere *multiplicata*, quæ ex pluribus rationibus similibus componitur, multiplicata nempe uniuscujusque rationum similium. Ita 48 : 3 seu 16 : 1 est ratio duplicata ipsarum 4 : 1 & 12 : 3. Unde simul intelligitur, quænam *ratio* dicenda sit *subduplicata*, *subtriplicata*, *subquadruplicata* &c. & in genere *submultiplicata*. Nempe 4 : 1 est ratio subduplicata ipsius 16 : 1 vel 48 : 3.

THEOREMA XI.

160. *Quæ sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem, commensurabilia sunt.*

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

Numeri rationalis integri pars aliquota est unitas (§. 40); fractus vero cum unitate partem aliquotam communem habet (§. 41). Quæ igitur sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem; eorum unum, vel est pars aliquota alterius, vel utriusque pars aliquota communis datur. Quare commensurabilia sunt (§. 31). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

161. Cum in divisione sit ut divisor ad dividendum, ita unitas ad quotum (§. 69); si numerus rationalis per rationalem dividitur, unitas est ad quotum ut numerus rationalis ad numerum rationalem, atque hinc quotus commensurabilis unitati (§. 160), adeoque numerus rationalis (§. 39)

COROLLARIUM II.

162. Quoniam ergo in ratione rationali exponens rationis prodit, numero rationali per rationalem diviso (§. 134, 136); rationis rationalis exponens est numerus rationalis (§. 161).

THEOREMA XII.

163. *Commensurabilia sunt inter se, vel ut unitas ad numerum rationalem integrum, vel ut numerus rationalis integer ad alium rationalem integrum: incommensurabilia non item.*

DEMONSTRATIO.

Commensurabilium aut unum est pars aliquota alterius, aut utriusque datur pars aliquota communis (§. 31). Quodsi adeo in casu priore quantitas minor, in posteriore pars aliquota communis pro unitate assumatur; respondebit in priore quantitati majori, in posteriore utrique numerus rationalis integer (§. 40). Ergo in casu priore quantitates sunt inter se ut unitas, in posteriore ut numerus rationalis integer, ad numerum rationalem integrum. *Quod erat primum.*

Incommensurabilium nulla datur pars aliquota communis (§. 31). Nulla ergo datur unitas, cui commensurabilia existant. Quare cum omnis numerus rationalis unitati commensurabilis existat (§. 39); ipsa non sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

164. Commensurabilium ratio est rationalis; incommensurabilium irrationalis (§. 134).

SCHOLION.

165. *Dari quantitates incommensurabiles, in Geometria demonstrabitur.*

COROLLARIUM II.

166. Rationis commensurabilium exponens est numerus rationalis (§. 162).

THEOREMA XIII.

167. *Rationes* A : B *&* C : D, *similes eidem tertiæ* F : G, *sunt etiam similes inter se: & similibus similes sunt inter se similes.*

DEMONSTRATIO.

Rationes similes eidem tertiæ sunt etiam eædem eidem tertiæ (§. 154).

$6 : 3 = 8 : 4$
$10 : 5 = 8 : 4$

Ergo $6 : 3 = 10 : 5$

Quare cum sit A : B = F : G & C : D = F : G (§. 152); erit A : B = C : D (§. 87); consequenter A ad B ut C ad D (§. 152). *Quod erat unum.*

Porro

Porro A : B=C : D, & F : G=H : E, itemque C : D=H : E, *per hypoth.* Sed A : B=H : E, *per demonstr.* Ergo etiam A : B=F : G, *per demonstr.* *Quod erat alterum.*

THEOREMA XIV.

168. *Idem C ad æqualia A & B, & æqualia A & B ad idem C, vel etiam ad æqualia C & D, eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

A=B, *per hypoth.* Ergo C: A=C: B (§. 71, 94); consequenter C ad A & B eandem rationem habet (§. 152). *Quod erat primum.*

Similiter quia A=B, *per hypoth.* erit A : C=B : C (§. 71, 94); consequenter A & B ad C eandem rationem habent (§. 152). *Quod erat secundum.*

Sit denique A=C & B=D, erit A : B=C : D (§. 71, 94); consequenter ratio utrobique eadem (§. 152). *Quod erat tertium.*

THEOREMA XV.

169. *Si fuerit A : B=C : D; erit etiam* invertendo *B : A=D : C.*

DEMONSTRATIO.

Sit quotus ex divisione ipsius A per B emergens E, & quotus ex divisione ipsius C per D emergens G; erit B ad A ut unitas ad E, & D ad C ut eadem unitas ad G (§. 69); consequenter B : A =1 : E & B : C=1 : G (§. 152). Sed A : B=C : D, *per hypoth.* seu E=G (§. 15). Ergo unitas eadem ad E & G eandem rationem habet (§. 168); consequenter B : A=D : C (§. 167). *Q. e. d.*

THEOREMA XVI.

170. *Partes similes* P *&* p *eandem rationem habent ad tota* T *&* t: *si tota ad partes eandem rationem habent, partes sunt similes: & tota ad partes similes eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Habeat enim, si fieri potest, P ad T aliam rationem quam *p* ad *t*; partes *p* & P per diversitatem rationis ad tota a se invicem distingui poterunt (§. 132): Erunt adeo dissimiles (§. 24). Quod cum sit absurdum, utpote contra hypothesin; erit P ad T ut *p* ad *t*. *Quod erat unum.*

Si *t* : *p*=T : P, *per hypoth.* erit *p* : *t* =P : T (§. 169). Ergo, *per demonstrata*, P & *p* sunt partes similes. *Quod erat alterum.*

Si P & *p* sunt partes similes totorum T & *t*, erit P : T=*p* : *t*, *per num.* 1. adeoque T : P=*t* : *p* (§. 169), hoc est, tota ad partes similes eandem rationem habent.

THEOREMA XVII.

171. *Partes similes* P *&* p *sunt inter se ut tota* T *&* t.

DEMONSTRATIO.

Cum totum sit idem cum partibus suis simul sumtis (§. 9); quoties sumitur totum, toties etiam sumitur pars ejus quantalibet, ex. gr. quarta, vigesima, millesima, millionesima, aut quæ rationem aliam quamcunque ad totum habet. Quare si ponamus totum minus *t* toties sumi, donec toti T æquale fiat; quoties ipsum sumitur, toties etiam sumenda ejus pars *p*, donec parti ipsius T simili, quæ est P, æqua-

æqualis fiat. Toties itaque P conti-[illegible] quoties T ipsum *t*. Sunt ergo partes similes ut tota (§. 151). *Q. e. d.*

SCHOLION.

172. *Notandum est, numerum, qui indicat, quoties sumatur totum minus, ut majori æquale fiat, non semper esse rationalem; sed irrationalem quoque esse posse: quo in casu tota ad se invicem rationem irrationalem habent.* Ex. gr. *In Geometria demonstrabimus latus quadrati, ut diagonali æquale fiat, totum sumi debere, quoties unitas continetur in radice ex binario. Evidens vero est, si latus quadrati sit divisum in duas partes, quarum una est pars quarta totius, altera continet tres quartas; partem quoque quartam toties sumi quoties unitas continetur in radice ex binario, donec parti quartæ diagonalis æqualis fiat.*

THEOREMA XVIII.

173. *Si* A : B = C : D; *erit etiam* alternando *seu* permutando A : C = B : D.

DEMONSTRATIO.

I. Si antecedentes A & C consequentibus B & D fuerint minores; eorum partes (§. 20), eæque similes (§. 170) haberi possunt. Sunt igitur ut tota, hoc est antecedentes A & C eam inter se rationem habent quam consequentes B & D (§. 171).

II. Si antecedentes A & C consequentibus B & D majores; tum quia A : B = C : D, *per hypoth.* erit B : A = D : C (§. 169); consequenter B : D = A : C *per cas.* 1. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

174. Ergo in divisione unitas ad divisorem ut quotus ad dividendum (§. 69).

COROLLARIUM II.

175. Si fuerit A : B = C : D, & B = D; erit etiam A = C. Est enim A : C = B : D (§. 173). Sed B = D, *per hypoth.* Ergo A = C (§. 149).

COROLLARIUM III.

176. Si fuerit B : A = D : C, & B = D; erit etiam A = C. Cum enim sit A : B = C : D (§. 169); erit etiam A = C (§. 175).

THEOREMA XIX.

177. *Quæ ad idem vel æqualia eandem habent rationem, æqualia sunt: & ad quæ idem vel æqualia eandem habent rationem, ea itidem æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

A : B = D : B, *per hypoth.* Ergo A : D = B : B (§. 173). Sed B = B (§. 81). Quare A = D (§. 149). Et idem eodem modo ostenditur, si A : B = D : C & B = C. *Quod erat unum.*

Similiter C : A = C : B, *per hypoth.* Ergo C : C = A : B (§. 173). Sed C = C (§. 81). Quare A = B (§. 149). Et idem eodem modo patet, si C : A = D : B & C = D. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XX.

178. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C multiplices; facta D & E sunt inter se ut A & B.*

DEMONSTRATIO.

6	12
3	3
18	36

$6:12=18:36$.

Cum sit $1:C=A:D$ & $1:C=B:E$ (§. 66); erit $A:D=B:E$ (§. 167); consequenter $A:B=D:E$ (§. 173). *Q. e. d.*

SCHOLION.

179. *Cum C sit eadem quantitas in utroque casu, (per hypoth.) unitas quoque in utroque eadem est (§. 13); consequenter $1:C$ eadem Ratio.*

COROLLARIUM.

180. Ergo si $A > B$, etiam $AC > BC$ (§. 149), hoc est, si majus & minus per idem vel æqualia multiplices, factum prius est majus altero.

THEOREMA XXI.

181. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C dividas; quoti F & G sunt inter se ut A & B.*

DEMONSTRATIO.

$3)\ \dfrac{24:12}{8:4}$

$8:4=24:24$

Cum sit $1:C=F:A$ & $1:C=G:B$ (§. 174); erit $F:A=G:B$ (§. 167); consequenter $F:G=A:B$ (§. 173). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

182. Si $A > B$, etiam $F > G$ (§. 149), hoc est, si majus & minus per idem vel æqualia dividas, quotus prior posteriore major est.

THEOREMA XXII.

183. *Si rationum similium $A:B$ & $C:D$ antecedentes vel consequentes per idem E dividas; in casu priore quoti F & G ad consequentes B & D; in posteriore antecedentes A & C ad quotos H & K eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

$3:6=12:24$	
3	3
$1:6=4:24$	

Quoniam $A:B=C:D$ *per hypoth.* erit $A:C=B:D$ (§. 173). Sed $A:E=F$, & $C:E=G$, *per hypoth.* Ergo $F:G=A:C$ (§. 181) $=B:D$ (§. 167); consequenter $F:B=G:D$ (§. 173). *Quod erat unum.*

Similiter quoniam $A:B=C:D$ *per hypoth.* erit $A:C=B:D$ (§. 173). Sed $B:E=H$, & $D:E=K$ *per hypoth.* Ergo $B:D=H:K$ (§. 181); consequenter $A:C=H:K$ (§. 167), & hinc tandem $A:H=C:K$ (§. 173). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIII.

184. *Si rationum similium $A:B$ & $C:D$ antecedentes vel consequentes per eandem quantitatem E multiplices; in casu priore facta AE & CE ad consequentes B & D; in posteriore antecedentes A & C ad facta BE & DE eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

$2:6=3:9$	
6	6
$12:6=18:9$	

Quia $A:B=C:D$, *per hypoth.* $A:C=B:D$ (§. 173). Sed $EA:EC=A:C$ (§. 178). Ergo $EA:EC=B:D$ (§. 167); consequenter $EA:B=EC:D$ (§. 173). *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, esse $A:BE=C:DE$, *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIV.

185. *Si rationum similium $A:B$ & $C:D$ antecedentes per idem E & consequentes per idem F multiplices aut dividas; in casu priore facta, in posteriore quoti*

quoti eandem inter se rationem habent.

DEMONSTRATIO.

3 : 6 = 12 : 24
2 6 2 3
6 : 18 = 24 : 72

A : B = C : D, *per hypoth.* Ergo EA : B = EC : D (§. 184), consequenter EA : FB = EC : FD (§. *cit.*). *Quod erat unum.*

3 : 6 = 12 : 24
3 2 3 2
1 : 3 = 4 : 12

Sit A : E = G, B : F = H, C : E = K, & D : F = L. Quoniam A : B = C : D, *per hypoth.* G : B = K : D (§. 183). Ergo & G : H = K : L (§. *cit.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXV.

186. *Pars antecedentis in ratione majore ad consequentem eandem rationem habet, quam antecedens minoris ad consequentem suum. Et majus antecedente rationis minoris ad consequentem eandem rationem habet, quam antecedens majoris ad suum consequentem.*

DEMONSTRATIO.

Si A ad B rationem majorem habet quam C ad D; erit A : B > C : D (§. 158). Ut igitur ratio prior alteri æqualis evadat, necesse est ut minus quam A, hoc est, pars ipsius (§. 20), per B dividatur (§. 182): quæ pars si dicatur F, erit F : B = C : D, hoc est, in majore ratione, antecedentis pars eandem rationem habet ad consequentem, quam minoris antecedens ad suum (§. 152). *Quod erat unum.*

Similiter si A ad B minorem habet rationem, quam C ad D; erit A : B < C : D (§. 158). Ut igitur ratio prior alteri æqualis evadat, necesse est ut majus quam A, cujus adeo pars est A (§. 20), per B dividatur (§. 182): quod si dicatur F, erit F : B = C : D, hoc est, in ratione minore majus antecedente rationem eandem habet ad consequentem, quam majoris antecedens ad suum consequentem (§. 152). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXVI.

187. *Si fuerint quotcunque rationes similes $A : B$, $C : D$, $E : F$, $G : H$, &c.; summa omnium antecedentium $A + C + E + G$, &c., est ad summam omnium consequentium $B + D + F + G$, &c., ut antecedens unius rationis A ad suum consequentem B.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus ex. gr. esse $A = \frac{1}{2}B$, $C = \frac{1}{2}D$, $E = \frac{1}{2}F$, $G = \frac{1}{2}H$; erit $A + C + E + G = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}H$ (§. 88), hoc est summa omnium antecedentium est subdupla summæ omnium consequentium; consequenter ut antecedens unius rationis ad suum consequentem. Eodem modo cum argumentatio procedat, si alia quæcunque ratio antecedentium ad consequentes ponatur, vel etiam antecedentes sint consequentibus majores; patet propositum. *Q. e. d.*

THEOREMA XXVII.

188. *Si fuerit ut totum $A + C$ ad totum $B + D$, ita ablatum C ad ablatum D; erit etiam reliquum A ad reliquum B ut totum $A + C$ ad totum $B + D$, vel ut ablatum C ad ablatum D.*

DE-

DEMONSTRATIO.

24 : 12	
6 : 3	
18 : 9	

Aut A : B = C : D, aut A : B > C : D, aut denique A : B < C : D (§. 21). Ponamus A : B > C : D. Ergo pars ipsius A, quæ dicatur F, erit ad B ut C ad D (§.186), hoc est, F : B = C : D (§.152), consequenter F+C : B+D = C : D (§.187). Quare cum etiam sit A+C : B+D = C : D, *per hypoth.* erit F+C = A+C (§. 177), adeoque F = A (§.91). Sed F est pars ipsius A, *per demonstrata.* Pars igitur toti æqualis. Quod cum sit absurdum (§.84), ut sit A : B > C : D fieri nequit.

Sit jam A : B < C : D. Ergo majus ipso A, quod dicatur G, ad B eandem rationem habet, quam C ad D (§. 186), hoc est, G : B = C : D (§. 152), consequenter G+C : B+D = C : D (§.187). Quare cum etiam sit A+C : B+D = C : D, *per hypoth.* erit G+C = A+C (§.177), adeoque G = A (§.91). Sed A est pars ipsius G, *per demonstrata.* Ergo pars toti æqualis. Quod cum sit absurdum, ut sit A : B < C : D fieri nequit.

Quoniam itaque nec A : B > C : D, nec A : B < C : D, *per demonstrata*: erit utique A : B = C : D, consequenter A : B = A+C : B+D (§.187). *Q. e. d.*

THEOREMA XXVIII.

189. *In rationibus similibus A : B & C : D, differentia antecedentium A—C est ad differentiam consequentium B—D ut antecedens rationis utriuslibet ad suum consequentem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam A : B = C : D *per hypoth.* erit A : C = B : D (§.173). Ponamus A > C & B > D; erunt A & B tota, C & D eorum partes (§.9, 20). Quamobrem cum sit A : B = C : D, *per hypoth.* erit A—C : B—D = A : B, vel = C : D (§.188). *Q. e. d.*

THEOREMA XXIX.

190. *Si fuerit ut antecedens primæ rationis ad suum consequentem, ita antecedens alterius ad consequentem suum: erit etiam* componendo, *ut summa antecedentis & consequentis primæ rationis ad antecedentem vel consequentem primæ, ita summa antecedentis & consequentis secundæ ad antecedentem vel consequentem secundæ.*

DEMONSTRATIO.

4 : 2 =	10 :	5
6 : 4 =	15 :	10
vel 6 : 2 =	15 :	5

Si A : B = C : D *per hypoth.* erit A : C = B : D (§.173). Sed A+B : C+D = A : C = B : D (§. 187). Ergo A+B : A = C+D : C; item A+B : B = C+D : D (§.173). *Q. e. d.*

THEOREMA XXX.

191. *Si fuerit A : B = a : b & A : C = a : c, &c. erit A : A+B+C = a : a+b+c.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam A : B = *a* : *b*, & A : C = *a* : *c* *per hypoth.* erit A : *a* = B : *b* = C : *c* (§. 173, 167). Quare A : *a* = A+B+C : *a*+*b*+*c* (§.187), & hinc A : A+B+C = *a* : *a*+*b*+*c* (§.173). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXI.

192. *Si fuerint proportiones quotcunque similes A : B = C : D = E : F = G*

= G : H, I : K = L : M, &c. erit summa omnium antecedentium primarum rationum A + E + I, &c. ad summam omnium consequentium B + F + K, &c. ut summa omnium antecedentium secundarum rationum C + G + L, &c. ad summam omnium consequentium D + H + M, &c.

DEMONSTRATIO.

Cum A : B, E : F, I : K, &c. itemque C : D, G : H, L : M, &c. sint rationes similes, *per hypoth.* erit A + E + I, &c. : B + F + K, &c. = A : B, & C + G + L, &c. : D + H + M, &c. = C : D (§. 187). Est vero A : B = C : D, *per hypoth.* Ergo A + E + I, &c. : B + F + K, &c. = C + G + L, &c. : D + H + M, &c. (§. 167). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXII.

193. *Si fuerit ut antecedens primæ rationis ad suum consequentem, ita antecedens alterius ad consequentem suum; erit etiam* dividendo, *ut differentia terminorum primæ rationis ad ejus consequentem, ita differentia terminorum secundæ ad ejus consequentem: itemque* convertendo, *ut differentia terminorum primæ rationis ad ejus antecedentem ita differentia terminorum secundæ ad ejus antecedentem.*

DEMONSTRATIO.

6 : 4 = 15 : 10	
2 : 4 = 5 : 10	
2 : 6 = 5 : 15	

Si fuerit A : B = C : D, *per hypoth.* erit A : C = B : D, (§. 173), consequenter A — B : C — D = B : D = A : C (§. 189). Ergo A — B : B = C — D : D, & A — B : A = C — D : C (§. 173). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXIII.

194. *Si fuerit* ordinate *ut antecedens primæ rationis A ad suum consequentem B, ita antecedens secundæ D ad consequentem suum E, & ut consequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita consequens secundæ E ad aliud quidpiam F; erit* ex æquo *antecedens primæ A ad C ut antecedens secundæ D ad F.*

DEMONSTRATIO.

4 : 2 = 6 : 3	
2 : 8 = 3 : 12	
4 : 8 = 6 : 12	

Quoniam A : B = D : E & B : C = E : F, *per hypoth.* erit A : D = B : E & B : E = C : F (§. 173); consequenter A : D = C : F (§. 167). Quare A : C = D : F (§. 173). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

195. Quod si fuerit A : B = D : E, & C : B = F : E; cum etiam sit B : C = E : F (§. 169), erit A : C = D : F (§. 194).

COROLLARIUM II.

196. Similiter si fuerit A : B = C : D, & A : F = C : G; cum etiam sit B : A = D : C (§. 169), erit B : F = D : G (§. 194).

COROLLARIUM III.

197. Si denique fuerit A : B = C : D, & F : A = G : C, cum etiam sit A : F = C : G (§. 169), erit B : F = D : G (§. 196).

THEOREMA XXXIV.

199. *Si fuerit* perturbate *ut antecedens primæ rationis A ad suum consequentem B, ita antecedens secundæ E ad suum consequentem F, & ut consequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita aliud quidpiam D ad antecedentem secundæ E; erit etiam* ex æquo *antecedens primæ A ad C ut D ad consequentem secundæ F.*

DE-

DEMONSTRATIO.

$8 : 4 = 12 : 6$
$4 : 16 = 3 : 12$
$8 : 16 = 3 : 6$

Quoniam A : B = E : F, *per hypoth.* si ponatur B : C = F : G, erit A : C = E : G (§. 194). Est vero etiam B : C = D : E, *per hypoth.* Ergo D : E = F : G (§. 167), & D : F = E : G (§. 173); consequenter A : C = D : F (§. 167). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

199. Quodsi fuerit A : B = E : F, & C : B = E : D; cum etiam sit B : C = D : E (§. 169), erit A : C = D : F (§. 198).

COROLLARIUM II.

200. Similiter si fuerit B : A = F : E, & B : C = D : E; cum etiam sit A : B = E : F (§. 169), erit A : C = D : F (§. 198).

COROLLARIUM III.

201. Si porro fuerit B : A = F : E, & C : B = E : D; cum etiam sit B : C = D : E (§. 169), erit A : C = D : F (§. 200).

COROLLARIUM IV.

202. Si idem C, vel æqualia, per majus A & minus B dividas; quotus prior F erit minor posteriore G. Est enim A : C = 1 : F, & B : C = 1 : G (§. 174); adeoque C : B = G : 1 (§. 169). Ergo A : B = G : F (§. 198). Sed A > B, *per hypoth.* Ergo G > F (§. 149).

THEOREMA XXXV.

203. *Majus A ad idem C majorem rationem habet quam minus B.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam A > B, *per hypoth.* erit A : C > B : C (§. 182), hoc est, A ad C majorem rationem habet, quam B ad C (§. 158). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVI.

204. *Quod ad idem majorem habet rationem quam alterum, id altero majus est.*

DEMONSTRATIO.

Habeat A ad C rationem majorem quam B ad idem C, *per hypoth.* Ergo pars ipsius A eandem ad C rationem habet quam B ad idem C (§. 186), adeoque ipsi B æqualis est (§. 177). Quare A > B (§. 20). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVII.

205. *Idem C ad majus A minorem habet rationem quam ad minus B.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam A > B, *per hypoth.* erit C : A < C : B (§. 202). Ergo C ad A minorem habet rationem quam ad B (§. 158). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVIII.

206. *Ad quod idem majorem rationem habet quam ad alterum, id altero minus est.*

DEMONSTRATIO.

Habeat C ad A rationem majorem, quam ad B, *per hypoth.* Ergo pars ipsius C, quæ dicatur D, ad A eandem rationem habet, quam ad B (§. 186), hoc est, D : A = C : B (§. 152), & hinc D : C = A : B (§. 173). Sed D < C (§. 20). Ergo A < B (§. 149). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXIX.

207. *Duæ quantitates se mutuo multiplicantes idem factum gignunt.*

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

2
2 4
8=8

Sint duo factores A & B, erit 1 : A = B : AB & 1 : B = A : BA (§. *66*). Est vero etiam 1 : A = B : BA (§. 173), adeoque ob unitatem eandem, *per hypoth.* B : AB = B : BA (§. 167). Ergo AB = BA (§. 177).

COROLLARIUM.

208. Sint tres factores A, B & C. Quoniam AB = BA (§. 207); erit CAB = CBA (§. 93), adeoque & ABC = BAC (§. 207). Similiter quia CB = BC (§. 207); erit ACB = ABC (§. 93), adeoque & CBA = BCA (§. 207). Quare CAB = CBA = ABC = BAC = ACB = BCA (§. 87), hoc est, factum idem producitur, quocunque ordine efficientes in se invicem ducantur.

SCHOLION.

209. *Idem eodem modo ostenditur, si plures fuerint factores: sed demonstratio prolixior evadit, si plures tribus fuerint termini.*

THEOREMA XL.

210. *Si factum per multiplicandum dividitur; quotus est multiplicans: si per multiplicantem; quotus est multiplicandus.*

DEMONSTRATIO.

Est enim multiplicandus ad factum ut unitas ad multiplicantem (§. *66*). Est etiam multiplicandus ad factum (si hoc per illud dividi concipimus) ut unitas ad quotum (§. *69*). Ergo quotus æqualis est multiplicanti (§. 177). *Quod erat unum.*

Quoniam unitas est ad multiplicantem ut multiplicandus ad factum (§. *66*); eadem unitas ad multiplicandum ut multiplicans ad factum (§. 173). Sed si factum per multiplicantem dividis; multiplicans est ad factum ut unitas ad quotum (§. *69*). Ergo quotus est æqualis multiplicando (§. 177). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

211. Omnia igitur facta sunt numeri compositi (§. *76*).

THEOREMA XLI.

212. *Si quotus per divisorem multiplicatur, aut contra; factum est dividendus.*

DEMONSTRATIO.

Est enim ut unitas ad divisorem ita quotus ad dividendum (§. 174). Sed si quotus per divisorem multiplicatur, erit ut unitas ad divisorem, ita quotus ad factum (§. *66*). Ergo factum æquale est dividendo (§. 177). *Quod erat unum.*

Idem vero cum sit factum, si divisor per quotum multiplicetur (§. 207); erit quoque in hoc casu factum æquale dividendo. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XLII.

213. *Sint quatuor quæcunque quantitates proportionales* $A : B = C : D$; *sint totidem aliæ inter se quoque proportionales* $E : F = G : H$: *si posteriores singulas in singulas priores ducas; facta inter se proportionalia sunt, nempe* $AE : FB = GC : DH$.

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

Cum sit *per hypoth.*

A : B = C : D & E : F = G : H
E F E F C D C D

erit EA : FB = EC : FD & CE : DF = CG : DH. (§. 185). Sed EC = CE & FD = DF (§. 207). Ergo EA : FB = CG : DH (§. 167) = GC : HD (§. 207). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIII.

214. *Rationis compositæ exponens est æqualis facto, quod producunt exponentes simplicium.*

DEMONSTRATIO.

Si rationis primæ A : B exponens = m; secundæ C : D exponens sit = n. Erit m: 1 = A:B & n: 1 = C:D (§. 140). Ergo mn : 1 = AC : BD (§. 213); consequenter mn est exponens rationis AC : BD (§. 140), hoc est compositæ ex A : B & C : D (§. 159). *Q. e. d.*

SCHOLION.

215. *Sint rationes* 8 : 4 *&* 24 : 6. *Illius exponens est* 2, *hujus* 4. *Rationem compositam datarum habent* 192 *&* 24. *Sed* 192 : 24 = 8, *quod est factum ex* 2 *in* 4. *Ceterum eadem demonstratio locum habet, si plures fuerint rationes.*

THEOREMA XLIV.

216. *Si plures fuerint quantitates continue proportionales A, B, C, D, &c.; prima A ad tertiam C est in ratione duplicata, ad quartam D in ratione triplicata, &c. primæ A ad secundam B.*

DEMONSTRATIO.

1. Quoniam A : B = B : C, *per hypoth.* AB ad BC habet rationem duplicatam ipsius A ad B (§. 159). Sed AB : BC = A : C (§. 181). Ergo etiam A ad C rationem duplicatam habet ipsius A ad B (§. 167). *Quod erat unum.*

2. Quoniam A : B = B : C = C : D. *per hypoth.* ABC est ad BCD in ratione triplicata ipsius A ad B (§. 159). Sed ABC : BCD = A : D (§. 178). Ergo etiam A ad D est in ratione triplicata ipsius A ad B (§. 167). *Quod erat secundum.*

3. Facile apparet, quod eodem modo demonstrari possit, primum terminum habere ad quintum rationem quadruplicatam; ad sextum quintuplicatam, &c. primi ad secundum. *Quod erat tertium.*

THEOREMA XLV.

217. *Si fuerit quacunque quantitatum A, B, C, D, E, F, &c. series; ratio primæ A ad ultimam F componitur ex rationibus quantitatum extremis interjacentium A : B, B : C, C : D, D : E, E : F &c.*

DEMONSTRATIO.

Si enim omnes antecedentes, itidemque omnes consequentes in se invicem multiplices, facta ABCDE & BCDEF sunt in ratione composita rationum A : B, B : C, C : D, D : E, E : F, &c. (§. 159). Sed ABCDE : BCDEF = A : F (§. 178). Ergo etiam A ad F est in ratione composita omnium modo recensitarum (§. 167). *Q. e. d.*

THEOREMA XLVI.

218. *Rationes compositæ ex rationibus, quarum singulæ singulis æquales sunt, inter se æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

$6 : 3 = 4 : 2$	Sit $A : B = C : D$,
$3 : 1 = 12 : 4$	$E : F = G : H$, $I : K$
$5 : 1 = 20 : 4$	$= L : M$, *per hypoth.*
———————	erit $AE : BF = CG :$
$90 : 3 = 960 : 32$	DH (§. 213), adeo-
$= 30$	que & $AEI : BFK$

$= CGL : DHM$ (§. *cit.*). Ratio vero $AEI : BFK$ componitur ex rationibus $A : B$, $E : F$ & $I : K$; ratio $CGL : DHM$ ex rationibus $C : D$, $G : H$, $L : M$ (§. 159). Ergo constat propositum. *Q. e. d.*

THEOREMA XLVII.

219. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales A, B, C & D; æquemultiplices primæ atque tertiæ A & C, itemque secundæ ac quartæ B & D, juxta quamlibet multiplicationem, utraque utramque vel una superant, vel una æquales sunt, vel una deficiunt, inter se comparatæ.*

DEMONSTRATIO.

Denotentur æquemultiplices ipsarum A & C per mA & mC, itemque æquemultiplices ipsarum B & D, per nB & nD. Cum sit $A : B = C : D$, *per hypoth.* erit etiam $mA : nB = mC : nD$ (§. 185); consequenter $mA : mC = nB : nD$ (§. 173). Quamobrem si $mA = mC$, erit $nB = nD$; si $mA > mC$, etiam $nB > nD$; si $mA < mC$, etiam $nB < nD$ (§. 151). *Q. e. d.*

SCHOLION.

220. *Hac proprietate proportionalium utitur* EUCLIDES (*a*) *in iis definiendis, ac inde ceteras demonstrat.*

(*a*) Elem. V. def. 5.

CAPUT IV.

De speciebus Arithmeticæ in numeris fractis.

THEOREMA XLVIII.

221. *Si numerator est æqualis denominatori; fractio $\frac{4}{4}$ æquivalet integro: si minor; fractio $\frac{3}{4}$ minor est integro: si major; fractio $\frac{5}{4}$ integro seu unitate major est.*

DEMONSTRATIO.

Denominator enim indicat unitatem seu integrum in partes æquales (ex. gr. in nostro casu in 4.) divisum, & numerator numerat partes istiusmodi in casu aliquo datas (§. 59). Quodsi ergo numerator denominatori æqualis, *per hypoth.* tot dantur partes, quot habet integrum. Ergo fractio integro æqualis (§. 86). *Quod erat primum.*

Si numerator denominatore minor; *per hypoth.* aliquot saltem dantur partes integri, non omnes. Ergo fractio tantum aliquot partibus integri æqualis; consequenter eadem minor (§. 20). *Quod erat secundum.*

Si

Si denique numerator major eſt denominatore; *per hypoth.* plures dantur partes, quam habet integrum. Sed tot partes, quot habet integrum, integro æquales ſunt (*§.* 86). Ergo integrum parti fractionis æquale eſt; conſequenter ipſa integro major (§. 20). *Quod erat tertium.*

SCHOLION.

222. Fractiones *integro æquales, vel eodem majores, dicuntur vulgo* ſpuriæ; *quia proprie loquendo fractiones non ſunt niſi quæ integro minores* (*§.* 38).

PROBLEMA XVII.

223. *Invenire, quot integra fractio* ($\frac{8}{4}$), *quæ integro major, contineat.*

RESOLUTIO.

Numerator 8 per denominatorem 4 dividatur: dico, quotum 2 indicare quod petebatur.

DEMONSTRATIO.

Quotus enim 2 indicat, quoties denominator 4 in numeratore 8 contineatur (§. *69*). Sed denominator idem eſt cum integro (§. 59). Ergo quotus indicat, quoties integrum in fractione contineatur. *Q. e. d.*

PROBLEMA XVIII.

224. *Integros numeros reducere ad fractionem denominatoris dati.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicetur numerus integer per denominatorem datum.
2. Factum ſcribatur loco numeratoris.

Ita reperies $3=\frac{24}{8}$, $5=\frac{30}{6}$, $7=\frac{28}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Eſt nempe factum ad denominatorem datum, ut numerus integer ad unitatem (§. *66*, *169*). Sed unitas & denominator datus ſunt idem integrum (§. *59*). Ergo fractio & numerus integer æquales ſunt (§. 177). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIX.

225. *Fractiones homogeneæ æquales ſunt, quarum numeratores ad ſuos denominatores eandem rationem habent: major eſt, cujus numerator habet rationem majorem: minor vero, cujus numerator habet minorem.*

DEMONSTRATIO.

Cum fractiones inter ſe ſint homogeneæ, *ex hypoth.* ad eandem unitatem referuntur (*§.* 35), adeoque ipſarum denominatores idem totum referunt (§. *59*). Quare ſi numeratores ad ſuos denominatores eandem rationem habent, fractiones æquales ſunt (§. 177): cujus vero fractionis numerator ad denominatorem ſuum rationem majorem habet, ea major eſt: cujus numerator minorem habet, ea minor eſt (§. 204). *Q. e. d.*

Ex. gr. $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$. Sed $\frac{3}{24} < \frac{2}{6}$.

SCHOLION.

226. *Intelligitur adeo identitas fractionum, ſi numerator unius toties contineatur in denominatore ſuo, quoties numerator alterius in ſuo continetur. Fractio minor eſſe intelligitur, ſi numerator ipſius pluries continetur in ſuo denominatore, quam numerator alterius in denominatore ſuo: id quod diviſio denominatoris per numeratorem prodit.*

COROLLARIUM.

Quodſi ergo tam numerator, quam denominator alicujus fractionis ($\frac{4}{6}$) per eundem numerum (2) multiplicetur vel dividatur; in caſu priore facta ($\frac{8}{12}$), in poſteriore quoti ($\frac{2}{3}$) conſtituunt fractionem datæ ($\frac{4}{6}$) æquivalentem (§. 178, 181).

PROBLEMA XIX.

228. *Invenire communem menſuram maximam duorum numerorum.*

RESOLUTIO.

1. Dividatur numerus major per minorem.
2. Diviſor primæ diviſionis, ſeu numerus datus minor, denuo dividatur per reſiduum primæ diviſionis.
3. Similiter diviſor ſecundæ diviſionis dividatur per reſiduum ſecundæ, & ita porro, donec nihil remaneat.

Dico, diviſorem ultimum eſſe communem menſuram maximam numerorum datorum.

Ex. gr. Sint numeri dati 168 & 240; reperietur eorum communis menſura maxima 24 hunc in modum:

7 182 240(1 168	24 168(2 72	1 72 (3 24

Similiter communis menſura maxima numerorum 95 & 47 reperitur 1.

DEMONSTRATIO.

Diviſor ultimus 24 metitur diviſorem antecedentis (in noſtro quidem caſu ſecundæ) diviſionis 72, (*per hypoth. & §. 74*). Ergo & metitur dividendum antecedentis (hoc eſt, in noſtro caſu ſecundæ) diviſionis 168, quippe ex dividendo ultimæ diviſionis 72, aliquoties (hic quidem bis) ſumto & ejus diviſore 24 compoſitum. Metitur adeo numerum unum datorum 168 & reſiduum primæ diviſionis 72, adeoque & numerum alterum datorum 240, quippe ex minore 168 aliquoties (in noſtro caſu ſemel) ſumto & reſiduo primæ diviſionis 72 compoſitum. Eſt itaque communis numerorum datorum menſura (§. 78).

Eſſe vero communem menſuram maximam ordine retrogrado per indirectum demonſtratur. Ponamus enim numero invento 24 majorem eſſe menſuram numerorum datorum 240 & 168 communem. Patet igitur ex antecedentibus, quod etiam metiri debeat reſiduum primæ, ſeu diviſorem ſecundæ diviſionis 72; adeoque & reſiduum ſecundæ diviſionis, ſeu diviſorem tertiæ, hoc eſt, in noſtro caſu inventam communem menſuram 24. Sed numerus is eadem major eſt, *ex hyp.* Ergo communem menſuram inventam 24 metietur numerus major, quam 24. Quod cum ſit abſurdum (§. 74), major communis menſura non datur. Eſt igitur ea, quam invenimus, maxima. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

229. *Qui demonſtrationem uno quaſi obtutu comprehendere cupiunt; illos hæc numerorum datorum reſolutio juvabit.*

I. $72 = 3 \cdot 24$, per diviſ. tert.

II. $168 = 2 \cdot 72 + 24$, per diviſ. ſec. $= 2 \cdot 3 \cdot 24 + 24$, per num. I, $= 7 \cdot 24$.

III. $240 = 1 \cdot 168 + 72$, per diviſ. prim. $= 7 \cdot 24 + 3 \cdot 24$, per num. I & II $= 10 \cdot 24$.

SCHOLION II.

230. *In lineis communis mensura maxima invenitur per mutuam earundem a se invicem subtractionem. In numeris autem compendii gratia divisio subtractioni substituitur : ut exemplum ostendit.*

240	96	48
168	72	24
72	24	24
96	48	0

PROBLEMA XX.

231. *Fractionem datam ad minores terminos reducere ; h. e. invenire fractionem datæ* $(\frac{20}{48})$ *æquivalentem, sed minoribus numeris expressam.*

RESOLUTIO.

Dividatur tam numerator 20, quam denominator 48, per eundem numerum 4; qui utrumque metitur: quoti 5 & 12 componunt fractionem quæsitam $\frac{5}{12}$ (§. 227).

COROLLARIUM I.

232. Si ergo divisio fit per communem mensuram maximam numeratoris ac denominatoris (§. 228); fractio ad terminos minimos reducitur.

COROLLARIUM II.

233. Si numeratorem ac denominatorem fractionis datæ sola unitas metitur; ad minores terminos reduci nequit.

SCHOLION.

234. *Molestius accidit inexercitatis communem mensuram maximam quærere, quam, iterata per mensuras minores sponte animadversas divisione, fractiones reducere.*

PROBLEMA XXI.

235. *Duas vel plures fractiones datas ad eandem denominationem reducere ; h. e. invenire fractiones, quæ datis æquales sunt, & communi denominatore gaudent.*

RESOLUTIO.

Casus I. Si fractiones duæ dentur, quælibet integra multiplicetur per denominatorem alterius.

Ex. gr. $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5} = \frac{2.5}{3.5}$ & $\frac{4.3}{5.3} = \frac{10}{15}$ & $\frac{12}{15}$.

Casus II. Si plures dentur, tam numerator, quam denominator uniuscujusque ducatur in factum ex denominatoribus reliquarum.

Ex. gr. $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{6}$ & $\frac{3}{4} = \frac{2.6.4}{3.6.4}$ & $\frac{1.3.4}{6.3.4}$ & $\frac{3.3.6}{4.3.6} = \frac{48}{72}$ & $\frac{12}{72}$ & $\frac{54}{72}$.

DEMONSTRATIO.

Fractiones communem habere denominatorem, patet per §. 93 & § 207, 208. Quod vero æquivaleant primum propositis, manifestum est per §. 227. Constat ergo propositum. *Q. e. d.*

PROBLEMA XXII.

236. *Fractiones addere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diversos denominatores habuerint, reducantur ad eundem (§. 235).
2. Addantur numeratores (§. 96) & summæ subscribatur denominator communis.

Ex. gr. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15}$ (§. 235) $= \frac{22}{15}$ $= 1\frac{7}{15}$ (§. 223).

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{48}{72} + \frac{12}{72} + \frac{54}{72}$ (§. 235) $= \frac{114}{72} = 1\frac{42}{72}$ (§. 223) $= 1\frac{7}{12}$ (§. 231).

DEMONSTRATIO.

Cum denominatores sint nomina unitatum, ex quibus numeratores componuntur (§. 59); numeratores tantum adduntur. Quoniam vero addi

addi nequeunt, nisi fuerint homogenei (§. 61) ad eandem denominationem sunt reducendi (§. 35). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXIII.

237. *Fractionem datam ex alia data subtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diversos habent denominatores, reducantur ad eandem denominationem (§. 235).
2. Numerator unius ex numeratore alterius subducatur (§. 103) & residuo denominator communis subscribatur.

Ex. gr. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (§. 231) & $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6}{10} - \frac{5}{10}$ (§. 235) $= \frac{1}{10}$.

THEOREMA L.

238. *Fractio æquatur numeratori per denominatorem diviso; hoc est,* $\frac{3}{4} = 3:4$.

DEMONSTRATIO.

Est enim fractio $\frac{3}{4}$ ad unitatem, seu integrum, ut numerator 3 ad denominatorem 4 (§. 38, 59). Quare cum sit ut antecedens ad consequentem ita exponens rationis ad unitatem (§. 140); si antecedens sumatur numerator 3, consequens denominator 4, erit fractio $\frac{3}{4}$ exponens rationis (§. 177). Æquatur ergo fractio numeratori per denominatorem diviso (§. 136). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXIV.

239. *Fractionem per fractionem multiplicare.*

RESOLUTIO.

Ducatur numerator unius fractionis in numeratorem, & denominator unius in denominatorem alterius; facta constituunt fractionem quæsitam.

Ex. gr. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (§. 231).

DEMONSTRATIO.

Sit $\frac{A}{B}$ ($\frac{2}{3}$) $= A:B$ (§. 238) $= F$, & $\frac{C}{D}$ ($\frac{1}{2}$) $= C:D$ (§. *cit.*) $= G$; erit $B:A = 1:F$, & $D:C = 1:G$ (§. 69). Ergo $BD:AC = 1:FG$ (§. 213), hoc est, $\frac{AC}{BD}$ ($\frac{2.1}{3.2}$) $= \frac{FG}{1}$ (§. 169) $= FG$ ($\frac{2}{6}$). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

240. *Non mirum, quod factum factoribus minus, cum revera divisio sit, quæ multiplicatio vocatur. Ex. gr.* $\frac{2}{3}$ *multiplicare per* $\frac{1}{2}$ *idem est ac invenire dimidium duarum partium tertiarum.*

SCHOLION II.

241. *Hinc fractionum multiplicatio sequente modo facilius demonstratur.* Si fractio $\frac{4}{5}$ multiplicanda per $\frac{2}{3}$, duæ partes tertiæ quatuor quintarum inveniendæ. Data igitur fractio $\frac{4}{5}$ instar totius considerata dividenda est in tot partes æquales, quot multiplicatoris denominator 3 habet unitates, scilicet in nostro casu in tres, & pars ista multiplicanda per numeratorem multiplicatoris, nempe hic per 2 (§. 59).

SCHOLION III.

242. *Vix autem opus est ut annotemus, si fractio per numerum integrum multiplicanda, ducendum esse solum numeratorem in integrum numerum datum. Ex. gr. factum ex* $\frac{3}{7}$ *in* 2 *est* $\frac{6}{7}$.

PROBLEMA XXV.

243. *Fractionem* ($\frac{4}{5}$) *per aliam fractionem* ($\frac{2}{3}$) *dividere.*

RESOLUTIO.

1. Divisor invertatur. Ex. gr. loco $\frac{2}{3}$ scribe $\frac{3}{2}$.
2. Divisor inversus ducatur in dividendum

dum (§. 239): quod prodit $\frac{12}{10}$, seu $1\frac{1}{5}$ (§. 223), est quotus quæsitus.

DEMONSTRATIO.

Quoniam divisor ad dividendum ut unitas ad quotum (§. 69); erit etiam dividendus ad divisorem ut quotus ad unitatem (§. 169). Quodsi fractiones ad eandem denominationem reducantur (§. 235), cum eædem sint æquales quotis ex divisione numeratorum per denominatorem communem (§. 238); erit numerator fractionis dividendæ ad numeratorem dividentis ut fractio dividenda ad fractionem dividentem (§. 181); consequenter in hoc casu numerator dividendæ ad numeratorem dividentis ut quotus ad unitatem (§. 167). Quare fractiones datæ ad communem denominatorem reducendæ sunt, & numerator dividendæ per numeratorem dividentis dividi debet, ut habeatur quotus ex divisione fractionis dividendæ per dividentem emergens (§. 177). Enimvero dum fractiones duæ ad eandem denominationem reducuntur, numerator primæ enascitur ex numeratore ipsius dato in denominatorem secundæ, numerator vero secundæ ex ipsius numeratore dato in denominatorem primæ ducto (§. 235). Obtinemus adeo numeros, ex quorum divisione quotus quæsitus emergit, si divisor inversus (*juxta* §. 239) in fractionem dividendam ducatur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

244. *Neque vero mirum est, quod quoti numeri integri esse possint. Una enim fractio alteram ter, quater, millies &c. continere potest. Apparet adeo, cum fractiones sint rationes* (§. 141), *eas dividere idem esse ac rationum rationes investigare.*

PROBLEMA XXVI.

245. *Integrum* (3) *per fractionem* ($\frac{4}{7}$) *dividere.*

RESOLUTIO.

1. Divisor invertatur, ut in Problemate præcedente (§. 243). Ex. gr. loco $\frac{4}{7}$ scribe $\frac{7}{4}$.
2. Numerus integer datus 3 ducatur in numeratorem 7 divisoris inversi.
3. Facto subscribatur ejusdem denominator 4: quod prodit $\frac{21}{4}$ sive $5\frac{1}{4}$ est quotus quæsitus.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum demonstratione Problematis præcedentis (§. 243).

CAPUT

CAPUT V.

De Potentiis numerorum, Genesi præsertim ac Analysi numerorum Quadratorum & Cubicorum.

DEFINITIO LIII.

246. Si numerus quicunque 2 in se ipsum ducatur; factum 4 *Numerus Quadratus:* ipse autem hujus intuitu *Radix Quadrata* appellatur.

COROLLARIUM.

247. Cum sit ut unitas ad Radicem quadratam, ita Radix ad ipsum Quadratum (§. *66*, *246*); erit Radix media proportionalis inter unitatem & Quadratum (§. 1*56*).

DEFINITIO LIV.

248. Si numerus quadratus 4 porro per radicem 2 multiplicetur; factum 8 dicitur *Numerus Cubicus* seu *Cubus*, & radix 2 ejus intuitu *Radix Cubica.*

COROLLARIUM.

249. Cum sit ut unitas ad Radicem, ita Radix ad Quadratum (§. *66, 246*) & ut unitas ad Radicem ita Quadratum ad Cubum (*66*, 248); erit etiam Radix ad Quadratum ut Quadratum ad Cubum (§. 1*67*), hoc est, Unitas, Radix, Quadratum & Cubus in continua proportione progrediuntur (§. 1*56*), & Radix Cubica est primus ex duobus numeris mediis continue proportionalibus inter Unitatem & Cubum.

DEFINITIO LV.

250. Cum istiusmodi multiplicatio in infinitum continuari possit; facta inde genita generali *Potestatum, Potentiarum, Dignitatum* nomine appellari solent. VIETA eadem *Magnitudines scalares* vocat.

DEFINITIO LVI.

251. *Exponens dignitatis* est numerus, qui indicat, quoties dignitas data per radicem dividenda, antequam ad unitatem perveniatur. Ita exponens Quadrati est 2, Cubi 3 (§. 24*6*, 248).

DEFINITIO LVII.

252. Hodie tantum non omnes dignitates optime distinguunt per exponentes, ita ut Radix dicatur *Dignitas prima*, Quadratum *secunda*, Cubus *tertia* &c. Qui *Arabes* sequuntur, singulis potentiis peculiaria imponunt nomina, diversa tamen ab iis, quibus cum DIOPHANTO (*a*) utuntur VIETA (*b*) & OUGHTREDUS (*c*). Nomina *Arabum* sunt: *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*, *Quadratoquadratum* seu *Biquadratum*, *Surdesolidum*, *Quadratum Cubi*, *Surdesolidum secundum*, *Quadratiquadrati Quadratum*, *Cubus Cubi*, *Quadratum Surdesolidi*, *Surdesolidum tertium* &c. Nomina DIOPHANTI sunt; *Latus* seu *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*, *Quadratoquadratum*, *Quadratocubus*, *Cubocubus*, *Quadratoquadratocubus*, *Quadratocubocubus*, *Cubocubocubus* &c.

SCHO-

(*a*) In *Libris Arithmeticorum.*
(*b*) In *Isagoge in Artem Analyt.* c. 3. f. m. 3.
(*c*) In *Clave Mathem.* c. 12. p. m. 34.

SCHOLION.

253. *Multi quadratum vocant* Zenſum. *Hinc compoſita*: Zenſizenſus, Zenſicubus, Zenſizenzenſus, Zenſurdeſolidus &c.

HYPOTHESIS XII.

254. *Qui* Arabum *denominationibus uſi, Potentiarum ſignis ſequentibus utuntur:* 1. R, 2. ℨ, 3. C, 4. ℨℨ, 5. ß, 6. ℨC, 7. Bß, 8. ℨℨℨ, 9. CC, 10. ℨß, 11. Cß &c. *Multo commodius* CARTESIUS *(a)*, *monito* KEPLERI *(b) obſecutus, radici ſuperius a dextris jungit exponentem*, ex. gr. *ſi* a *fuerit radix, erunt Potentiæ ipſam ſequentes*, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 &c. *vel, ſi* $a = 2$, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 &c. *ita ut ſit* $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ &c.

DEFINITIO LVIII.

255. *Quantitatem ad dignitatem deſideratam evehere* idem eſt ac invenire factum ex ipſa aliquoties in ſe ducta emergens. Ex. gr. 2 evehere ad dignitatem tertiam idem eſt ac invenire factum 8, cujus factores 2. 2. 2.

DEFINITIO LIX.

256. *Ex dignitate data radicem extrahere, vel latus educere* idem eſt ac invenire numerum 2, qui aliquoties in ſe ipſum ductus datam potentiam (ex. gr. tertiam) 8 producit.

SCHOLION.

257. *Cum dignitates ſuperiores nonniſi in Analyſi uſum habeant; in præſenti geneſin & analyſin Quadratorum & Cuborum tantum tradimus. Radices vero quadratas ac cubicas extracturus omnium digitorum numeros quadratos & cubicos noſſe debet, quos ſequens tabula exhibet:*

Radices.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrati.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

DEFINITIO LX.

258. *Radix* tam quadrata, quam cubica, aut dignitatis ſuperioris cujuſcunque dicitur *Binomia*, ſi ex duabus: *Trinomia*, ſi ex tribus: *Multinomia* ſive *Polynomia*, ſi ex pluribus, quam duabus partibus conſtat.

THEOREMA LI.

259. *Potentiæ ejuſdem gradus ſunt in ratione tantuplicata laterum, quot unitates habet exponens earundem; hoc eſt, Quadrata habent rationem duplicatam: Cubi triplicatam: Quadrato-quadrata quadruplicatam: &c. rationem ſuarum radicum.*

DEMONSTRATIO.

Potentiæ oriuntur, ſi radices A & B aliquoties in ſeipſas ducas (§. 250). Quare cum eadem radix A ad eandem radicem B eandem habeat rationem; ratio Quadratorum componitur ex duabus, Cuborum ex tribus, Quadrato-quadratorum ex quatuor, &c. reliquarum Potentiarum ex tot rationibus ſimilibus, quot exponens earundem habet unitates. Ergo Quadrata habent rationem duplicatam, Cubi triplicatam, &c. ceteræ Potentiæ rationem tantuplicatam ſuarum radicum, quot unitates habet exponens earundem (§. 159).

(a) In *Geometria*.
(b) *Harmonices mundi* lib. I. f. 35. 36.

THEOREMA LII.

260. *Quantitatum proportionalium Potentiæ eædem ſunt etiam proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Habent enim Potentiæ eædem rationem multiplicatam ipſarum A : B , B : C, C : D, D : E &c. vel A : B, C : D, E : F &c. (§. 259). Sed hæ rationes omnes inter ſe eædem ſunt, *per hypoth.* Ergo potentiæ iſtæ, v. gr. A^3, B^3, C^3, D^3, E^3, &c. conſtituunt rationes compoſitas ex rationibus, quarum ſingulæ ſingulis æquales ſunt (§. 250); conſequenter eaſdem (§. 218); atque adeo proportionales ſunt (§. 155). *Q. e. d.*

THEOREMA LIII.

261. *Numerus quadratus radicis binomiæ, componitur ex Quadrato partis primæ, ex Facto dupli primæ in alteram & ex Quadrato partis alterius.*

DEMONSTRATIO.

Prodit enim numerus Quadratus, ſi Radix in ſeipſam ducitur (§. 246). Utraque vero pars radicis ſigillatim ducitur in utramque ſimul (§. 111). Quare productum componi debet 1°. ex facto partis primæ in ſeipſam, hoc eſt, ex Quadrato partis primæ (§. 246); 2°. ex facto partis primæ in ſecundam & ex facto ſecundæ in primam, hoc eſt, ex duplo facto primæ in ſecundam, ſeu ex Facto dupli primæ in ſecundam (§. 207, 208); 3°. ex facto partis ſecundæ in ſeipſam, hoc eſt, ex Quadrato partis ſecundæ (§. 246). *Q. e. d.*

SCHOLION.

262. *Demonſtratio eſt ocularis, ſi, in quocunque exemplo ſingulari, multiplicatio non actu peragitur, ſed ſaltem indicatur; quo in caſu exempli univerſalis vices tuetur: id nimirum non infelicius quam figuræ in Geometria repræſentant, quod ſingularia in univerſum omnia commune habent. Ex. gr. ſit radix binomia* 34, *aut* 30 + 4; *erit*

30 + 4	*Radix binomia.*
30 + 4	
16	*Quadratum partis II.*
120	*Facta ex I in II.*
120	
900	*Quadratum partis I.*
1156	*Quadratum totius.*

Egregium hoc artificium vires imaginationis mire extendit & intellectum juvat tam in demonſtrationibus concipiendis, quam in propoſitionibus inveniendis.

COROLLARIUM I.

263. Cum pars dextra, ſive ſecunda, inter unitates, ſiniſtra ſive prima, inter decades locum obtineat (§. 50); Quadratum illius in loco dextimo, Factum ex unius duplo in alteram in ſecundo, Quadratum denique alterum in tertio a dextimo terminari debet (§. 49).

SCHOLION II.

264. *Scilicet Quadratum partis dextimæ nullam adjunctam habet cyphram; duplo Facto ex parte una in alteram cyphra una, Quadrato autem partis ſiniſtræ duæ adjunguntur; ut numeri ſolitarie poſiti juſtum locum naniſcantur* (§. 49).

COROLLARIUM II.

265. Si radix multinomia fuerit; partes duæ aut plures ſiniſtimæ habeantur pro una, & extemplo patebit, Quadratum numeri cujuſcunque componi ex Quadratis ſingularum partium & Factis ex duplo partis cujuſ-

cujuſlibet in omnes ipſa ſiniſteriores: ut adeo Theorema unum compoſitioni omnium numerorum Quadratorum ſufficiat.

SCHOLION III.

266. *Sit radix* 346 : *ſumatur* 340 *pro parte una & 6 pro altera ; erit* (§. 261).

340 + 6	
340 + 6	
36	*Quadratum pars* III.
2040 2040	*Facta ex parte* III *in* I & II *ſimul.*
1600	*Quadratum partis* II.
12000 12000	*Facta ex* I *in* II.
90000	*Quadratum partis* I.
119716	*Quadratum totius.*

COROLLARIUM III.

267. Quonam in loco ſingula producta terminentur, ex Corollario primo & ejus Scholio intelligitur (§. 263, 264). Habenda nimirum eſt ratio cyphrarum numeris in ſe invicem ductis adjungendarum, ſi ſolitarii ponantur, ut juſtum nanciſcantur locum (§. 49).

SCHOLION IV.

268. *Extractio Radicis Quadratæ, alias tædii plena, facillima evadit, ubi Quadratis per Theorema præſens componendis operam prius impenderis.*

PROBLEMA XXVII.

269. *Ex numero quocunque dato Radicem Quadratam extrahere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Numerus propoſitus diſtinguatur in claſſes, binas notas claſſi unicuique aſſignando, initio a dextra facto. Tot enim erunt partes Radicis, quot claſſes habentur (§. 265, 267). Notandum vero, quod claſſi ſiniſtimæ interdum nonniſi nota unica relinquatur.
2. Jam cum in claſſe ſiniſtima reperiatur Quadratum notæ ſiniſtimæ Radicis (§. *cit.*); in *Tabula Radicum* (§. 275) quæratur numerus Quadratus ei, qui claſſem ſiniſtimam occupat, vel æqualis, vel eodem proxime minor, & ex ipſo ſubtrahatur; Radix vero ejus poſt lunulam ſcribatur.
3. Quoti inventi duplum ponatur ſub nota ſiniſtima claſſis ſubſequentis, & inde porro ſiniſtrorſum, ſi ex notis pluribus conſtiterit. Inveſtigetur novus quotus per Abacum *Pythagoricum* (§. 109), inventuſque poſt lunulam ſcribatur: eſt enim pars ſecunda Radicis (§. 261, 210).
4. Idem quotus ponatur ſub nota dextima illius claſſis, & factum ex numero ſubſcripto integro in diviſorem (§. 263) ſubducatur, ut in diviſione moris eſt.
5. Quodſi operatio, juxta regulam tertiam & quartam, in reliquis claſſibus iteretur; prodibit Radix quæſita (§. 265, 267).

Ex. gr.

11	56	(34
9	: :	
2	56	
	64	
2	56	
	0	

11	97	16	(346
9	: :	: :	
2	97	: :	
	64	: :	
2	56	: :	
	41	16	
	6	86	
	41	16	
		0	

PROBLEMA XXVIII.

270. *Radicem Quadratam ex fractione data extrahere, cujus numerator & denominator est numerus quadratus.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Quoniam numerum fractum per fractum multiplicans unius numeratorem in numeratorem alterius, & denominatorem pariter in denominatorem alterius ducit (§. 239); Quadratum autem ex ductu ejusdem numeri in seipsum enascitur (§. 246); Radicem Quadratam extracturus, eam sigillatim ex numeratore ac denominatore extrahere tenetur.

Ita Radix Quadrata ex $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$; ex $\frac{49}{144}$ vero $\frac{7}{12}$.

COROLLARIUM I.

271. Cum numeri integri ad fractionem denominatoris dati reducantur, si per hunc multiplicentur, & facto tanquam numeratori denominator datus subscribatur (§. 224); si numerus datus, qui Quadratus non est, ad fractionem reducatur, cujus denominator est Quadratus & ex fractione extrahatur Radix (§. 270): quæ prodit fractio Radicem prope veram exhibet in istiusmodi partibus, quas denominatoris Quadrati Radix indicat.

SCHOLION I.

272. *Ex. gr. Si ex 2 extrahenda Radix prope vera, quæ non deficiat in partibus sextis; duc 2 in 36, ut prodeat fractio $\frac{72}{36}$, cujus Radix $\frac{8}{6}$, sive $1\frac{2}{6}$, exhibet Radicem a vera magnitudine parte sexta non differentem, seu cujus defectus minor est quam $\frac{1}{6}$.*

COROLLARIUM II.

273. Quoniam numerum per articulum primarium, veluti 10, 100, 1000 &c. multiplicaturus, eidem non nisi cyphras 0, 00, 000 &c. unitati adhærentes adjungere teneris (§. 112); Radicem prope veram in fractionibus decimalibus desiderans, numero qui Quadratus non est, 2, 4, 6 &c. cyphras junge dextrorsum & operationem continua: ita enim prodibit Radix prope vera in partibus decimis, centesimis, millesimis &c.

SCHOLION II.

274. Ex. gr. *Sit extrahenda Radix Quadrata ex 345; prodibit* $18\frac{57}{100}$.

```
3 | 45 (18 57/100
1 | : :
---------------
2 | 45
  (28)
  224|
------
 2.1.|0.0
  (3|65)
 1 8 25
--------
  2 7.5.00
   (37 07)
  2 5 949
 ---------
    1 5 5 1
```

SCHOLION III.

275. *Si Tabulis numerorum Quadratorum pro Radicibus ab 1 usque ad 1000 utaris; in iis evolvi potest numerus Quadratus proxime minor eo, qui tres classes sinisteriores occu-*

8697.5	(294 $\frac{9}{10}$
86436	
539|0.0	
(588 8 9)	
5 3 0|0 1	
899	

occupat. Ita sine ullo labore habentur tres notæ priores, ex. gr. in nostro casu 294. Plures notæ una inveniuntur, si Tabulæ longius extendantur.

THEOREMA LIV.

276. *Numerus Cubicus Radicis binomiæ componitur ex numeris Cubicis duarum partium, ex Facto tripli Quadrati partis primæ in secundam & ex Facto tripli Quadrati partis secundæ in primam.*

DEMONSTRATIO.

Numerus Cubicus prodit, si Quadratum per Radicem multiplicetur (§. 248). Sed Quadratum Radicis binomiæ componitur ex Quadratis partium & Facto duplo ex parte una in alteram (§. 261). Quare Cubus componitur ex Cubo partis primæ, ex triplo Facto Quadrati partis primæ in secundam, ex triplo Facto Quadrati partis secundæ in primam, hoc est, ex Facto tripli Quadrati partis primæ in secundam, & Facto tripli Quadrati partis secundæ in primam (§. 207), atque ex Cubo partis secundæ (§. 246, 248). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

277. *Demonstrationem ocularem denuo sistit exemplum singulare, in quo multiplicatio tantum indicatur. Sit ex. gr. Radix 34 seu* 30 + 4, *erit*

30 + 4	*Radix*
16	*Quadrat. part.* II.
120 120	*Facta ex* I *in* II.
900	*Quadrat. part.* I.
64	*Cubus part.* II.
480 480	*Facta ex Quadrat.* II. *in* I.
3600	*Factum ex Quadrat.* I. *in* II.
480	*Fact. ex Quadrat.* II. *in* I.
3600 3600	*Facta ex Quadrat.* I. *in* II.
27000	*Cubus part.* I.
39304	*Cubus totius.*

COROLLARIUM I.

278. Cum pars dextra inter unitates, sinistra inter decades locum obtineat (§. 50); numerus Cubicus dextræ in loco dextimo, Factum ex triplo Quadrato ejus in sinistram in secundo, Factum ex triplo Quadrato sinistræ in dextram in tertio, Cubus denique partis sinistræ in quarto loco terminatur (§. 49).

COROLLARIUM II.

279. Si Radix multinomia fuerit, duæ vel plures notæ sinistimæ pro una habentur, ut binomiæ formam mentiatur; extemplo patet, quod Cubus quicunque componatur ex Cubis singularum partium radicis & ex Factis tripli Quadrati quarumlibet sinisteriorum in proxime dexteriorem, itemque ex Factis tripli Quadrati cujuslibet dexterioris in omnes sinisteriores.

SCHOLION II.

280. *Sit Radix 346. Sume* 340 *pro parte una radicis, erit 6 pars altera, consequenter* (§. 276).

 346

346	
346	
90000	*Quadrat. part.* I.
12000 12000	*Facta ex* I *in* II.
1600	*Quadrat. part.* II.
115600	*Quadrat.* I *&* II *simul.*
2040 2040	*Facta ex* III *in* I *&* II *simul.*
36	*Quadrat. part.* III.
27000000	*Cubus part.* I.
3600000 3600000	*Facta ex Quadr.* I *in* II.
480000	*Fact. ex Quadr.* II *in* I.
3600000	*Fact. ex Quadr.* I *in* II.
480000 480000	*Fact. ex Quadr.* II *in* I.
64000	*Cubus part.* II.
693600 693600	*Facta ex Quadr.* I *&* II *simul in* III.
12240	*F. ex Quad.* III *in* I *&* II *sim.*
693600	*F. ex Quadr.* I *&* II *sim. in* III.
12240 12240	*Fact. ex Quadr.* III *in* I *&* II *simul.*
216	*Cubus part.* III.
41421736	*Cubus totius.*

Notandum scilicet, sectionem numeri in duas partes arbitrariam esse; cumque Theorema generaliter de Radice utcunque in duas partes divisæ loquatur, idem quoque ad quamlibet sectionem applicari posse. Ex. gr. *numerus 346 non modo, stante Theoremate, in 340 & 6, vel in 300 & 46, verum etiam in 195 & 151, in 89 & 257, & in duas quascunque alias partes dividi potest: id quod etiam tentanti palam fit. Ceterum idem valere in numeris Quadratis, immo in genere in Potentiis quibuscunque, me tacente intelligitur.*

COROLLARIUM III.

281. In quibus autem locis singula terminentur facta, ex Corollario primo (§. 278) colligitur: habenda nimirum & hic est ratio cyphrarum numeris in se invicem ductis adjungendarum, si solitarii ponantur. *Vide exemplum in Schol. præc.* (§. 280).

PROBLEMA XXIX.

282. *Ex numero dato Radicem Cubicam extrahere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Numerus datus distinguatur in classes, tres notas unicuique assignando, initio a dextris facto Etenim ex tot notis Radix componitur, quot classes emergunt (§. 278, 281). Notandum vero, non repugnare, ut classi sinistimæ una, vel duæ notæ cedant.
2. In *Tabula Radicum* (§. 257) quæratur numerus Cubicus eo proxime minor numero, qui in classe sinistima continetur, nisi ipse in eadem inveniatur, atque ab hoc subtrahatur; ejus vero Radix post lunulam scribatur: est enim pars prima Radicis (§. 274).
3. Quoti inventi Quadratum triplum (§. 278, 281) scribatur sub nota sinistima classis subsequentis, & inde porro sinistrorsum si ex pluribus notis constiterit: quo facto quæratur quotus, qui erit pars secunda Radicis (§. *cit* & §. 210.)
4. Divisor ducatur in novum quotum, & productum sub eo deleto scribatur; sub nota vero media classis ejusdem terminetur Factum ex

triplo

triplo Quadrato novi quoti in præcedentem; sub dextima denique Cubus novi quoti. Hæc tria facta in unam summam collecta ex notis numeri Cubici suprascriptis subtrahantur (*§. cit.*).

5. Quodsi operatio per reliquas classes, juxta regulam tertiam & quartam continuetur; prodibit Radix quæsita (§. 279).

Ex. gr. 47	437	928 (362
27		
20	437	
Divisor (2	7)..	
Fact. ex d. in q. 16	2 ..	
Fac. ex 3 □ n.q. in pr. 3	2 4 .	
Cubus novi quoti	2 16	
Summa factor. 19	656	
781		928
Divisor (388		8)..
Fact. ex Div. in q. n. 777		6 ..
Fact. ex 3 □ n. q. in pr. 4		32 .
Cubus n. q.		8
Summa factorum 781		928
000		000

PROBLEMA XXX.

283. *Radicem Cubicam ex fractione extrahere, cujus numerator & denominator Cubus est.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Eodem, quo supra (§. 270), modo patet, Radicem sigillatim ex numeratore ac denominatore extrahendam esse.

Ita radix ex $\frac{27}{343}$ est $\frac{3}{7}$; ex $\frac{64}{729}$ vero $\frac{4}{9}$.

COROLLARIUM I.

284. Hinc porro eodem, quo supra (*§.* 271), modo consequitur, Radicem prope veram in fractione dati denominatoris inveniri, si numerus, qui Cubus non est, per hujus denominatoris Cubum multiplicetur, & Radici Cubicæ ex facto extractæ tanquam numeratori denominator datus subjiciatur.

SCHOLION I.

285. Ex. gr. *Si ex* 12 *extrahenda Radix Cubica prope vera, defectu minore quam* $\frac{1}{8}$; *ducatur* 12 *in* 512 *Cubum ipsius* 8, *& ex facto* 6144 *extrahatur Radix Cubica* 18, *erit* $\frac{18}{8}$, *seu* $2\frac{2}{8}$, *Radix prope vera, cujus defectus est minor quam* $\frac{1}{8}$.

COROLLARIUM I.

286. Immo inde ulterius eodem, quo supra (*§.* 273), modo fluit, Radicem prope veram in fractionibus decimalibus inveniri, si 3, 6, 9 &c. cyphræ numero non Cubo dextrorsum pro decimis, centesimis, millesimis &c. partibus jungantur, & operatio (§. 282) continuetur.

SCHOLION II.

287. Ex. gr. *Sit extrahenda Radix Cubica ex* 3; *eam reperies* $1\frac{44}{100}$.

3 ($1\frac{44}{100}$		
1		
2	0.0.0	
	3 . . .	
1	2 . .	
	48 .	
	64	
1	744	
256		0.0.0
58		8 . .
235		2 . .
6		72 .
		64
241		984
14		016

SCHO-

SCHOLION III.

288. *Si Tabulis numerorum Cubicorum utaris, idem operæ compendium facere licet, quod supra (§. 275) in extrahenda Radice Quadrata commendavimus.*

PROBLEMA XXXI.

289. *Examinare extractionem Radicis Quadratæ ac Cubicæ.*

RESOLUTIO.

1. Radix Quadrata inventa ducatur in se ipsam, & facto residuum, si quod fuerit, addatur. Quodsi numerus prodeat, ex quo Radix extracta; erit numerus inventus Radix Quadrata dati, vel exacta, vel (si talem non habeat) prope vera (§. 246).

```
   1857
   1857
  -------
  12999
  9285
 14856
1857
  -------
3448449
   1551
  -------
3450000
```

Ex. gr. Radicem Quadratam prope veram ex 345 supra (§. 274) reperimus $18\frac{57}{100}$. Duc Radicem 1857 in seipsam & facto 3448449 adde residuum 1551: prodibit numerus 345, ex quo extractio fieri debebat, quatuor cyphris auctus: ut in extractione ad inveniendas centesimas factum fuerat.

II. Radix Cubica inventa ducatur in seipsam, & factum denuo in eandem. Producto posteriori addatur, si quod fuerit, residuum. Quodsi numerus prodeat, ex quo extractio facta, operatio rite peracta (§. 248).

```
   144
   144
  -----
   576
  576
 144
  -----
 20736
   144
  -----
 82944
82944
20736
  -------
2985984
  14016
  -------
3000000
```

Ex. gr. Superius (§. 287) ex 3 extracta Radix est $1\frac{44}{100}$. Duc hanc Radicem 1 44 in seipsam, & factum 20736 denuo in 1 44. Producto alteri 2985984 adde, quod supra residuum erat, 14016. Aggregatum est [illegible] 3 sex cyphris aucta, ut in operatione factum fuerat.

THEOREMA LV.

290. *Exponens rationis Quadratorum est Quadratum: Cuborum Cubus: & in genere Potentiarum cujuscunque gradus Potentia ejusdem gradus exponentis Radicum.*

DEMONSTRATIO.

Quadrata enim habent rationem duplicatam; Cubi triplicatam: & in genere Potentiæ cujuscunque gradus rationem multiplicatam suarum Radicum (§. 259). Quare cum exponens rationis compositæ sit æqualis facto, quod producunt exponentes simplicium (§. 214), exponens vero rationum simplicium, ex quibus componuntur duplicatæ, triplicatæ, & in genere multiplicatæ quæcunque, idem sit (§. 159); exponens rationis duplicatæ erit Quadratum (§. 246), triplicatæ Cubus (§. 248), & in genere multiplicatæ cujuscunque Potentia exponentis Radicum (§. 250). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA LVI.

291. *Si ex divisione numeri Quadrati per Quadratum, Cubi per Cubum, & in genere Potentiæ cujuscunque per aliam similem, numerus integer prodit; etiam ex divisione Radicis per Radicem integer prodire debet.*

DEMONSTRATIO.

Quotus ex divisione numeri Quadrati per Quadratum, Cubi per Cubum, & in genere Potentiæ cujuscunque per aliam similem emergens est exponens rationis Quadratorum, Cuborum, vel in genere Potentiarum similium se mutuo dividentium (§. 136), adeoque Quadratum, Cubus & in genere potentia exponentis rationis Radicum (§. 290). Quare cum idem sit numerus rationalis integer, *per hypoth.* erit idem numerus rationalis integer Quadratus, Cubus, vel Potentia alterius gradus: cujus quoniam Radix itidem rationalis integer esse debet (§. 250); etiam exponens Radicum numerus rationalis integer erit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

292. Quare si Radix Radicem non metitur, nec Quadratum Quadratum, nec Cubus Cubum, nec Potentia quæcunque aliam similem metitur (§. 74); consequenter fractio integro major ex istiusmodi Quadratis, Cubis, vel Potentiis quibuscunque similibus composita ad numerum integrum irreducibilis (§. 223).

THEOREMA LVII.

293. *Si numeri integri non datur Radix in integris, nec dabitur per fractos.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus dari numerum fractum, qui sit Radix. Ex ejus itaque iterata multiplicatione per seipsum produci debet numerus datus (§. 250). Sed quotiescunque fractum per seipsum multiplicas, productum semper est fractus (§. 239), isque in præsente casu ad integrum irreducibilis (§. 292). Quare cum numerus datus sit integer, *ex hypoth.* fractus ejus Radix esse nequit. *Q. e d.*

COROLLARIUM.

294. Jam cum numeri primi in se ex nullo alio numero in se aliquoties ducto oriantur (§. 75); ex numeris primis in se nulla perfecta Radix extrahi potest in integris (§. 256), adeoque nec per fractos dari potest (§. 293).

HYPOTHESIS XIII.

295. *Interdum utile est, extractionem Radicis tantum indicari, præsertim si perfecta haberi nequit. Est autem signum radicale sequens* ($\sqrt{}$): *cui in vertice jungitur exponens dignitatis, si altioris gradus, quam quadrata.* Ex. gr. $\sqrt[2]{}$ denotat Radicem quadratam ex 2; $\sqrt[3]{}$ 5 denotat Radicem cubicam ex 5.

SCHOLION.

296. *In Geometria & Analysi demonstrabitur, tales Radices, quæ actu dari non possunt, esse ad unitatem ut rectam lineam ad rectam aliam; consequenter numeros* (§. 10), *eosque irrationales, cum ex hypothesi rationales non sint. Dicuntur vulgo numeri* surdi: *quamvis olim hujus vocis significatus strictior fuerit* (b). *Et olim, & nunc interdum* radicales *nuncupari sueverunt.*

(*b*) Vid. STIFELIUS in *Arithm. integra* lib. c. 12. p. 1

CAPUT VI.

De Regulis Proportionum.

THEOREMA LVIII.

297. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales; factum extremarum æquatur facto mediarum.*

DEMONSTRATIO.

6 : 3 = 8 : 4	A : B = C : D (*per*
4 3	*hypoth.* & §. 152). Er-
————	go AD : BC = CD :
24 = 24	DC (§.185). Sed CD
	= DC (§.207). Igi-

tur AD=BC (§. 149). *Q. e. d.*

THEOREMA LIX.

298. *Si fuerint tres quantitates continue proportionales; factum extremarum est æquale mediæ quadrato.*

DEMONSTRATIO.

6 : 12 = 12 : 24	Quoniam enim
12 6	A:B=B:C (*per*
————	*hypoth.* & §. 156,
144 = 144	152); erit AC
	= BB (§. 297).

Sed BB est Quadratum ipsius B (§. 250). Ergo factum extremarum AC æquatur Quadrato mediæ. *Q. e. d.*

THEOREMA LX.

299. *Si quantitas AD, producta ex duabus aliis se mutuo multiplicantibus A & D, fuerit æqualis alteri BC, ex duabus aliis B & C eodem modo productæ; erit A : B = C : D.*

DEMONSTRATIO.

6 8	AC : AD = C : D (§.
4 3	178). Sed AD=BC,
————	*per hypoth.* Ergo AC :
24 = 24	BC = C : D (§. 168);
4:8 = 3:6	consequenter A : B
	= C:D (§.181). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

300. Si ergo in serie quatuor quantitatum factum ex secunda in tertiam æquale sit facto ex prima in quartam; erunt quantitates istæ proportionales.

PROBLEMA XXXII.

301. *Inter duos numeros (8 & 72) medium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Datorum unus 72 multiplicetur per alterum 8 (§. 111).
2. Ex facto 576 extrahatur Radix quadrata 24 (§. 269); quæ erit numerus quæsitus (§. 298).

PROBLEMA XXXIII.

302. *Datis tribus numeris 3, 12, 5, quartum: aut duobus, tertium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Secundus 12 ducatur in tertium 5; aut in altero casu secundus in seipsum.
2. Factum 60 dividatur per primum 3. Quotus 20 est quartus: in altero casu tertius quæsitus.

DE-

DEMONSTRATIO.

Si enim terminum ſecundum per tertium, aut in altero caſu ſecundum per ſeipſum multiplicas; factum ex primo in quartum, in caſu altero ex primo in tertium prodit (§. 297, 298). Quodſi ergó hoc per primum dividis; quotus eſt terminus quartus, in caſu altero tertius (§. 210). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

303. Data quælibet fractio converti poteſt in aliam æqualem datæ denominationis. Quodſi enim, *per Probl. præſ.* ad denominatorem & numeratorem fractionis datæ atque denominatorem deſideratæ quæratur numerus quartus proportionalis; erit is numerator fractionis quæſitæ (§. 225).

Ex. gr. ſit fractio $\frac{2}{3}$ convertenda in aliam cujus denominator 24, reperietur ea $\frac{16}{24}$.

3 — 2 — 24
2
48

48 (16
33

COROLLARIUM II.

304. Quodſi numerus partium, in quas integrum aliquod communi more dividitur, pro denominatore aſſumitur; valor fractionis datæ in menſura vulgari reperitur. Ex. gr. Cum apud nos thalerus in 24 groſſos dividatur, ex ante allato exemplo apparet, 16 groſſos æquivalere duabus tertiis unius thaleri.

COROLLARIUM III.

305. Si vero denominator aſſumitur 10, 100, 1000 &c. fractiones datæ in decimales convertuntur. Ita reperiemus $\frac{2}{3} = \frac{666666}{1000000}$ &c. in infinitum; $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$; $\frac{3}{7} = \frac{42857}{100000}$ fere.

SCHOLION I.

306. *In fractionibus decimalibus denominator omitti ſolet, quia ex meris cyphris & præfixa unitate conſtat. Ejus vero loco punctum* (.) *numeratori præfigitur & loca vacua replentur cyphra, ita ut, ex. gr. duæ cyphræ præponantur, ſi fractio milleſimis incipiat. Ita loco* $\frac{23}{100}$ *ſcribimus* 0. 23; *loco* $5\frac{47}{10000}$ *ſcribimus* 5. 0047. *Eſt vero harum fractionum non exiguus in Matheſi uſus, quas primus in condendis Tabulis ſinuum adhibuit* Johannes REGIOMONTANUS.

SCHOLION II.

307. *Reſolutio hujus Problematis vulgo* Regula trium *appellatur, quia ex tribus numeris invenitur quartus. Uſus ejus ampliſſimus tam in vita communi, quam in ſcientiis. Hinc* Regula aurea *vocatur. Facile autem apparet, hac Regula nullibi eſſe utendum, niſi ubi de numerorum datorum proportione conſtiterit.* Ex. gr. *Sit vas ingens aqua repletum per exiguum in fundo foramen effluxura, ſi aperiatur. Ponamus, intra* 1 *minuta prima effluere* 3 *congios. Inveniri debet, quanto tempore* 100 *congii effluant. Tres in hoc caſu dantur numeri, quartus inveniendus. Enimvero vel ipſa experientia docet, aquam ſub initium celerius, poſtea tardius effluere; conſequenter quantitatem aquæ effluentis non eſſe tempori proportionalem. Quamobrem hæc quæſtio per Regulam trium ſolvi nequit.*

SCHOLION III.

308. *Quæ in commercium veniunt, pretiis ſuis proportionalia ſunt. Qui enim duplum mercis accipit, duplum; qui triplum accipit, triplum pretium ſolvit. Dato igitur pretio quantitatis cujuſdam determinatæ mercis, per Regulam trium invenitur pretium quantitatis cujuſcunque alterius datæ, aut quantitas mercis dato cuicunque alteri pretio reſpondens. Ex. gr. pretium 3 librarum ſunt* 4 *thaleri, quantum eſt*

pretium 17 librarum? Cum sit, ut 3 libræ ad 17 libras, ita illarum pretium (quod est 4 thalerorum) ad pretium harum; hoc quidem ita invenitur:

$$3\text{ L.} — 17\text{ L.} — 4\text{ Th.}$$
$$\begin{array}{ll} 4 & 2\,(22\tfrac{2}{3}\text{ th.} \\ \hline 68 & 68 \\ & 33 \end{array}$$

Item: 3 libræ veneunt 4 thaleris, quot $22\frac{2}{3}$ thaleris? Cum sint ut 4 thaleri ad $22\frac{2}{3}$, ita 3 libræ ad quæsitas; harum numerus ita innotescit:

$$4\text{ Th.} — 22\tfrac{2}{3}\text{Th.} — 3\text{ L.}$$
$$\begin{array}{ll} 3 & 2 \\ \hline 68 & 68\,(17\text{L.} \\ & 44 \end{array}$$

Hinc simul patet, quomodo Regula trium examinetur, hoc est, inveniatur, utrum operatio per eam rite peracta, nec ne.

SCHOLION IV.

309. *Similiter merces operariorum est tempori proportionalis, quo labore defunguntur; etiam quantitas laboris eidem tempori proportionalis, si æqualibus articulis æqualia pensa absolvuntur; eadem numero operariorum proportionalis, si pensa æqualia singuli absolvunt. Ex. gr. Intra horas 6 libri folia perleguntur: Quanto horarum spatio 360 perlegi poterunt?*

$$6\text{ F.} — 360\text{ F.} — 2\text{ H.}$$
$$\begin{array}{ll} 2 & 2 \\ \hline 720 & 720\,(120\text{H.} \\ & 666 \end{array}$$

SCHOLION V.

310. *Si numeri dati fuerint heterogenei, non eandem proportionem habent, quam res ipsis respondentes: ad homogeneos igitur reducendi. Ita thaleri in grossos, grossi in nummos, libræ in semuncias, horæ in minuta &c. convertuntur. Ex. gr. 3 libræ & 4 semunciæ veneunt 2 thaleris & 4 grossis, quanti libræ 2? Calculus talis est*

$$3\text{ L.}\,4\text{ S.} — 2\text{ L.} — 2\text{ Th.}\,4\text{.gr.}$$
$$\begin{array}{lll} 32 & 32 & 24 \\ \hline 100\text{ S.} & 64\text{ S.} & 52\text{ gr.} \\ & 52 & \\ \hline & 128 & \\ & 320 & 3328\,(33\tfrac{28}{100}\text{ seu }\tfrac{7}{25}\text{g.} \\ \hline & 3328 & 1100 \end{array}$$

Quodsi nosse cupias, quot nummis conveniant $\frac{7}{25}$ grossi, ita reperies (§. 304).

$$25 — 7 — 12$$
$$\begin{array}{ll} 7 & 29\,(3\tfrac{9}{25}\text{ num.} \\ \hline 84 & 84 \\ & 25 \end{array}$$

Si nummus ulterius divideretur, poterat quoque valor $\frac{9}{25}$ unius nummi eodem modo reperiri: sed cum tanti non sit ut inveniatur, fractio illa tuto negligitur.

SCHOLION VI.

311. *In scriptis Arithmeticorum* Regula trium inversa *occurrit, qua terminus datorum primus duci jubetur in secundum & factum dividi per tertium, contraria nimirum ratione, qua in* Regula trium directa *usi sumus* (§. 302), *quia scilicet termini contra naturam proportionis ordinantur. Sed ea opus non est, si numeri dati, prout proportio exigit, ordinentur. Ex. gr. 125 milites operi exstruendo 6 menses impendunt: quantus requiritur militum numerus, ut intra 2 absolvatur. Evidens est, quod sit, ut spatium 2 mensium ad spatium 6 mensium, ita numerus militum, qui opus intra sex menses absolvunt, ad numerum militum, qui intra duos idem exstruunt. Quo minore enim temporis intervallo exstruitur,*

tur, eo major militum numerus requiritur. En calculi typum:

2 M. — 6 M. — 125 Mil.
6
―――
750

11
750 (375 Mil.
222

SCHOLION VII.

312. *Interdum gemina Regulæ trium applicatione opus est, antequam numerus quæsitus innotescat. Ea vulgo pro peculiari Regula venditatur & ab aliis* Regula de quinque, *ab aliis* Regula composita *appellatur. Ex. gr.* 300 *thaleri dant intra* 2 *annos usuram* 36 *thalerorum, quantam dabunt* 20000 *thaleri intra* 12 *annos. Hic per Regulam trium primum invenitur, quanta sit usura a* 20000 *expectanda intra* 2 *annos. Dein per eandem investigatur, quanta eadem intra* 12 *annos existat:*

300 Th. — 20000 Th. — 36 Uf.
20000
―――
720000

1
720000 (2400 Uf.
33000

2 A. — 12 A. — 2400 Uf.
12
―――
4800
24
―――
28800

28800 (14400 Uf.
222

SCHOLION VIII.

313. *Exemplis istiusmodi Regula trium semel applicata satisfacere potest. Cum enim in nostro casu bis* 300 *thaleri eandem dent usuram intra* 1 *annum, quam* 300 *intra* 2, *& duodecies* 20000 *tantam intra* 1 *annum, quanta* 20000 *intra* 12; *omissis temporis circumstantiis ita inferatur: bis* 300, *id est* 600 *thaleri dant usuram (intra annum scilicet)* 36, *quantam dabunt duodecies* 20000, *id est* 240000 *thaleri (itidem intra annum?)*

600 Th. — 240000 Th. — 36 uf.
36
―――
1440000
72
―――
8640000

22
8640000 (14400
666600

Posterior hæc methodus priori præfertur, quod in illa ad fractionum tædia sæpe prolabimur.

SCHOLION IX.

314. *Dantur & alii casus, in quibus iteratæ Regulæ trium applicationi supersedere non licet. Ita, si commune sociorum lucrum vel damnum inter eos distribuendum, toties applicatur quot sunt socii. Est enim ut summa collatorum ad lucrum vel damnum commune, ita collatum quodlibet partiale ad lucrum vel damnum partiale ipsi respondere. Ex. gr. Lucrum commune trium personarum est* 2000 *thalerorum, collatum primi* 1000, *secundi* 500, *tertii* 300: *inveniri debent lucra partialia singulis convenientia. En typum calculi:*

Collatum primi 1000 Th.
secundi 500
tertii 300
―――
Summa Collatorum 1800 Th.

1800 Th. — 1000 Th. — 2000 Th.
2 000
―――
2000000

111

111
11272
2000000 ($1111\frac{2}{18}$ Lucrum primi.
1888800
111

1800 Th. — 500 Th. — 2000 Th.
2 000
1000000

111
555
1000000 ($555\frac{10}{18}$ Lucrum secundi.
188800
11

1800 Th. — 300 Th. — 2000 Th.
2 000
600000

33
3666
600000 ($333\frac{6}{18}$ Lucrum tertii.
188800
11

EXAMEN.

$1111\frac{2}{18}$ Lucrum primi
$555\frac{10}{18}$ secundi
$333\frac{6}{18}$ tertii

2000 Th. Lucrum commune.

SCHOLION X.

315. *Non desunt alia exempla, quæ calculum eundem requirunt, ut cum, in Medicina aut Artibus aliis, ex data ratione quam pondera miscibilium inter se habent, inveniuntur pondera miscibilium requisita, ut mixtum integrum sit ponderis dati. Ex. gr. Tria simplicia compositionem alicujus medicamenti ingrediuntur, dosis unius est* 4, *alterius* 5, *tertii* 2 *unciarum: inveniri debent doses singulorum requisitæ, ut pondus compositi sit* 8 *librarum. En calculi typum:*

Pondus { primi / secundi / tertii } simplicis 4 Unc. / 5 / 2

Summa 11 Unc.

11 Unc. − 8 L. − 4 Unc.
16

128 Unc. 1
4 176
512 512 ($46\frac{6}{11}$ Pond. simp. primi
111
1

11 Unc. − 128 Unc. − 5 Unc.
5 1
192
640 640 ($58\frac{2}{11}$ pond. simp. secund.
111
1

11 Unc. − 128 Unc. − 2 Unc.
2 33
256 ($23\frac{3}{11}$ Pond. simp. tertii.
256 111
1

EXAMEN.

Pondus simplicis	primi	$46\frac{6}{11}$ Unc.
	secundi	$58\frac{2}{11}$
	tertii	$23\frac{3}{11}$
Pondus mixti		128 Unc. = 8 lib.

SCHOLION XI.

316. *Subinde compendiis locus datur, quæ* Practicæ Italicæ *nomen ferunt. Ex iis utilissima commemoramus. Nimirum quoniam per Regulam trium ad tres numeros datos invenitur quartus proportionalis* (§. 302), *primus & secundus* (§. 181) *vel etiam primus & tertius* (§. 183) *per eundem, si fieri potest, numerum exacte dividantur, & quoti in ipsorum loca surrogentur: ceu ex subsequente apparet exemplo.*

Pre-

Pretium 3 Lib. *est* 9 Thal. *quantum* 7 libr.
3) 1 3 3

Fac. 21 Thal.

Pretium 14 Lib. *est* 26 Thal. *quant.* 7 libr.
7) 2 2) 1

Fac. 13 Thal.

SCHOLION XII.

317. *Si numerus primus vel tertius fuerit* 1 *& alter eorum non nimis magnus, medius autem heterogeneus, absque reductione in* Schol. 5 (§. 310) *præscripta calculus initur; ut sequens exemplum docet.*

Pret. 1 Lib. *est* 3 th. 8 gr. 6 num. *quant.* 5 L.

5

16 th. 18 gr. 6 num.

Manifestum scilicet est, bis 6 nummos conficere grossum unum, adeoque quinquies 6, grossos 2 & nummos 6. Similiter ter 8 grossi thalerum 1, & insuper bis 8 grossos 16 efficiunt. Quod si ergo thalerus iste 15 reliquis, & 2 priores grossi 16 reliquis addantur, prodibit pretium quæsitum 16 th. 18 gr. 6 num.

SCHOLION XIII.

318. *Si terminus primus vel secundus fuerit* 1, *& in priore casu secundus aut tertius, in posteriore primus in factores resolvi potest; integram sæpe operationem sine scriptionis subsidio mens absolvit: id quod exempla, quæ sequuntur, docent.*

Pretium 1 libr. *est* 24 th. *quantum* 20 libr.
4 4
6
80
6

Fac. 480 th.

Pretium 12 libr. *est* 18 th. *quantum* 1 libr.
3 2
4 18 (6 ($1\frac{1}{2}$ th.
3 4

Potest etiam numerus datus resolvi partim in factores, partim in partes componentes. Ex. gr. 1 *libra constat* 9 *grossis, quodnam est pretium* 35 *librarum?*

Quoniam	1 *libra*	*constat*	9 *grossis*		
constabunt	3 *lib.*	1	*thal.*	3	*gr.*
	30 *lib.*	11	*thal.*	6	*gr.*
	5 *lib.*	1	*thal.*	21	*gr.*
	35 *lib.*	13	*thal.*	9	*gr.*

Hic nempe numerus 35, *per quem multiplicatio fieri debet, resolvitur in partes* 30 *&* 5, *pars vero altera* 30 *in factores* 3 *&* 10.

SCHOLION XIV.

319. *Si numerorum datorum unus fuerit* 1, *multa compendia similia multiplicatio & divisio, sine Abaci* Pythagorici *subsidio peragenda* (§. 116, 120), *suppeditat. Ex. gr. pretium* 9 *librarum est* 20 *thalerorum, quantum est pretium unius? Statim hic apparet, haberi pretium desideratum, si parti decimæ illius, id est* 2 *thaleris, addatur pars nona hujus decimæ, id est,* $\frac{2}{9}$ *unius thaleri, ut adeo inveniatur* $2\frac{2}{9}$ *thal. Item: Pretium* 5 *librarum est* 54 *thalerorum, quantum erit pretium* 1 *libræ? R. Quoniam pretium quæsitum est quinta pars dati, duplum partis decimæ pretii dati* $10\frac{4}{5}$ *thal. erit quæsitum. Item: Pretium* 1 *libræ est* 18 *grossorum, quantum erit librarum* 19? *R. Quoniam* 19 = 20 − 1, *a duplo pretii dati cyphra aucti* (360) *subducatur simplum* (18), *residuum erit pretium* (342 *grossorum*) *quæsitum.*

SCHOLION XV.

320. *Si duo termini ejusdem denominationis unitate differant, singulari quodam compendio utimur, quod ex subjunctis exemplis manifestum. Ex. gr. Pretium* 5 *librarum est* 30 *thalerorum, quantum erit* 4 *librarum? R. Quoniam pretium* 4 *librarum una parte quinta deficere debet a pretio* 5 *librarum, pretium datum* 30 *dividatur per*

5 &

5 & quotus 6 ab eodem ſubtrahatur, relinquitur quæſitum 24. *Item: pretium* 8 *librarum eſt* 24 *thalerorum, quantum erit librarum* 9? *R. Quia pretium* 9 *librarum una parte octava excedit pretium* 8 *librarum, pretium datum* 24 *dividatur per* 8 *& quotus* 3 *eidem addatur, ſumma* 27 *erit quæſitum.*

SCHOLION XVI.

321. *Nonnunquam compendiis pluribus una uti datur:* Ex. gr.

Pret. 100 libr. *eſt* 30 th. 4 gr. *quant.* 50 lib.
50) 2   2) ——   1
Fac. 15 th. 2 gr.
It. Pret. 60 libr. *eſt* 80 th. *quant.* 2520 lib.
60) 1   6   42
480   6
7   7
Fac. 3360 thal.

CAPUT VII.

De Quantitatibus Æquidifferentibus.

DEFINITIO LXI.

322. SI in ſerie trium quantitatum eadem fuerit differentia primæ & ſecundæ, quæ ſecundæ ac tertiæ; eas *continue Æquidifferentes* voco. Si vero in ſerie quatuor eadem fuerit differentia primæ & ſecundæ, quæ tertiæ ac quartæ, *diſcretim Æquidifferentes* appello. Ita 3, 6, 7 & 10 ſunt numeri diſcretim æquidifferentes: 3, 6, & 9 numeri continue æquidifferentes.

SCHOLION.

323. *Dicuntur hæ quantitates vulgo* arithmetice proportionales, (*& vere proportionales, de quibus ante,* geometrice proportionales *appellari ſolent, ut ab iis diſtinguantur:*) *ſed minus proprie, nec ad mentem Veterum.*

COROLLARIUM I.

324. Si termini ſemper creſcunt, in continue æquidifferentibus terminus ſecundus eſt aggregatum ex primo & differentia; tertius ſumma ex ſecundo & differentia: ſi decreſcunt, primus eſt aggregatum ex ſecundo & differentia; ſecundum aggregatum ex tertio & differentia (§. 106).

COROLLARIUM II.

325. Similiter in diſcretim æquidifferentibus ſi termini creſcunt, ſecundus eſt aggregatum ex primo & differentia; quartus ex tertio & differentia: ſi vero decreſcunt, primus eſt aggregatum ex ſecundo & differentia; tertius ex quarto & differentia (§. 106).

THEOREMA LXI.

326. *Si fuerint tres quantitates continue æquidifferentes; ſumma primi & tertii eſt medii dupla.*

DEMONSTRATIO.

4. 7 10
   7 4
————
14 = 14

Si enim termini creſcunt, ſecundus componitur ex primo & differentia, tertius ex ſecundo & differentia (§. 324), adeoque ex primo

mo & differentia dupla. Quare si tertio addatur primus ; summa primi & tertii constabit ex primo duplo & differentia dupla. Erit adeo secundi dupla. *Q. e. d.*

Eodem modo demonstratio procedit, si termini decrescunt.

SCHOLION.

327. *Si terminus primus sit I, secundus II, tertius III, differentia D; demonstratio ocularis erit istiusmodi:*

$$\mathrm{II} = \mathrm{I} + \mathrm{D}$$
$$\mathrm{III} = \mathrm{II} + \mathrm{D}$$

Ergo $\mathrm{III} = \mathrm{I} + 2\mathrm{D}$

Hinc $\mathrm{III} + \mathrm{I} = 2\,\mathrm{I} + 2\,\mathrm{D} = 2\,\mathrm{II}.$

THEOREMA LXII.

328. *Si fuerint quatuor quantitates æquidifferentes; summa primi & quarti æqualis est summæ secundi & tertii.*

DEMONSTRATIO.

$$3-5=8-10$$
$$8 \qquad 3$$
$$13 = 13$$

Si termini crescunt, secundus componitur ex primo & differentia, quartus ex tertio & differentia (§. 325). Quare si primus quarto addatur, aggregatum ex primo, tertio & differentia constat: Si vero secundum tertio addas, aggregatum ex primo, differentia & tertio componitur. Sunt ergo aggregata inter se æqualia (§. 88). *Q. e. d.*

Eodem modo demonstratio procedit, si consequentes termini fuerint antecedentibus minores.

SCHOLION.

329. *Si terminus primus sit I, secundus II, tertius III, quartus IV, differentia D; demonstratio ocularis erit istiusmodi:*

$$\mathrm{II} = \mathrm{I} + \mathrm{D} \qquad \mathrm{IV} = \mathrm{III} + \mathrm{D}$$
$$\mathrm{III} \quad \mathrm{III} \qquad\qquad \mathrm{I} \quad \mathrm{I}$$
$$\mathrm{II} + \mathrm{III} = \mathrm{III} + \mathrm{I} + \mathrm{D} \qquad \mathrm{IV} + \mathrm{I} = \mathrm{I} + \mathrm{III} + \mathrm{D}$$

PROBLEMA XXXIV.

330. *Inter duos numeros 9 & 13 medium æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Addantur numeri dati 9 & 13.
2. Summa 22 dividatur bifariam sive per 2.

Quotus 11 erit numerus quæsitus (§. 326).

PROBLEMA XXXV.

331. *Datis tribus numeris 8, 5, 9, quartum æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Numerus secundus 5 addatur tertio 9.
2. A summa 14 subtrahatur primus 8.

Residuus 6 est quartus quæsitus. (§. 328).

CAPUT VIII.

De Logarithmis.

DEFINITIO LXII.

332. Series quantitatum juxta eandem rationem crefcentium vel decrefcentium vocatur *Progreffio geometrica*. Ex. gr. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128; vel 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1.

DEFINITIO LXIII.

333. Series quantitatum fecundum eandem differentiam crefcentium vel decrefcentium dicitur *Progreffio arithmetica*. Ex. gr. 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, vel 32, 28, 24, 20, 16, 12, 8, 4.

DEFINITIO LXIV.

334. Si numeris in ratione geometrica progredientibus fubfcribantur totidem alii æquidifferentes; dicuntur hi illorum *Logarithmi*: STIFELIUS in *Arithmetica* (a) *Exponentes* vocat. Ex. gr. fint duæ progreffiones:
Geom. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.
Arith. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
erit 0 logarithmus termini primi 1; 5 logarithmus fexti 32; 7 logarithmus octavi 128; &c.

COROLLARIUM I.

335. Si progreffio arithmetica fuerit feries numerorum naturalium & a cyphra incipiat, ut in exemplo allato; logarithmi defignant diftantias numerorum proportionalium ab unitate.

(a) Lib. 3. c. 5. p. 249. b.

COROLLARIUM II.

336. Cumque in progreffione geometrica ab unitate incipiente termini fint dignitates ordine naturali fe mutuo excipientes (§. 250, 332); fi progreffio arithmetica eadem fit, quæ in exemplo allato, logarithmi funt exponentes dignitatum (§. 251). Ex. gr. 2 eft dignitas prima, ejufque exponens 1; 64 dignitas fexta, ejufque exponens 6.

THEOREMA LXIII.

337. *Si logarithmus unitatis fit 0; erit logarithmus facti æqualis aggregato ex logarithmis efficientium.*

DEMONSTRATIO.

Eft enim ut unitas ad factorem unum, ita factor alter ad factum (§. 66). Quare logarithmus facti eft æquidifferentium quartus ad logarithmum unitatis & logarithmos efficientium (§. 334); adeoque differentia inter logarithmum unitatis & fummam logarithmorum efficientium (§. 332). Sed logarithmus unitatis eft 0, *per hypoth.* Ergo fumma ex logarithmis efficientium eft logarithmus facti. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

338. Cum factores quadrati fint inter fe æquales, hoc eft, Quadratum fit factum ex Radice in feipfam (§. 246); logarithmus Quadrati eft duplus logarithmi Radicis.

COROL-

COROLLARIUM II.

339. Eodem modo patet, logarithmum Cubi esse triplum (§. 248); Biquadrati quadruplum; Potentiæ quintæ quintuplum; sextæ sextuplum &c. logarithmi Radicis (§. 250).

COROLLARIUM III.

340. Est ergo unitas ad exponentem dignitatis, ut logarithmus Radicis ad logarithmum Potentiæ, seu ipsius Dignitatis (§. 251, 255).

COROLLARIUM IV.

341. Quare logarithmus Potentiæ prodit, si logarithmum Radicis multiplices per exponentem ejus (§. 65); adeoque logarithmus Radicis habetur, si logarithmus Dignitatis per ejus exponentem dividatur (§. 210).

SCHOLION.

342. *Ex. gr. 3 summa logarithmorum 1 & 2 est logarithmus producti 8 ex 2 in 4. Similiter 7 summa logarithmorum 2 & 5 est logarithmus producti 128 ex 4 in 32. Porro 3 logarithmus Radicis Quadratæ 8 est dimidius logarithmi 6 Quadrati 64, & 2 logarithmus Radicis Cubicæ 4 est subtriplus logarithmi 6 Cubi 64.*

THEOREMA LXIV.

343. *Si logarithmus unitatis est 0; erit logarithmus quoti æqualis differentiæ logarithmorum divisoris & dividendi.*

DEMONSTRATIO.

Est enim ut divisor ad dividendum ita unitas ad quotum (§. 69). Quare logarithmus quoti est æquidifferentium quartus ad logarithmos divisoris & dividendi atque logarithmum unitatis (§. 334), adeoque differentia inter logarithmum divisoris & summam logarithmorum dividendi & unitatis (§. 331). Sed logarithmus unitatis est 0, *per hypoth.* Ergo differentia logarithmi divisoris a logarithmo dividendi est logarithmus quoti. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

344. *Ex. gr. 2 differentia inter 7 & 5 est logarithmus quoti 4 ex 128 per 32. Similiter 5 differentia inter 8 & 3 est logarithmus quoti 32 ex 256 per 8.*

SCHOLION II.

345. *Progressiones arithmeticas cum geometricis confert, logarithmorum proprietates hactenus recensitas recenset, atque varios eorum usus monstrat* STIFELIUS (*a*): *qui tamen longe cedunt usui logarithmorum in Trigonometria a* Justo BYRGIO *primum reperto* (*b*), *sed a* Johanne NEPERO *supra laudato primum ostenso* (*c*).

PROBLEMA XXXVI.

346. *Numeri cujuscunque logarithmum invenire, ac Canonem logarithmorum pro numeris naturalibus construere.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam 1, 10, 100, 1000, 10000, &c. progressionem geometricam constituunt (§. 332), horum logarithmi arbitrario assumi possunt, modo sint numeri in progressione arithmetica progredientes (§. 334). Ut igitur intermediorum logarithmos per fractiones decimales exprimere liceat; assumantur
0. 00000000, 1. 00000000,
2. 00000000, 3. 00000000,
4. 00000000 &c.

2. Equi-

(a) In *Arithmet.* lib. 1. c. 4. p. 35. & seqq. & lib. [illegible] c. 5. p. 249. b. & 50. (*b*) KEP[illegible]RUS in *Tabul[illegible] Rudolphinis* c. 3. f. 11. (*c*) In *Mirifici Logarithmor[illegible] Canonis descriptione.*

2. Equidem manifeſtum eſt, (§. 334) numerorum, qui in ſcala progreſſionis geometricæ non continentur, logarithmos accuratos haberi non poſſe; adeo tamen veris propinquos reperire licet, ut, ſi uſum ſpectes, accuratis æquipolleant. Quod ut appareat, ponamus inveniendum eſſe logarithmum novenarii ſeu 9. Inter 1.0000000 (A) & 10.0000000 (B) quæratur medius proportionalis C (§. 301) & inter eorum logarithmos 0. 00000000 atque 1.00000000 medius æquidifferens (§. 330), qui erit logarithmus ipſius C (§. 334), hoc eſt numeri ternarium ſuperantis $\frac{1622777}{10000000}$, adeoque a novenario multum diſtantis. Quæratur inter B & C alius medius proportionalis D, qui ad novenarium propius accedit, & inter B & D adhuc alius E, & ita porro alii inter numeros novenario proxime majores & minores, donec tandem reperiatur 9. 0000000, hoc eſt, $9\frac{0000000}{10000000}$ (§. 305): qui cum a novenario ne unica quidem particula millioneſima differat; ejus logarithmus citra errandi periculum pro logarithmo novenarii habetur. Error enim ſemper minor eſſe debet unica millioneſima. Quærantur itaque in quolibet caſu logarithmi mediorum proportionalium, & ita habebitur tandem logarithmus novenarii prope verus 0.95424251.

3. Si eodem modo inter A & C numeros medios proportionales quæras, & convenientes logarithmos ſingulis aſſignes, invenietur tandem logarithmus numeri 2, & ita porro.

CALCULI

CALCULI TYPUS.

	Numeri medii proportionales.	Logarithmi.		Numerii medii proportionales.	Logarithmi.
A	1.0000000	0.00000000	O	9.0021388	0.95434570
C	3.1622777	0.50000000	Q	9.0008737	0.95428467
B	10.0000000	1.00000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	Q	9.0008737	0.95428467
D	5.6234132	0.75000000	R	9.0002412	0.95425415
C	3.1622777	0.50000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
E	7.4989421	0.87500000	S	8.9999250	0.95421889
D	5.6234132	0.75000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
F	8.6596432	0.93750000	T	9.0000831	0.95424652
E	7.4989421	0.87500000	S	8.9999250	0.95423889
B	10.0000000	1.00000000	T	9.0000831	0.95424652
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
H	8.9768713	0.95312500	X	8.9999650	0.95424080
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
I	6.1398170	0.96093750	Y	8.9999845	0.95424217
H	8.9768713	0.95312500	X	8.9999650	0.95424080
I	9.1398170	0.96093750	V	9.0000041	0.95424271
K	9.0579777	0.95703125	Z	8.9999943	0.95424223
H	8.9768713	0.95312500	Y	8.9999845	0.95424217
K	9.0579777	0.95703125	V	9.0000041	0.95424271
L	9.0173333	0.95507812	a	8.9999992	0.95424247
H	8.9768713	0.95312500	Z	8.9999943	0.95424223
L	9.0173333	0.95507812	V	9.0000041	0.95424271
M	8.9970796	0.95410156	b	9.0000016	0.95424259
H	8.9768713	0.95312500	a	8.9999992	0.95424247
L	9.0173333	0.95507812	b	9.0000016	0.95424259
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
O	9.0021388	0.95434570	d	8.9999998	0.95424250
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
O	9.0021388	0.95434570	c	9.0000004	0.95424253
P	8.9996088	0.95422363	e	[illegible].0000000	0.95424251
M	8.9970796	0.95410156	d	8.9999998	0.95424250

4. Enim vero non opus eſt, ut omnium numerorum logarithmi tanto labore inveſtigentur : compoſiti enim cum per alios numeros dividi poſſint (§. 76), adeoque & ex aliis ſe mutuo multiplicantibus (§. 212) oriantur, eorum logarithmi, *per Theor. 63 & 64* (§. 337 *& ſeqq.*) inveniuntur. Ex. gr. ſi logarithmus numeri 9 biſecetur, prodit logarithmus 0.47712125 numeri 3 (§. 338).

COROLLARIUM.

347. Characteriſtica igitur logarithmorum pro numeris ab 1 ad 10, eſt 0; pro numeris a 10 ad 100, eſt 1; pro numeris a 100 ad 1000, eſt 2; &c.

SCHOLION.

348. *Canonem logarithmorum pro numeris naturalibus ab* 1 *uſque ad* 20000, *& a* 90000 *ad* 100000, *primus conſtruxit* Henricus BRIGGIUS, *Profeſſor Geometriæ Savilianus in Academia Oxonienſi, ex conſilio tamen primi inventoris* NEPERI (*a*), *& methodum conſtruendi una expoſuit in ſua* Arithmetica Logarithmica. *Lacunam inter* 20000 *&* 90000 *mox explevit* Adrianus VLACCUS (*b*). *In libellis vulgaribus habetur tantum Canon logarithmorum pro numeris ab* 1 *uſque ad* 10000.

PROBLEMA XXXVII.

349. *Invenire logarithmum pro numeris majoribus, quam in Canone continentur, minoribus tamen* 10000000.

RESOLUTIO.

1. Reſecentur 4 notæ ad ſiniſtram numeri dati, & earum ex Canone excerpatur logarithmus.
2. Characteriſticæ tot addantur unitates, quot notæ ad dextram reſiduæ (§. 347).
3. Logarithmus inventus ſubtrahatur a proxime ſequente in Canone.
4. Inferatur: ut differentia numerorum in Canone evolutorum, ad differentiam tabularem logarithmorum ipſis reſpondentium; ita notæ reſiduæ numeri dati, ad differentiam logarithmicam, *per Probl.* 33 (§. 302) inveniendam : quæ ſi
5. Addatur logarithmo *per n.* 1 *&* 2 invento; ſumma erit logarithmus quæſitus.

Ex. gr. quæritur logarithmus numeri 92375. Reſeca quatuor notas 9237 & characteriſticam 3 logarithmi iis in tabulis minoribus reſpondentis 3.9655309 auge unitate. Hinc
e logarith. numeri 9238 = 3.9655780
ſubduc. log. num. 9237 = 3.9655309

relinquitur differ. tabul. - - 471
Inferatur : 10 — 471 — 5
5) 2. — 1 (§. 316).
235

Jam logarithmo 4.9655309
addatur different. inventa 235

Summa eſt logar. quæſ. 4.9655544

SCHOLION.

350. *Differentiæ equidem logarithmorum non ſunt differentiis numerorum proportionales : ad praxin tamen, ubi in minimis ſcrupuloſi non ſumus, methodus tradita ſufficit, ſi præſertim notæ reſiduæ numeri dati non fuerint adeo multæ. Certe in noſtro caſu adeo exactum reperimus, ut accuratior in Tabulis majoribus* BRIGGII *non occurrat.*

PROBLEMA XXXVIII.

351. *Invenire logarithmum fractionis, cujus numerator minor denominatore.*

(*a*) Vide præfat. ad *Arithmeticam Logarithm.*
(*b*) In altera editione *Arithmeticæ Logarithmicæ* BRIGGII.

RESO-

RESOLUTIO.

1. Logarithmus numeratoris subtrahatur a logarithmo denominatoris.
2. Residuo præfigatur signum subtractionis —.

Ex. gr. Quærendus est logarithmus fractionis $\frac{3}{7}$.

Logarithmus 7 = 0.8450980
Logarithmus 3 = 0.4771213

Logarithmus $\frac{3}{7}$ = —0.3679767

DEMONSTRATIO.

Cum fractio sit quotus, ex divisione numeratoris per denominatorem emergens (§. 238); logarithmus ejus est differentia logarithmorum numeratoris ac denominatoris (§. 343); adeoque si numerator minor denominatore, major logarithmus e minore subtrahendus, quo in casu differentia evadit negativa (§. 105). *Q. e. d.*

SCHOLION.

352. *Logarithmum fractionis propriæ esse negativum, si unitatis sit* 0, *jam notavit* STIFELIUS (*a*), *& mirum non est. Fractio enim minor unitate* (§. 221). *Sed unitatis logarithmus est* 0 (§. 346). *Ergo fractionis logarithmus est nihilo minor.*

COROLLARIUM I.

353. Cum in fractione spuria $\frac{9}{5}$ numerator sit major denominatore; ejus logarithmus habetur, si logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris subtrahitur (§. 238, 343).

Logarithmus 9 = 0.9542425
Logarithmus 5 = 0.6989700

Logarithmus $\frac{9}{5}$ = 0.2552725

COROLLARIUM II.

354. Quoniam integra cum adhærente fractione $3\frac{2}{7}$ ad fractionem spuriam $\frac{23}{7}$ reduci possunt (§. 224); eodem modo invenietur eorum logarithmus.

Logarithmus 23 = 1.3617278
Logarithmus 7 = 0.8450980

Logarithmus $3\frac{2}{7}$ = 0.5166289

(*a*) In *Arithmet. integra*, lib. 3. c. 5. p. 249. b.

PROBLEMA XXXIX.

355. *Invenire numerum logarithmo respondentem, qui in Tabulis accuratus non occurrit.*

RESOLUTIO.

I. Si numerus, cui convenit logarithmus, inter 1000 & 10000 cadit, hoc est, si characteristica fuerit 3 (§. 347);

1. Logarithmus proxime minor dato subtrahatur a proxime majore, itidemque a logarithmo dato.
2. Inferatur: ut differentia prior ad 100, ita secunda ad partes centesimas *per Probl.* 33 (§. 302) inveniendas & numero, qui logarithmo proxime minori in Tabulis respondet, addendas, ut habeatur numerus prope verus, cui logarithmus datus convenit.

Ex. gr. Quæratur numerus respondens Logarithmo 3.7589982

Logarithmus proxime major 3.7590632
————————— minor 3.7589875

Differentia prima 757

Logarithmus datus 3.7589982
— proxime minor. 3.7589875

Differentia secunda 107

757 — 100 — 107   107.00 (14
100   757
10700   313.0
302 8
102

Cum numerus logarithmo minori conveniens sit 5741; quæsitus erit $5741\frac{14}{100}$.

II. Si numerus, cui convenit logarithmus datus, inter 1 & 1000 locum reperiat, hoc est, si characteristica fuerit 0, 1, vel 2 (§. 347); characteristica mutatur

tatur in 3, & logarithmus quæritur inter 1000 & 10000: qui enim ibi eidem respondet numerus, tot fractiones decimales adjunctas habet, quot characteristicæ unitates accessere (§. 346).

Ex. gr. Quæratur numerus logarithmo 1.9201662 conveniens. Cum in Tabulis proxime minori respondeat numerus 83; logarithmus idem evolvitur sub characteristica 3 post 8300, ubi proxime minori respondet numerus 8321. Est itaque quæsitus $83\frac{21}{100}$. Quodsi fractionibus his non fueris contentus per casum primum minores istis inveniri possunt.

PROBLEMA XL.

356. *Invenire numerum convenientem logarithmo majori iis qui in Tabulis continentur.*

RESOLUTIO.

1. A logarithmo dato subtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000, vel 10000, donec relinquatur logarithmus ultimo Tabulæ minor.
2. Quæratur numerus ei respondens (§. 355) &
3. Multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, vel 10000.

Factum est numerus quæsitus (§ 346).

Ex.gr. Quærendus est numerus logarithmi 7.7589982. Subtrahatur logarithmus numeri 10000, qui est 4.0000000, ut relinquatur 3.7589982, cui respondens numerus $5741\frac{11}{100}$ ducatur in 10000 factum 57411100 erit numerus quæsitus.

SCHOLION.

357. *Facile apparet, subtrahi posse logarithmum numeri cujuscunque in Tabula occurrentem, modo per eundem numerum multiplicetur, qui logarithmo residuo respondet. Sed operatio tædiosa evadit.*

PROBLEMA XLI.

358. *Invenire numerum dato logarithmo defectivo respondentem.*

RESOLUTIO.

1. Dato logarithmo defectivo addatur logarithmus ultimus Tabulæ, sive numeri 10000, hoc est, ille ab hoc subtrahatur.
2. Logarithmo residuo conveniens numerus quæratur (§. 355).

Dico, hunc esse numeratorem fractionis, cujus denominator est 10000.

Ex. gr. Quæratur fractio respondens Logar. defectivo — 0.3679767. Hic ex 4.0000000 subd.

relinquit 3.6320233, cui convenit numerus $4285\frac{71}{100}$. Est ergo fractio quæsita $\frac{428571}{1000000}$.

DEMONSTRATIO.

Cum fractio sit quotus ex divisione numeratoris per denominatorem emergens (§. 138); erit unitas ad fractionem ut denominator ad numeratorem (§. 69). Sed ut unitas ad fractionem dato logarithmo defectivo respondentem, ita 10000 ad numerum logarithmo residuo convenientem (§. 337, 66). Ergo si 10000 sumatur pro denominatore, erit numerus iste numerator fractionis quæsitæ (§. 305). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLII.

359. *Datis tribus numeris invenire quartum proportionalem.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus secundi addatur logarithmo tertii.
2. Ab aggregato subtrahatur logarithmus primi.

Residuus est logarithmus quarti quæsiti (§. 302, 337, 343). Ex.

Ex. gr. Sint numeri dati 4, 68 & 3.
Logarith. 68 = 1.8325089
Logarith. 3 = 0.4771213

Aggregatum = 2.3096302
Logarithm. 4 = 0.6020600

Logarith. quæſ. 1.7075702, cui in Tabulis reſpondet numerus 51.

SCHOLION.

360. *Problematis hujus uſus præſtantiſſimus in Trigonometria elucet: cujus gratia pro numeris etiam naturalibus quæſiti ſunt a* BRIGGIO *&* VLACCO *logarithmi, cum* NEPERUS *tantum Canonem, utut diverſæ indolis, logarithmorum pro ſinibus & tangentibus conſtruxiſſet. Tyrones igitur hanc de logarithmis doctrinam tantiſper ſeponant, donec ad Trigonometriam pedem promoverint.*

CAPUT IX.

De Fractionibus Decimalibus.

DEFINITIO LXV.

361. Fractio decimalis* eſt, cujus denominator eſt *articulus* quidam *primarius* 10, 100, 1000, 10000 &c. (§. 305).

COROLLARIUM I.

362. Progrediuntur adeo denominatores in ratione decupla.

SCHOLION I.

363. Ex. gr. *Si fuerit fractio decimalis* $\frac{342857}{100000}$, *eadem æquivalet huic feriei*: $\frac{3}{1}+\frac{4}{10}+\frac{2}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{7}{100000}$, *cujus denominatores* 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 *in ratione decupla progrediuntur.*

COROLLARIUM II.

364. Quoniam logarithmi progreſſionis geometricæ 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, ſunt 0, 1, 2, 3, 4, 5 (§. 346); ſi fractiones decimales ſub forma numerorum integrorum ſcribantur, veluti in noſtro caſu loco $\frac{342857}{100000}$ aut $\frac{3}{1}+\frac{4}{10}+\frac{2}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{7}{100000}$ ſcribatur 3.42857 (§. 306), loco denominatorum numeratoribus ſolitarie poſitis opportune tanquam *apices* adjiciuntur logarithmi. Ita loco fractionis $\frac{342857}{100000}$ ſcribimus $3^{0}.4'\,2''\,8'''\,5^{IV}\,7^{V}$.

COROLLARIUM III.

365. Quoniam apices, qui ſunt logarithmi denominatorum fractionum decimalium, in ſerie numerorum naturalium progrediuntur; ſufficit notæ ultimæ adjici apicem convenientem, ceteris omiſſis, veluti in noſtro caſu 3.42857^{V}.

COROLLARIUM IV.

366. Cum logarithmus fractionis inveniatur, ſi logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris ſubtrahitur (§. 351), denominator autem fractionis decimalis ſit articulus primarius (§. 361), adeoque ejus logarithmus præter characteriſticam nonniſi meris cyphris conſtet (§. 346): a characteriſtica logarithmi numeratoris fractionis decimalis nonniſi characteriſtica logarithmi denominatoris ſubtrahenda, ut habeatur logarithmus fractionis decimalis.

SCHOLION II.

367. *Ex. gr. Si fractio decimalis fuerit* 8.735; *logarithmus numeratoris* 8735 *eſt* 3.9412629, *denominatoris* 1000 *vero* 3.0000000, *adeoque logarithmus fractionis decimalis datæ* 0.9412629. *Si fractio decimalis fuerit* 0.324; *logarithmus numeratoris eſt* 2.5105456, *denominatoris* 1000 *vero* 3.0000000; *conſequenter logarithmus fractionis decimalis* — 1.5105456. *Iidem ergo ſunt*

sunt logarithmi fractionum decimalium, qui numerorum integrorum, nisi quod characteristica differant.

COROLLARIUM V.

368. Quia characteristica logarithmi denominatoris fractionis decimalis eadem est cum apice ultimæ notæ (*§*.*364*); logarithmus fractionis decimalis prodit, si a logarithmi numeratoris characteristica apex ultimæ notæ subducitur (*§*.*366*).

SCHOLION III.

369. Ex. gr. In fractione decimali 8:735''' *apex ultimæ notæ est 3; a logarithmi igitur numeri* 8735, *qui est*, 3. 9412629, *characteristica* 3 *subducitur ternarius, ut prodeat logarithmus fractionis decimalis* 0. 9412629. *Apex iste tot continet unitates, quot denominator habet cyphras, seu quot a puncto sequuntur notæ: unde patet, si nullus adscriptus fuerit apex, tot unitates a characteristica numeratoris subduci, quot denominator cyphras habet, seu quot notæ punctum sequuntur.*

DEFINITIO LXVI.

370. *Fractio decimalis exacta est*, quæ veram exhibet rationem partis, quam designat, ad totum.

Ex. gr. 0. 8 $= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ exprimit rationem partis 4 ad totum 5 veram, cum sit 8 : 10 = 4 : 5 (§. 181).

DEFINITIO LXVII.

371. *Fractio decimalis approximans* est, quæ rationem partis, quam designat, ad totum exhibet prope veram; nempe vel vera minorem, vel majorem; defectu tamen vel excessu infra unitatem notæ ultimæ convenientem existente.

Ex. gr. $\frac{3}{7} >$ 0. 42857, sed $<$ 0. 42858. Exprimit adeo fractio approximans $\frac{42857}{100000}$ rationem nonnisi prope veram, defectu scilicet existente minore quam $\frac{1}{100000}$.

DEFINITIO LXVIII.

372. *Notæ* fractionum decimalium *ejusdem ordinis* dicuntur, quarum iidem sunt denominatores vel apices.

Ex. gr. Si duæ fuerint fractiones decimales 0. 42857 & 0. 0047, notæ 8 & 4 ejusdem ordinis sunt, quoniam utrique respondens denominator est 1000 vel apex ''': nam 8 designat $\frac{8}{1000}$ & 4 denotat $\frac{4}{1000}$.

PROBLEMA XLIII.

373. *Fractiones decimales addere, vel a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam fractiones decimales, perinde ac numeri integri, constant ex notis, quarum unitates in ratione decupla progrediuntur (§.364); notis ejusdem ordinis sub se invicem scriptis, additio & subtractio eodem modo peragitur ac in numeris vulgaribus (*§*. *98*, 103) nisi quod in approximantibus locus ultimus sit incertus (§. 371).

Vide exempla

I. Additionis:

3. 50782	0. 0638
0. 0003	0. 00562
51. 247	7. 138
54. 75512	7. 20742

II. Subſtractionis.

2. 7864	0. 95436
0. 158	0. 08512
2. 6284	0. 86924

PROBLEMA XLIV.

374. *Fractiones decimales per se invicem multiplicare.*

RESO-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 306), multiplicatio peragitur ut in integris (§. 111); hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (§. 364), apex facti notarum in se invicem ductarum inveniatur, si earum apices addantur (§. 337).

Ex. gr. Si multiplicanda fuerit fractio decimalis $\frac{42857}{100000}$ per $\frac{47}{10000}$ hoc est, 0.42857 per 0. 0047 multiplicatio peragitur communi more ducendo 42857 primum in 7, & deinde in 4, sive 40. Quoniam vero apex ultimus multiplicandi est 5 & multiplicatoris 4; summa 9 dat apicem ultimum producti: unde apparet a sinistris adjiciendas esse tres cyphras, quarum prima puncto notata designat locum integrorum.

```
  0.42857
  0.0047
 ---------
  299999
 171428
 ---------
0.002014279
```

COROLLARIUM I.

375. Quodsi factor unus fuerit fractio decimalis approximans, cum fieri possit, ut multiplum notæ deficientis, quæ ultimam 6 proxime sequitur, sit novenario major, consequenter multiplum notæ ultimæ 6 inde augeatur (§. 111); in facto numerus locorum, in quibus notæ sunt incertæ, numerum notarum in factore exacto unitate superat, veluti in nostro exemplo notæ tres ultimæ 584 sunt incertæ, adeoque factum sumitur 0. 801.

```
 2.3576+
   0.34
 --------
  94304
 70728
 --------
0.801584
```

COROLLARIUM II.

376. Si uterque factor fuerit approximans, eodem modo intelligitur, loca in facto incerta unitate excedere numerum notarum factoris longioris, veluti in adjecto exemplo, in quo numerus longior constat notis 5, loca incerta sunt numero 6, adeoque nonnisi duæ notæ sinisteriores 11 certæ sunt. In exemplo anteriore si factor 0. 34 ponatur quoque approximans, nulla prorsus nota certa est.

```
  18.357
    6.34
 ---------
   73428
  55071
 110142
 ---------
 116.38338
```

COROLLARIUM III.

377. Quodsi nota deficiens, quæ proxime sequitur, ultimæ fuerit æqualis in multiplicando & multiplicator exactus; tum in multiplicatione apparet, quot unitatibus augeri debeat multiplum notæ dextimæ, ut nulla in facto nota incerta evadat. Ex. gr. in nostro exemplo, ubi nota deficiens est 6, facto ex 6 in 8 adjiciuntur 4 & alteri ex 6 in 6 adduntur 3.

```
 0.6666
    6.8
 -------
  53332
 39999
 -------
 453322
```

SCHOLION.

378. *Casus alios brevitatis gratia prætermittimus.*

PROBLEMA XLV.

379. *Fractionem decimalem per decimalem dividere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 306), divisio peragitur ut in numeris integris (§. 117); hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (§. 364), apex

apex quoti inveniatur, si apex divisoris ab apice dividendi subtrahatur (§. 343), & dividendo adjungantur cyphræ, si divisor major fuerit vel dividendum non metiatur.

Ex. gr. Si 0. 002014279 dividatur per 0. 0047, quotus est 0. 42857 (§. 374, 210). Nimirum 2014279 dividitur per 47, ut obtineatur quotus 42857. Jam cum notæ divisoris 4 conveniat apex 3, & notæ dividendi 0 apex 4, differentia 1 est apex notæ primæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a partibus decimis, ut omnia loca compleantur eidem præfigitur cyphra. cum nullum fractioni adhæreat integrum. Similiter si 0. 002014279 dividatur per 0. 42857, quotus est 0. 0047 (§. *cit.*). Nimirum 2014279 dividitur per 42857, ut obtineatur quotus 47. Jam cum notæ dividendi 0 conveniat apex 4 & notæ divisoris 4 apex 1, differentia 3 est apex notæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a particulis millesimis (§. 364), eidem præfigendæ sunt cyphræ 3, ut habeatur fractio completa 0. 0047.

COROLLARIUM I.

380. Quodsi divisor fuerit fractio decimalis approximans, adeoque nota ultima vel justo major, vel minor (§. 371); factum ex divisore in quotum duabus ultimis notis deficere potest. Quare cum a notis dividendi vel justo plus, vel minus subtrahatur; ubi divisor ad easdem fuerit promotus, notæ quoti incertæ evadent. Ex. gr. Si dividendus fuerit 21. 3456 & divisor 3. 82 fractio approximans, nonnisi unica nota quoti 5 certa est.

COROLLARIUM II.

381. Si dividendus fuerit fractio decimalis approximans, divisor exactus; nonnisi notam quoti ultimam subinde incertam evadere posse patet.

COROLLARIUM III.

382. Si & divisor, & dividendus fuerint fractiones approximantes, evidens est porro in determinandis locis certis respiciendum esse vel dividendum, vel divisorem, prout divisoris, vel dividendi nota deficiens propior fuerit primæ divisoris notæ. Ex. gr. Si divisor sit 2. 5786, dividendus 3. 067, adeoque cyphris augendus, ut divisio fieri possit; evidens est certitudinem expirare in nota tertia dividendi 6, consequenter junctis duabus cyphris divisionem eo usque continuari, ut prodeat quotus certus 1. 1.

PROBLEMA XLV.

383. *Notas certas, in multiplicatione & divisione fractionum decimalium approximantium, accuratius determinare.*

RESOLUTIO.

Notæ factorum dextimæ sumantur nunc justo majores, nunc justo minores; in divisione nunc nota dextima in dividendo justo major, in divisore justo minor & contra: quæ in utraque multiplicatione ac divisione eædem proveniunt notæ, eæ sunt accuratæ.

Quodsi ergo in exemplo superiori multiplicationis, ubi notæ ultimæ factorum ponuntur justo minores, eorum loco sumantur 18. 358 & 6. 35; factum quod obtinetur 116. 57330 convenit cum superiori 116. 38338 quoad tres notas dextimas 116: eæ igitur solæ certæ sunt. Patet autem certam sic fieri notam tertiam 6, quæ per superiora in dubio relinquebatur (§. 376).

```
  18.358
    6.35
--------
   91790
  55074
 110148
--------
 116.57330
```

Similiter si in exemplo divisionis superiori (§. 382) nunc 3. 068 dividas per 2. 5786, nunc 3. 067 per 2. 5787, quotus utrobi-

utrobique est 1. 1: unde patet, nonnisi duas istas notas certas esse, quas superius tales agnovimus.

SCHOLION.

384. *Ipsa praxis loquetur, nos subinde posse esse contentos, quod notas certas agnoscamus, quæ per superiora (§. 376, 382) tales deprehenduntur, ut adeo tædio repetitæ multiplicationis vel divisionis supersedere queamus.*

CAPUT X.

De Fractionibus Sexagesimalibus.

DEFINITIO LXIX.

385. *Fractiones sexagesimales* sunt, quarum denominatores crescunt in ratione sexagecupla. Dicuntur etiam *Minutiæ physicales.*

SCHOLION.

386. Ex. gr. *Si integrum sit* 1, *fractiones istiusmodi sunt* $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{3600}$, $\frac{1}{216000}$ &c.

COROLLARIUM.

387. Quoniam logarithmi progressionis geometricæ 1,60,3600,216000,12960000, &c. sunt 0, 1, 2, 3, 4, &c. (§. 334); si fractiones sexagesimales instar numerorum integrorum scribendæ, numeratoribus solitarie positis, perinde ac in fractionibus decimalibus, tanquam apices adjiciendi sunt logarithmi. Ex. gr. $\frac{3}{1} = 3^{0}$, $\frac{35}{60} = 35'$, $\frac{46}{3600} = 46''$ &c.

DEFINITIO LXX.

388. Pars sexagesima integri dicitur *Minutum* sive *scrupulum primum*; pars sexagesima minuti primi *Minutum* sive *scrupulum secundum*; pars sexagesima minuti secundi *Minutum* sive *scrupulum tertium*; & ita porro.

COROLLARIUM.

389. Scrupuli adeo primi apex, sive index, est 1, secundi 2, tertii 3, & ita porro (§. 387).

SCHOLION.

390. *Hac ratione fractiones reducuntur ad numeros integros, ut integrorum instar tractari queant.*

PROBLEMA XLVI.

391. *Fractiones sexagesimales addere.*

RESOLUTIO.

Additio eodem prorsus modo peragitur, quo numeri heterogenei in unam summam colliguntur (§. 99).

Ex. gr.	35^{0}	$46'$	$8''$	$15'''$
	17	20	15	40
		14	18	
	53	20	41	55

PROBLEMA XLVII.

392. *Fractiones sexagesimales a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO.

Subtrahuntur a se invicem eodem prorsus modo, quo numerorum heterogeneorum subtractio fieri solet (§. 104).

Ex. gr	28^{0}.	$15'$.	$4''$.	$20'''$
	17	29	18	45
	10	45	45	35

Nimirum unitas mutuo petita a specie majore hic valet 60. Ita $1'' = 60'''$, $1' = 60''$, $1^{0} = 60'$ (§. 388).

PROBLEMA XLVIII.

393. *Fractiones sexagesimales per sexagesimales multiplicare.*

 RESO-

RESOLUTIO.

Multiplicatio fractionum sexagesimalium coincidit cum multiplicatione decimalium (§. 374), nisi quod ex specie minore abjiciatur toties sexagenarius, quoties fieri potest, & tot speciei proxime majori addantur unitates, quoties sexagenarius fuit abjectus (§. 388): id quod divisio per 60 prodit (§. 223).

Ex. gr. Si multiplicandus $3^{\circ}\ 15'\ 38''$, multiplicator $2^{\circ}\ 18'\ 47''$. Duc singulas partes multiplicandi 1°. in 47, 2°. in 18, 3°. in 2; erit factum ex 38 in 47 = 1786 scr. quartis $= 29'''\ 46^{IV}$. Scribuntur adeo 46 pro specie minima infra lineam cum suo apice & $29'''$ reservantur speciei proxime sequenti annumeranda. Cum igitur factum ex $47''$ in $15' = 705'''$; additis 29 prodibunt $734''' = 12''.\ 14'''$. Scribuntur adeo 14 infra lineam & $12''$ reservantur facto proxime sequenti ex 3° in $47''$ addenda. Eodem modo ubi perrexeris, obtinebuntur tandem facta partialia, quæ in unam summam (§. 391) collecta exhibent factum quæsitum $7^{\circ}\ 32'\ 30''\ 38'''\ 46^{IV}$ aut, si prope verum quæsiveris, $7^{\circ}\ 32'\ 31''$, cum species proxime major dimidium illius superet, aut 30 fuerit major. Vide exemplum:

	3°	$15'$	$38''$	
	2	18	47	
	2	33	14	46^{IV}
	58	41	24	
6	31	16		
7°	$32'$	$30''$	$38'''$	46^{IV}

SCHOLION.

394. *Ne tædia divisionis devoranda sint, constructus est* Canon hexacontadon, *qui facta in species resoluta exhibet, veluti factum ex* 38 *in* 47 = 29. 46. *Ratio constructionis ex operatione in Problemate præcepta patet; modo notetur, perinde ac in Abaco* Pythagorico (§. 109), *factorum unum a latere, alterum in fronte Canonis describi.*

PROBLEMA XLIX.

395. *Fractiones sexagesimales per sexagesimales dividere.*

RESOLUTIO.

Divisio peragitur ut in fractionibus decimalibus; nisi quod in multiplicatione quoti per divisorem tenenda sint, quæ paulo ante in multiplicatione præcepimus (§. 393), &, ubi species dividendi prima fuerit minor specie divisoris prima, ista reducenda sit ad speciem proxime minorem, & sequenti addenda, ut divisioni sit locus.

Ex. gr. Si $7^{\circ}\ 32'\ 30''\ 38'''\ 46^{IV}$ dividere jubeamur per $2^{\circ}\ 18'\ 47''$; quære quoties 2 in 7 contineatur, & quoti loco scribe 3°. Duc 3° in $2^{\circ}\ 18'\ 47''$ & factum $6^{\circ}\ 56'\ 21''$ subtrahe ex $7^{\circ}\ 32'\ 30''$, ut relinquatur $36'\ 9''$. Junge residuo speciem sequentem 38 & divisionem eodem modo continua, donec ea tandem fuerit absoluta; quemadmodum ex typo exempli liquet:

$2^{\circ}\ 18'$ $47''$)	7°	$32'$	$30''$	$38'''$	46^{IV}	($3^{\circ}\ 15'$ $38''$
	6	56	21	::	::	
		36	9	38	::	
		34	41	45	::	
		1	27	53	::	
		five	87	53	46	
			87	53	46	
				0		

SCHOLION.

396. *Non absimili modo algorithmus fractionum aliarum quarumcunque absolvitur, quarum denominatores in ratione quacunque data progrediuntur, veluti in duodecupla, quæ olim in divisione mensuræ linearum obtinuit.*

FINIS ARITHMETICÆ.

Figs Arithm:

Fig: 2.

Fig: 1.

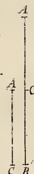


Fig: 3.

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PRÆFATIO.

Erexiguus est eorum numerus, qui Geometriæ pretium suum statuunt: notatione enim delusi cum Arte agrimensoria eam pessime confundunt, nec ea animo ipsorum obversatur idea, quam nomen tam augustum excitare debebat. Omnis nimirum cognitionis distinctæ fundamenta jacit Geometria cum Arithmetica, ita ut non minor in scientiis quam in artibus ejus sit usus. Equidem ob Problemata, quorum resolutionem trado, nonnisi ad locorum distantias variorumque objectorum altitudines, agrorum & camporum areas, corporumque molem dimetiendum conducere videtur; contrarium tamen luce meridiana clarius elucebit, cum ad reliquas Matheseos partes inferius applicabitur. Non hic repeto, quæ de vi Geometriæ in perficiendo intellectu jam superius (*a*) dicta sunt. Ne vero hoc fructu careret Geometriæ studium, a rigore in demonstrando recedendum minime fuit. Hinc definio, quæ vulgo definiri non solent, & passim demonstro, quæ sine probatione

(*a*) In Commentat. de Methodo §. 52, 53.

tione ad aliis aſſumuntur. Equidem haud difficulter prævideo, fore ut imperitis improbetur hic auſus; ſed ſufficit eum probari peritis, & quod majus eſt, methodum noſtram præſtare, ne extra Matheſin ratiocinaturi in ſcopulos incidamus, in quos plerumque omnes hactenus incidiſſe, ſupra etiam (*b*) annotavimus. EUCLIDES & ejus exemplo hactenus omnes ex principio congruentiæ ſolo demonſtrarunt omnia: ſed cum ingenioſiſſimus LEIBNITIUS ſimilitudinis notionem mecum communicaret, atque moneret multum ejus in Geometria eſſe uſum; ego vero meditatus ampliſſimum deprehenderem; ſimilitudinis principium in Geometriam introducere nullus dubitavi. Multa igitur ex eo a me facillime demonſtrata deprehendes, quæ alias ex principio congruentiæ nonniſi per ambages demonſtrari ſolent. Nec injucundum arbitror, quod figurarum conſtructiones inter principia demonſtrandi nunc obtineant locum, quæ alias praxi tantum inſerviebant. Placuit tamen in nova hac editione mea ſimilitudinis notione uti, cum *Leibnitiana* clarior ſit. Tyrones, definitionibus evolutis, neglecta demonſtratione Problemata ſolvant. Hoc labore perfuncti Theorematum hypotheſibus figuras conſtruant, & demonſtrationes empiricas ſuperaddant, quarum in ipſa pertractatione fit mentio (*c*). Tandem eo ordine Elementa relegant, quo conſcripta ſunt. Qui vero mentis acie pollent, illamque diu poſſunt habere attentam, difficultates non ſentient, etiamſi prima ſtatim vice ad ſingula animum advertant,

(*b*) L. c. §. 52.
(*c*) In Schol. Theor. 7. §. 158.

ELEMENTA

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS PRIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ EXHIBET.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Geometriæ.

DEFINITIO I.

1. GEometria est Scientia extensorum quatenus terminata sunt, hoc est, Linearum, Superficierum, & Solidorum.

SCHOLION.

2. *Quemadmodum extensio ex simultanea alicujus rei per locum diffusione oritur; ita in mente repræsentatur, dum multa in uno continuo simul percipimus. Hinc notio extensionis non modo totius ac partium notiones involvit* (§. 9 Arith.)*; sed eadem in rerum aliarum notiones irrepit, quæ ideo per lineas, superficies, ac solida repræsentari possunt. Unde est, quod Geometria rebus plurimis applicari possit, ejusque adeo quam latissime pateat usus.*

DEFINITIO II.

3. *Congruere* dicuntur, quorum iidem termini esse possunt. Nempe *Congruentia* est coincidentia terminorum.

SCHOLION.

4. *Ne definitio negotium facessat, vitanda est vocis* termini *æquivocatio: id quod in sequentibus satis cavetur. A termini vero definitione consulto abstinemus, ne ad demonstrationes metaphysicas dilabamur.*

DEFINITIO III.

5. *Eundem situm habere* dicuntur, inter quæ idem extensum poni potest.

DEFINITIO IV.

6. *Punctum* est, quod quaquaversum seipsum terminat, seu quod non habet terminos alios a se distinctos.

COROLLARIUM I.

7. Ergo omne punctum alteri cuicunque congruit (§. 3).

COROLLARIUM II.

8. Nec ullas in eo distinguere licet partes.

SCHOLION.

9. *Hinc* EUCLIDES: Punctum est, *inquit,* cujus pars nulla est. *Nec sine ratione punctum*

punctum ut individuum concipiunt Geometræ, utut tale quid nec imaginari, nec pingere valeamus. In praxi enim ipſa geometrica ſummo cum ſtudio cavendum, ne punctum pars lineæ habeatur, cujus terminus exiſtit.

DEFINITIO V.

Tab. I. Fig. 1. 10. *Linea* deſcribitur, ſi punctum ab uno puncto A ad alterum B movetur.

COROLLARIUM I.

11. Termini igitur lineæ ſecundum longitudinem ſunt puncta A & B; ſecundum latitudinem & profunditatem ipſa ſui terminus eſt (§. *6*).

COROLLARIUM II.

12. Quoniam punctum partes nullas habet (§. 8); linea nec lata, nec profunda eſſe poteſt, ſed in ſolam longitudinem extenditur.

SCHOLION I.

13. *Quid ergo mirum, quod ſecundum latitudinem & profunditatem non habeat terminos a ſe diſtinctos, vi Cor.* 1 (§. 11)?

SCHOLION II.

14. *Quamvis corpus omne tribus dimenſionibus præditum ſit, nec una a reliquis actu ſeparari queat; neceſſarium tamen ac perutile eſt, ut unam abſque reliquis conſideremus. Neceſſitatem intellectus finitudo injungit, qui ad multa una diffundi nequit & hinc per abſtractionem divellere tenetur, quæ nexu indivulſo natura conjunxit. Utilitatem hujus abſtractionis caſus innumeri perſuadent, in quibus unam dimenſionem, neglectis ceteris, cognoſcere jubemur; ex. gr. altitudinem turris ſine latitudine ac profunditate ipſius, latitudinem fluminis ſine longitudine ac profunditate ejuſdem.*

DEFINITIO VI.

15. *Diſtantia* eſt linea breviſſima inter duo.

SCHOLION.

16. *Ita ex. gr. diſtantia arboris a domo eſt linea breviſſima, qua ab illa ad hanc duci poteſt.*

DEFINITIO VII.

17. *Linea recta* AB eſt, cujus pars quæcumque eſt toti ſimilis. T. F.

COROLLARIUM I.

18. Lineæ igitur rectæ non differunt niſi quantitate (§. 26 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

19. Cum lineæ deſcribantur, ſi punctum ab uno puncto ad alterum movetur (§. 10); motus puncti deſcribentis in omnibus lineæ partibus idem eſſe debet: ſecus enim, diverſitate hujus motus, partes a ſe invicem diſtinguerentur, adeoque ſimiles non forent (§. 24 *Arithm.*), contra definitionem (§. 17). Quoniam itaque motus puncti differre nequit niſi celeritate, ac directione; celeritas vero ad deſcriptionem rectæ nil confert; ſola directionis habenda eſt ratio; conſequenter recta deſcribitur, ſi punctum ab uno puncto A ad alterum B eadem directione movetur.

POSTULATUM I.

20. *A quovis puncto A ad quodvis punctum B poſſe duci lineam rectam.*

POSTULATUM II.

21. *Lineam rectam terminatam AB utrinque produci poſſe.*

DEFINITIO VIII.

22. *Linea curva* eſt, cujus partes toti diſſimiles.

DEFINITIO IX.

23. *Metiri* idem eſt ac quantitatem aliquam pro unitate aſſumere ac alia-

rum

rum homogenearum rationem ad eandem exprimere. Quantitas, quæ pro unitate assumitur, *Mensura* dicitur.

SCHOLION.

24. *Hæc Definitio latior praxi respondet: strictius* EUCLIDES *mensuram definit per quantitatem, quæ aliquoties repetita alteri fit æqualis: quam nos, in Arithmetica, partem aliquotam diximus.*

DEFINITIO X.

25. Hinc *Mensura linearum* est linea recta arbitrariæ longitudinis, in partes minores pro lubitu dividenda & subdividenda. Dividitur autem hodie a Geometris in 10 partes æquales, qui *Pedes* vocantur: unde ipsa *Decempeda* appellatur. Pes subdividitur in 10 *Digitos*; digitus in 10 *Lineas*; & ita porro.

SCHOLION.

26. *Mensuræ longitudo & divisio non eadem est ubivis gentium. Varias differentias, præter* Willebrordum SNELLIUM (*a*), *exponunt* RICCIOLUS (*b*), MALLETUS (*c*), EISENSCHMIDIUS (*d*), *aliique. Aliquas celebrium mensurarum varietates repræsentat Tabula sequens in particulis istiusmodi, qualium Pes regius Parisinus est* 1440. *Continet is nempe* 12 *digitos, digitus* 12 *lineolas, lineola* 10 *particulas, adeoque Pes integer particulas* 1440.

(*a*) In ERATOSTHENE *Batavo*, lib. 2. c. 1. usque ad 5. p. 121. & seqq.
(*b*) In *Geogr. Reform.* lib. 2. c. 7. f. 43 & seqq.
(*c*) *Geometrie pratique*, lib. 1. p. 108.
(*d*) In *Disquisit. nova de ponderibus & mensuris veterum Rom. Græc. & Hebr.* Sect. 3. c. 1. p. 93. & seqq.

Pes Regius Parisinus	1440	Constantinopolitanus	3120
Rhenanus	$1391\frac{7}{10}$	Bononiensis	$1682\frac{2}{5}$
Romanus	1320	Argentorat.	$1282\frac{3}{4}$
Londinen.	1350	Norimberg.	$1346\frac{3}{4}$
Suecicus	1320	Dantiscanus	$1271\frac{1}{2}$
Danicus	$1403\frac{2}{5}$	Halensis	1320
Venetus	1540		

SCHOLION II.

27. *Divisionem mensuræ decimalem primus introduxit* STEVINUS, *teste ipsius* Geometria practica, *dubio procul exemplo* REGIOMONTANI. *Indicem autem decempedarum constituit* 0, *pedum* 1, *digitorum* 2, *linearum* 3 *&c. tanquam denominatorum logarithmos* (§. 364 Arithm.) *quos circello inclusos numeris adscribit. Sed commodius* Joannes BAYERUS *in* Logistica decimali & Stereometria *logarithmos characteribus Romanis expressos apicibus numerorum adscribit. Ex. gr. tres perticæ, quinque pedes, septem digiti & octo lineæ ita scribuntur:* $3^{0}\ 5^{I}\ 7^{II}\ 8^{III}$. *Commodissimum sæpe accidit, si numeri integra, sive decempedas, designantes a fractionibus decimalibus, pedibus nempe, digitis, lineis &c. puncto separentur, uti monuimus in Arithmetica* (§. 306). *Ita loco* $3^{0}\ 5^{I}\ 7^{II}\ 8^{III}$ *scribemus* 3. 578. *Admodum R. P.* Franciscus NOEL *autor est* (*e*), *divisionem* [illegible] *non modo in mensuris, sed & ponderibus Sinicis adhiberi.*

DEFINITIO XI.

28. *Superficies* est magnitudo duabus dimensionibus prædita, seu in longitudinem & latitudinem extensa.

COROLLARIUM.

29. Termini superficiei secundum longitudinem & latitudinem sunt lineæ; secundum profunditatem ipsamet terminus sui existit.

 SCHO-

(*e*) In *Observationibus Mathematico-Physicis in India & China factis*, c. 7. p. 104 & seqq.

SCHOLION.

30. *Nimirum in longitudine nullum assumi potest punctum, cui non respondeat aliqua linea secundum latitudinem, & contra.*

DEFINITIO XII.

31. Per *Perimetrum* intelligimus continuum, quo aliud continuum terminatur.

DEFINITIO XIII.

32. *Figura* est continuum perimetro terminatum.

SCHOLION.

33. *Dicitur tam de superficiebus, quam de solidis. In priori casu perimetri sunt lineæ; in posteriori superficies.*

DEFINITIO XIV.

34. *Figura rectilinea* est, cujus perimeter ex lineis rectis; *Curvilinea*, cujus perimeter ex curvis; *Mixtilinea*, cujus perimeter partim ex rectis, partim ex curvis constat.

DEFINITIO XV.

35. *Latus* est linea, quæ est pars perimetri figuræ superficialis.

DEFINITIO XVI.

36. *Planum* seu *figura plana* est, si e quovis puncto perimetri ad quodlibet ejusdem rectam in eadem ducere licet.

DEFINITIO XVII.

Tab. I. Fig. 2. 37. *Circulus* est figura plana, linea in se redeunte terminata, ex cujus singulis punctis ad punctum intermedium C, quod *Centrum* vocari solet, ductæ rectæ sunt inter se æquales. Linea illa *Peripheria* dicitur.

DEFINITIO XVIII.

38. *Chorda* AB est recta a peripheria ad peripheriam ducta.

DEFINITIO XIX.

39. *Diameter* AE est chorda per centrum C transiens. Ejus dimidium AC, sive recta CD ex centro C ad peripheriam ducta, dicitur *Semidiameter*, item *Radius*.

COROLLARIUM.

40. Radii ergo unius circuli inter se æquales sunt (§. 37).

DEFINITIO XX.

41. *Arcus* est pars quantalibet peripheriæ AFB: *Gradus* vero est pars ejusdem trecentesima sexagesima. Quilibet gradus in 60 *Minuta prima*; minutum quodlibet primum in 60 *secunda*; secundum unumquodque in 60 *tertia* &c. subdividitur. EUCLIDES arcum quoque *peripheriam* vocat.

COROLLARIUM.

42. Cum peripheria cujuslibet circuli in 360 gradus dividatur; circuli majoris gradus sunt majores gradibus minoris.

SCHOLION.

43. *Scrupula graduum sunt fractiones sexagesimales* (§. 385 Arithm.) *& apicibus suis notantur* (§. 387 Arithm.). *Gradui tanquam integro, seu unitati, cessit* 0; *minuto primo* 1; *secundo* 2; *tertio* 3; *&c. consequenter gradus cum suis scrupulis eodem modo scribuntur, quo decempeda cum suis* (§. 27). *Ex. gr.* 3 *gradus*, 25 *minuta*, 16 *secunda, ita scribes*: $3^{0}\ 25^{I}\ 16^{II}$. *Etsi autem Ægyptii veteres, quibus hanc divisionem acceptam ferunt, hoc artificio computum Astronomicum a fractionibus liberaverint, cum fractiones sexagesimales instar numerorum integrorum tractari possint, nec sine prudenti consilio eundem in finem eum graduum numerum fecerint, qui per* 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, *exacte divi-*

dividitur, nec minus eum fecerint exponentem rationis, juxta quam scrupula decrescunt, quem 2, 3, 4, 5 & 6 metiuntur; non tamen sine ratione suaserunt, post STEVINUM (*a*), OUGHTREDUS (*b*), WALLISIUS (*c*), *aliique, ut sepositis fractionibus sexagesimalibus, decimales reciperentur: nulla enim in decimalibus reductione minorum fractionum ad majores, vel majorum ad minores opus est; sexagesimales vero non sine tædio reducuntur. Multiplicatio quoque & divisio decimalium facilior quam sexagesimalium* (§. 364, & seqq. 393, & seqq. Arithm.). *Id consilium secuti sunt* Henricus BRIGGIUS *in* Canone triangulorum artificiali *apud* Henricum GELLIBRAND *in* Trigonometria Britannica, Joannes NEWTON *in* Astronomia *pariter ac* Trigonometria Britannica, & Nicolaus MERCATOR *in* Institutionibus Astronomicis. STEVINUS (*d*) *contendit, eandem circuli divisionem antiquitus, in* Seculo sapiente, *quod adstruere conatur, obtinuisse.*

DEFINITIO XXI.

44. *Circuli concentrici* sunt, qui idem centrum habent: *Excentrici* vero, qui habent diversa.

DEFINITIO XXII.

Tab. I. Fig. 2. 45. *Segmentum circuli* est pars ipsius AFBA, arcu AFB & chorda AB comprehensa. Dicitur *Segmentum majus*, quod semicirculo majus est; *minus* vero, quod minus est.

DEFINITIO XXIII.

46. *Sector circuli* est pars ejus ACD duobus radiis AC & CD, atque arcu AD comprehensa.

DEFINITIO XXIV.

Tab. I. Fig. 3. 47. Recta HI circulum in L *tangit*, si ipsi ita occurrit, ut producta tota extra circulum cadat. Circulus vero circulum *intus tangit*, si huic occurrens totus intra hunc; *extus vero tangit*, si eidem occurrens totus extra hunc cadit. Tab. I. Fig. 5. Fig. 4.

COROLLARIUM I.

48. Recta CL, ex centro C ad contactum L ducta, est radius circuli (§. 39).

COROLLARIUM II.

49. Circuli ergo se extus tangentes in L diversa centra C & *c* habent, adeoque eccentrici sunt (§. 44). Fig. 4.

DEFINITIO XXV.

50. Linea AB lineam CD *secat* in E, si eam dirimit in partes CE & ED cis & ultra ipsam sitas. Fig. 6.

COROLLARIUM I.

51. Cum etiam CD ipsam AB dirimat in partes AE & EB cis & ultra CD sitas; si AB secet CD in E, etiam vicissim CD secabit AB in eodem puncto E.

COROLLARIUM II.

52. Si recta MN circulum in O secet, pars ejus ON intra circulum cadit (§. 37). Fig. 7.

COROLLARIUM III.

53. Si circulus circulum secet, cum utriusque peripheria in se redeat (§. 37), pars peripheriæ unius circuli intra alterum cadat necesse est.

DEFINITIO XXVI.

54. *Angulus* est duarum linearum AB & AC in uno puncto A concurrentium mutua inclinatio. Lineæ AB & AC dicuntur *Crura*; punctum concursus A *Vertex anguli.* Tab. I. Fig. 9.

SCHOLION.

55. *Angulus hic, vel unica littera A vertici ejus adscripta, vel ad evitandam in casibus nonnullis confusionem tribus litteris* BAC *indigitatur, ita ut vertici adscripta medio loco ponatur. Sæpe nomen angulo imponit littera minor, veluti* x, *eidem inscripta. Utimur vero angulis ad linearum situm determinandum.*

(*a*) In præf. ad Tract. *de Logistica decimali.*
(*b*) *Clavis Mathemat.* c. 1. p. m. 2.
(*c*) *Algebræ* c. 9. f. 39. Vol. II. *Oper. Math.*
(*d*) In *Cosmographia* lib. 1. def. 6. f. 109. *Operum* Gallice editorum.

DEFINITIO XXVII.

56. *Angulus insistere* dicitur lineæ, in qua crura ejus terminantur.

DEFINITIO XXVIII.

Tab. I. Fig. 9. 57. *Mensura anguli* BAC est arcus DE ex vertice A, radio prorsus arbitrario AE, intra crura ejus AC & AB descriptus.

COROLLARIUM.

58. Anguli ergo distinguuntur per rationem arcuum ex vertice intra crura descriptorum ad peripheriam: distinguuntur enim per illos arcus, arcus vero per rationem ad peripheriam distinguere licet (§. 41 *Geom.* & §. 132 *Arithm.*). Et eadem de causa quantitas anguli æstimatur ex ratione arcus istius ad peripheriam.

SCHOLION.

59. *Tot scilicet graduum & scrupulorum dicitur esse angulus, quot graduum & scrupulorum est arcus DE* (§. 41).

DEFINITIO XXIX.

Tab. I. Fig. 10. 60. *Anguli contigui* FGH & HGI sunt, quorum idem est vertex G & crus unum commune GH.

DEFINITIO XXX.

Tab. I. Fig. 6. 61. Rectæ lineæ AE & EB *in directum* sitæ sunt, si ejusdem rectæ AB partes existunt.

DEFINITIO XXXI.

62. *Angulus deinceps positus* AEC dicitur, qui oritur anguli AED latere uno ED in C producto.

COROLLARIUM I.

63. Habent adeo anguli deinceps positi AEC & AED crus unum AE commune, & crus alterum unius CE in directum situm est cruri alteri alterius ED (§. 61).

COROLLARIUM II.

64. Hinc anguli deinceps positi sunt contigui, sed non contra (§. 60).

DEFINITIO XXXII.

65. *Angulus rectus* KLM est, cui deinceps positus KLN æqualis est.

DEFINITIO XXXIII.

66. *Angulus obliquus* AEC est, cui deinceps positus AED inæqualis. *Angulus acutus* AEC est obliquus minor recto. *Angulus obtusus* AED est obliquus recto major.

DEFINITIO XXXIV.

67. *Anguli verticales*, *o* & *x*, sunt, si crura unius AE & EC in directum jacent cruribus alterius EB & ED.

DEFINITIO XXXV.

68. Si lineæ ST duæ aliæ OA & RB a diversis plagis in diversis punctis A & B occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, *x* & *y*, dicuntur *alterni*.

DEFINITIO XXXVI.

69. Si vero lineæ ST duæ aliæ AP & BR itidem in diversis punctis A & B, sed ab eadem plaga occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, *u* & *y*, item *z* & *y*, dicuntur *oppositi*: & quidem *u* dicitur *oppositus externus*, *z* vero *oppositus internus* ipsius *y*.

DEFINITIO XXXVII.

70. *Angulus ad peripheriam* est angulus ABD, cujus vertex B & crura BA atque BD in peripheria terminantur. Dicitur etiam *Angulus in segmento*.

COROLLARIUM.

71. Intercipitur adeo a duabus chordis AB & BD (§. 38 & 54), atque arcui AD insistit (§. 56).

DEFINITIO XXXVIII.

72. *Angulus ad centrum* est angulus ACD, cujus vertex in centro circuli C est, crura vero AC & CD in peripheria terminantur.

Co-

COROLLARIUM.

73. Angulus ad centrum a duobus radiis intercipitur (§. 39), atque arcui AD insistit (§. 41, 56); consequenter arcus AD ejus mensura (§. 57).

DEFINITIO XXXIX.

74. *Angulus extra centrum* HKI est, cujus vertex K extra centrum est, crura vero HK & IK in peripheria terminantur.

COROLLARIUM.

75. Insistit ergo arcui HI (§. 41, 56).

DEFINITIO XL.

76. *Angulus contactus* HLM est, quem arcus circuli ML cum tangente HL ad contactum efficit.

DEFINITIO XLI.

77. *Angulus segmenti* MLH vel MLI est, quem chorda ML cum tangente HL vel LI ad contactum L efficit.

DEFINITIO XLII.

78. *Linea* KL *perpendicularis* aut *normalis* est ad alteram LM, si cum ea efficit rectum angulum.

COROLLARIUM.

79. Si igitur LK ad NM perpendicularis, anguli ad L deinceps positi æquales sunt (§. 65), & contra.

DEFINITIO XLIII.

80. *Linea* AB est ad alteram AC *obliqua*, si cum ea efficit angulum obliquum.

DEFINITIO XLIV.

81. *Linea* OP *parallela* est alteri QR, si ubique eandem ab ea distantiam servat.

COROLLARIUM.

82. Lineæ ergo parallelæ in infinitum continuatæ non concurrunt.

DEFINITIO XLV.

83. *Lineæ convergentes* TO & VQ sunt, quarum distantia continuo fit minor. Tab. I. Fig. 15.

DEFINITIO XLVI.

84. *Lineæ divergentes* TN & VP sunt, quarum distantia continuo fit major.

DEFINITIO XLVII.

85. *Opponi* dicuntur, e quorum uno ad alterum perpendicularem ducere licet.

SCHOLION.

86. Puncta, absolute considerata, *dicuntur* punctis opponi, *si fuerint termini ejusdem rectæ. Nimirum cum recta sit brevissima linea inter duos terminos* (§. 191), *quævis etiam est perpendicularis inter eas, quæ a puncto ad lineam vel superficiem duci possunt* (§. 224); *perpendicularis vicem in eo casu subit, ubi punctum alterutrum extra lineam vel superficiem sumitur,*

DEFINITIO XLVIII.

87. *Triangulum* est figura tribus lineis terminata.

DEFINITIO XLIX.

88. *Triangulum æquilaterum* ABC est, cujus omnia latera inter se æqualia sunt. In genere *Figura æquilatera* dicitur, cujus latera singula inter se æqualia. Tab. I. Fig. 16.

DEFINITIO L.

89. *Triangulum æquicrurum* sive *Isosceles* DEF est, quod duo latera æqualia habet. Tab. I. Fig. 17.

DEFINITIO LI.

90. *Triangulum scalenum* ACB est, cujus nullum latus alteri æquale, seu cujus singula latera sunt inter se inæqualia. Tab. I. Fig. 18.

DEFI-

DEFINITIO LII.

Tab. I. Fig. 19. 91. *Triangulum rectangulum* KML eſt, cujus angulus unus K rectus eſt.

DEFINITIO LIII.

Tab. I. Fig. 20. 92. *Triangulum obtuſangulum* PNO eſt, cujus angulus unus N eſt obtuſus.

DEFINITIO LIV.

Tab. I. Fig. 16. 93. *Triangulum acutangulum* ACB eſt, cujus ſinguli anguli ſunt acuti.

DEFINITIO LV.

94. *Triangulum obliquangulum* eſt, cujus ſinguli anguli ſunt obliqui.

DEFINITIO LVI.

Tab. I. Fig. 19. 95. *Hypothenuſa* ML eſt latus, in triangulo rectangulo, angulo recto K oppoſitum.

DEFINITIO LVII.

96. *Catheti* ſunt latera trianguli rectanguli MK & KL angulum rectum K intercipientes.

DEFINITIO LVIII.

97. *Figura quadrilatera* eſt, cujus perimeter ex quatuor lateribus conſtat. *Rectangula* dicitur, ſi anguli ejus ſinguli fuerint recti; *obliquangula*, ſi obliqui.

DEFINITIO LIX.

Tab. I. Fig. 21. 98. *Quadratum* ABDC eſt figura quadrilatera, æquilatera, rectangula.

DEFINITIO LX.

Tab. I. Fig. 22. 99. *Rhombus* EFHG eſt figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula.

DEFINITIO LXI.

Tab. I. Fig. 23. 100. *Rectangulum*, ſive *oblongum*, MLKI eſt figura quadrilatera, rectangula, latera oppoſita ML & IK, item IM & LK æqualia habens.

DEFINITIO LXII.

101. *Rhomboides* NOPQ eſt figura quadrilatera, obliquangula, latera oppoſita OP & NQ, item ON & PQ, æqualia habens.

DEFINITIO LXIII.

102. *Parallelogrammum* eſt figura quadrilatera, cujus latera oppoſita ſunt parallela.

DEFINITIO LXIV.

103. *Trapezium* RTUS eſt figura quadrilatera, non parallelogramma. Quidam *Trapezium* appellant figuram quadrilateram, cujus duo tantum latera oppoſita ſunt parallela, quæ alias *Trapezium parallelarum baſium* dici ſolet: figura vero, cujus neutrum latus alteri parallelum, *Trapezoides* iiſdem dicitur.

DEFINITIO LXV.

104. *Figura polygona*, ſeu *multilatera*, ABCED, vel FGHKI, eſt, cujus perimeter ex pluribus, quam quatuor, lateribus componitur. Quodſi latera fuerint quinque, *Pentagonum*; ſi ſex, *Hexagonum*; ſi ſeptem, *Heptagonum*; ſi octo, *Octogonum* &c. dicitur.

DEFINITIO LXVI.

105. *Figura æquiangula* eſt, cujus ſinguli anguli æquales ſunt.

DEFINITIO LXVII.

106. *Figura regularis* eſt figura æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO LXVIII.

107. *Figura irregularis* eſt, quæ non ſimul æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO LXIX.

108. *Figuræ inter ſe æquilateræ* dicuntur,

cuntur, si singula latera unius fuerint sigillatim æqualia singulis lateribus homologis alterius.

DEFINITIO LXX.

109. *Figuræ inter se æquiangulæ* sunt, si singuli anguli unius singulis angulis homologis alterius æquales sunt.

DEFINITIO LXXI.

110. Dicuntur vero tam *anguli* quam *latera homologa*, si eundem ordinem a primo in utraque figura servent.

DEFINITIO LXXII.

Tab. I. Fig. 24. 111. *Diagonalis* PN est recta ex vertice anguli unius P in verticem alterius N ducta.

DEFINITIO LXXIII.

Tab. I. Fig. 19. 112. *Basis figuræ* est perimetri pars ima KL.

COROLLARIUM.

113. Cum situs figuræ ipsi non sit essentialis, quamlibet perimetri partem, seu latus figuræ quodlibet, pro basi assumere licet.

DEFINITIO LXXIV.

Tab. I. Fig. 19. 114. *Vertex figuræ* M est vertex anguli basi KL oppositi.

DEFINITIO LXXV.

115. *Altitudo figuræ* est distantia verticis a basi.

DEFINITIO LXXVI.

116. *Figura* ABCDE dicitur *Circulo inscripta*, si peripheria per vertices singulorum angulorum ipsius transit; tuncque *Circulus figuræ* dicitur *circumscriptus*. Tab. VI. Fig. 107.

DEFINITIO LXXVII.

117. *Figura abcde* dicitur *Circulo circumscripta*, si singula ejus latera peripheriam tangant; tumque *Circulus figuræ* dicitur *inscriptus*.

DEFINITIO LXXVIII.

118. *Mensura figuræ* est quadratum, cujus latus perticæ æquale, diciturque *pertica quadrata*; & in *pedes quadratos*, sicut pes quadratus in *digitos quadratos* dividitur.

DEFINITIO LXXIX.

119. *Eodem modo determinari* dicuntur, si data, per quæ unum determinatur, fuerint similia datis, per quæ determinatur alterum, & utrobique ex datis similibus per easdem regulas reliqua determinantur.

COROLLARIUM.

120. Quæ itaque eodem modo determinantur, in iis coincidunt ea, per quæ discerni debent; adeoque similia sunt (§. 24 *Arith.*)

CAPUT II.

De Propositionibus quibusdam Fundamentalibus.

PROBLEMA I.

Tab. I. Fig. 28. 121. A *Dato puncto* A *ad datum punctum* B *lineam rectam ducere*.

RESOLUTIO.

I. In charta

Linea recta ducitur juxta regulam EF ad puncta data A & B applicatam Tab. I. Fig. 28.

Tab. I. graphio HI, penna, aut plumbagine.
Fig.28. II. In ligno vel saxo

Recta delineatur etiam sine regula, si filum, creta vel cerussa delibutum, punctis datis A & B apprimatur, &, medio digitis prehenso, sursum trahatur, moxque iterum demittatur.

III. In campo

Tab. I. Fig.29. Recta designatur per baculos LK in punctis datis, beneficio libellæ M, ad horizontem perpendiculariter defixos, quorum summitati muccinium, aut folium chartæ mundæ alligatur, si e longinquo videri debeant.

SCHOLION I.

122. *Cum regulæ orichalceæ & argenteæ chartam facile nigrent; iis præferuntur, quæ ex lignis Indicis parantur, ut ebeninæ. His enim accuratam politiem inducere licet, ne sordes facile adhærescant, nec fibræ exiguæ calami graphiique motum uniformem impediant: quod quernis, nuceis, & his similibus familiare vitium.*

SCHOLION II.

123. *Pennæ optimæ sunt, quæ ex corvorum alis evelluntur: propterea quod, anserinis duriores, lineis subtilioribus & purioribus ducendis inserviunt. Baculi vero LK cuspide ferrea K muniuntur, ut eo facilius in terra, præsertim duriore, defigi queant.*

SCHOLION III.

124. *Utendum vero est atramento, non communi, sed Sinico: tum quia commune ob corrosivitatem vitrioli, quod ipsum ingreditur, chalybeam graphii cuspidem arrodit; tum quia Sinicum facilius effluit, etiamsi atrius sit communi. Accedit, quod Sinico lineæ nitidiores ducantur, quam communi.*

PROBLEMA II.

125. *Duobus baculis in solo defixis, tertium, vel plures, in eadem recta cum iis infigere.*

RESOLUTIO.

Baculus ita infigitur, ut oculo in unum directo ceteri non appareant.

Ratio a luminis rectilinea propagatione petenda, de qua in *Opticis*.

PROBLEMA III.

126. *Lineam rectam metiri.*

RESOLUTIO.

Ad manus sit necesse est mensura T (§. 23). Nimirum, pro lineis in charta F datis, abscindantur ex RT 10 partes æquales longitudinis arbitrariæ, quæ pedes designent: intervallum vero 10 pedum RS in residuum lineæ transferatur, quoties fieri potest (§. 25). In campo; vel catena, vel fune cannabino, vel pertica in digitos, pedes, & decempedas legitime divisis utimur. Sufficit autem ultimam decempedam in pedes, & pedem ultimum in digitos dividi. Quodsi ergo lineam rectam metiri jubearis;

I. In charta,

1. Ponatur crus circini unum in A & eo usque aperiatur, donec alterum extremum B attingat.
2. Mox circini crus unum in fine decempedæ alicujus, ex. gr. in 10 ponatur, & notetur quemnam pedem mensuræ alterum attingat, ex. gr. 5. Erit linea AB, 1° 5′.

II. In Campo,

1. In utroque lineæ extremo erigantur baculi (§. 121), &, si ea mensuræ longitudinem superet, constituantur cum iis alii in eadem recta (§. 125).

2. Fu-

2. Funis cannabinus, aut catena, mensuram largiens, ab uno baculo usque ad alterum ita extendatur, ut utrumque ad angulos rectos secet (§. 238): quod perpendiculo appenso evidens redditur.

3. Decempedæ, pedes, atque digiti inter utrumque intercepti numerentur.

SCHOLION I.

127. *Si catena utrinque in annulos desinat, per quos baculos trajicere licet; lineam metimur, baculis hisce cum ceteris in eadem* Tab. I. *recta continuo collocatis* (§. 125). *Notandum* Fig. 31. *tamen, dum baculus ex A in B transfertur, non in vestigio baculi B, sed prope ipsum in D eundem infigi, atque annulorum crassitiem longitudini mensuræ non accenseri debere. Quodsi tamen hæc sit pars mensuræ, eaque subdupla diametri baculi; baculus ex A ablatus in ipso B defigi poterit. Parantur* Tab. I. *autem catenæ PQ ex filis ferreis pedalibus,* Fig. 32. *earumque longitudo tres decempedas excedere vix debet, ne pondere fiant molestæ: quam ob rationem nec filis ferreis nimium crassis utendum.*

SCHOLION II.

128. *Si pertica circa alterum sui extremum, tanquam centrum, per quadrantem circuli elevata, & per alterum rursus demissa lineam metitur; crassities ejus longitudini lineæ repertæ toties addenda, quoties ad eam applicata fuit, aut longitudo perticæ particula crassitiei congruente imminuenda. Ceterum quia perticæ, ab inæqualitate extensionis prorsus liberæ, prærogativam quandam præ catenis & funibus habent; earum extremitates annulis ferreis instrui oportet, ut observantibus, quæ in Scholio præcedente diximus, tanto minus periculi supersit, ne a recta dimetienda declinetur.*

SCHOLION III.

129. *Funes cannabinos humor contrahit & vires diversæ inæqualiter tendunt.* SCHWENTERUS (a) *autor est, cum aliquando exercitiis geometricis in campo vacaret, longitudinem funis, quæ erat 16 pedum, cadente pruina, horæ unius intervallo, ad pedes 15 rediisse. Ut igitur hi navi tollantur, funiculi, ex quibus conficiuntur, in gyros contrarios contorquendi; ipse autem funis oleo ad ignem ferventi immittendus, &, postquam exsiccatus fuerit, per ceram liquefactam trahendus, tandemque cerandus. Nullum longitudinis decrementum notabis, etiamsi funem istiusmodi per diem integrum sub aquis demersum detineas. Ne autem funis humum contingat, sustentaculum Z ipsi* Tab. I. Fig. 33. *supponendum. Perpendiculum, quo ad funem horizontaliter extendendum utimur, ex filo & appenso globo, vel pondere plumbeo constat.*

PROBLEMA IV.

130. *Data longitudine lineæ, in mensura ex. gr.* Parisina; *invenire eandem in mensura alia, ex. gr.* Londinensi, *cujus ad priorem nota est ratio.*

RESOLUTIO.

Sit ex. gr. linea data 186 pedum *Parisinorum*, quæritur quot eadem pedum *Londinensium*? Quoniam pes *Londinensis* est ad *Parisinum*, ut 135 ad 144 (§. 26); inferatur (§. 311 *Arithm.*):

135 : 144 = 186 26784 ($198\frac{54}{135}$ ped. *Londin.*

186	135) 135 : :
864	1328 :
1152	1215 :
144	1134
26784	1080
	54

 PRO-

(a) *Geometr. pract.* lib. 1. Tract. 1. p. 381.

PROBLEMA V.

Tab.II. Fig.34. 131. *Ex dato quovis centro* C, *dato radio quocunque* AC, *Circulum describere.*

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Collocetur circini crus unum in centro dato C, & aperiatur intervallo radii dati AC.

2. Moveatur circinus circa centrum C, ita crus alterum peripheriam designabit (§. 37).

II. In solo & quotiescunque circini apertura tanta fieri nequit, quanta requiritur; radii vice fungitur filum, funiculus, aut virga, sive lignea, sive ferrea.

SCHOLION I.

Tab.II. Fig.35. 132. *Si fune aut filo utimur, cavendum est ne stylus FA, quo peripheria designatur, e situ perpendiculari dimoveatur: id quod impedit filum transversum FE, si fuerit* $AF = 3$, $AE = 4$ *&* $FE = 5$. *Ratio patet per Theorema* Pythagoricum *infra demonstrandum, (§. 417).*

SCHOLION II.

Tab.II. Fig.37. 133. *Circini, ut instrumenta geometrica reliqua, ex orichalco parantur, ob durabilitatem, tractabilitatem, & nitorem hujus metalli. Cuspides tamen crurum ex chalybe fiunt: fert enim ejus durities, ut subtilius exacuantur. Circini, quo ad lineas metiendas & dividendas utimur, crura eadem sunt & invariata. Sed circini, qui peripheriis & arcubus describendis inservit, crus alterum variari potest, ut tam plumbagine, quam atramento Sinico uti detur, prout commodum visum fuerit. Plumbagine nempe utimur, quoties arcus delineantur absoluta operatione rursus delendi. Longitudo vel 3, vel 6 digitorum esse solet.*

COROLLARIUM.

134. Quoniam unius circuli peripheria eodem modo determinatur, quo peripheria alterius cujuscunque (§. 119); omnes peripheriæ sunt inter se similes (§. 120). Eodem modo patet, omnes circulos & semicirculos esse inter se similes.

THEOREMA I.

135. *Diameter* AE *dividit tam peripheriam, quam circulum ipsum, in duas partes æquales.*

DEMONSTRATIO.

Partes peripheriæ ADE & ABE, itemque circuli ADECA & ABECA determinantur, recta AC circa centrum C mota, donec sibi in directum jaceat (§. 131). Sunt adeo arcus ABE & ADE partes peripheriæ, segmenta ABECA & ADECA partes circuli eodem modo determinatæ, adeoque similes (§. 120). Quamobrem illi ad peripheriam, hæc ad circulum eandem rationem habent (§. 170 *Arithm.*); consequenter tum illi, tum hæc inter se æquantur (§. 177 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

136. Super quavis igitur linea AE, [producta, si opus sit, (§. 21)] ex assumto in ea puncto C describi potest semicirculus.

THEOREMA II.

137. *Si ex centro* C *duorum circulorum concentricorum ducantur radii* CDA *&* CEB; *tum arcus* DE *&* BA *ad peripherias, tum sectores* DCE *&* ACB *ad areas suorum circulorum eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Cum circuli concentrici, *per hypoth.* idem centrum C habeant (§. 44), & arcus

Tab. II. Fig. 34. arcus AB atque DE, itemque sectores ACB & DCE describantur, radiis AC & DC a communi termino CDA ad communem terminum CEB motis (§. 131); arcus isti atque sectores eodem modo determinantur (§. 119); consequenter illi peripheriarum, hi circulorum partes similes sunt (§. 120); adeoque illi ad peripherias, hi ad circulos eandem rationem habent (§. 170 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

138. Cum arcus DE & AB, intra crura ejusdem anguli ACB ex ejus vertice C descripti, sint arcus circulorum concentricorum (§. 44); ad suas quoque peripherias eandem rationem habent; consequenter inter se sunt ut peripheriæ (§. 173 *Arithm.*). Quoniam itaque peripheriæ eundem numerum graduum continent (§. 41); ipsi quoque eundem continere debent.

COROLLARIUM II.

139. Quia anguli quantitas æstimatur per rationem arcus ex vertice intra crura descripti ad totam peripheriam (§. 58); perinde est, quocunque radio arcus iste describatur (§. 137).

COROLLARIUM III.

140. Eadem ergo manet anguli quantitas, sive crura producantur, sive minuantur.

THEOREMA III.

Tab. II. Fig. 46. 141. *Angulorum æqualium* A *&* a *mensuræ* BC *&* de *sunt arcus similes: & contra, si angulorum* A *&* a *mensuræ* BC *&* de *similes sunt; anguli æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum anguli cujuscunque A vel *a* quantitas æstimetur per rationem arcus BC, vel *de*, ex vertice A, vel *a* intra crura descripti, ad integram peripheriam (§. 58); si A = *a*, ratio arcuum BC & *de* ad peripherias suorum circulorum eadem esse debet; consequenter cum sint partes suarum peripheriarum (§. 41), similes sunt (§. 170 *Arithm.*) *Quod erat unum.* Tab. II. Fig. 46.

Si arcus BC, & *de*, mensuræ angulorum A, & *a* (§. 57), fuerint similes; ad peripherias, quarum partes sunt (§. 41), eandem rationem habent (§. 170 *Arithm.*). Quare cum quantitas angulorum A & *a* per eam rationem æstimetur (§. 58), eadem omnino esse debet, hoc est, anguli æquales sunt. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

142. Cum arcus similes eandem rationem habeant ad peripherias, quarum sunt partes (§. 170 *Arithm.*); si fuerint partes æqualium peripheriarum, æquales sunt (§. 177 *Arithm.*). Si ergo mensuræ angulorum æqualium fuerint partes ejusdem peripheriæ, vel æqualium peripheriarum; æquales sunt (§. 141); & contra.

THEOREMA IV.

143. *Anguli recti* KLM *mensura est quadrans circuli.* Tab. I. Fig. 11.

DEMONSTRATIO.

Producatur LM in N (§. 21); erit $x = o$ (§. 65). Sed cum ex L super recta NM describi possit semicirculus (§. 136); angulorum x & o mensuræ AC & CB junctim sumtæ conficiunt semicirculum (§. 57). Ergo unius mensura est dimidius semicirculus, hoc est circuli quadrans (§. 142). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

144. Cum quadrans circuli 90° complectatur (§. 41); angulus rectus est 90° (§. 59).

COROLLARIUM II.

145. Omnes adeo recti sunt inter se æquales (§. 141); & æqualis recto etiam rectus est.

COROLLARIUM III.

146. Acutus igitur minor, obtusus major est quam 90° (§. 66).

THEOREMA V.

Tab. I. Fig. 6. 147. *Duo anguli deinceps positi*, x *&* y, *aut quotcunque ad idem punctum* E *super eadem recta* CD *constituti sunt æquales duobus rectis. Et contra, si* x *&* y *fuerint duobus rectis æquales;* CE *sita est in directum ipsi* ED.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in casu priore anguli x & y sunt deinceps positi, *per hypoth.* EC cum ED eandem rectam constituit (§. 62). In casu posteriore omnes anguli constituti sunt super eadem recta CD ad idem punctum E, *per hypoth.* Quare cum ex E super CD describi possit semicirculus (§. 136); in utroque casu mensura omnium angulorum simul est semicirculus (§. 57). Sed idem est mensura duorum rectorum (§. 143). Ergo anguli isti sunt duobus rectis æquales (§. 142). *Quod erat unum.*

Quodsi x & y fuerint duobus rectis æquales, nec tamen CE ponatur ipsi ED in directum sita; recta quædam alia, veluti EA, ipsi ED in directum jacebit (§. 21), atque hinc $o + y$ & x erunt deinceps positi (§. 62), consequenter duobus rectis æquales, *per demonstrata*, adeoque $o + y + x = y + x$ (§. 87 *Arith.* & §. 145 *Geom.*): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arith.*), CE ipsi ED in directum sita. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

148. Anguli, qui sunt deinceps, x & y, aut plures circa idem punctum ejusdem rectæ constituti, si junctim sumantur, conficiunt 180° (§. 144).

COROLLARIUM II.

149. Angulorum deinceps positorum dato uno, alter itidem datur: relinquitur nimirum, si datus ex 180° subducatur.

COROLLARIUM III.

150. Si in campo angulum inaccessum, vel obtusum, Quadrante metiri jubemur, & eum, qui est deinceps, accedere licet; illius loco hunc metimur: ex 180° enim subductus quæsitum relinquit (§. 149).

COROLLARIUM IV.

151. Certus evades, te omnes figuræ rectilineæ angulos in campo exacte dimensum esse, si finita operatione deinceps positos etiam metiaris, & hos singulos illis singulis addas: quodsi enim ubique prodierit summa 180°, operatio rite peracta (§. 148).

PROBLEMA VI.

152. *Angulum metiri.* Tab. Fig.

RESOLUTIO.

Cum anguli ACB mensura sit arcus DE ex centro C intra crura AC & CB descriptus (§. 57); totum negotium huc redit, ut numerus graduum, qui arcui DE competunt, determinetur: id quod fit ope Semicirculi in 180° exactissime divisi. Nimirum

I. In charta,

1. Centrum Semicirculi ad verticem anguli C applicatur, & radius ejus CE cruri CB admovetur.

2. Gra-

Tab. II. Fig. 36. 2. Gradus, in arcu DE inter crura anguli AC & CB intercepto, numerantur.

II. In Campo,

Tab. II. Fig. 38. 1. Instrumentum goniometricum ita collocatur, ut radius ejus CG uni cruri anguli; centrum vero C vertici ejusdem immineat. Prius obtinetur collineando per dioptras F & G, seu pinnulas immobiles ad diametrum perpendiculariter erectas, versus baculum in extremo cruris defixum; posterius vero perpendiculum ad centrum instrumenti applicando.

2. Regula HI circa centrum mobilis versus crus anguli alterum promovetur, donec per pinnulas ipsi affixas baculus in extremo ejus defixus collineanti occurrat.

3. Gradus, quem regula instrumento indicat, notatur.

SCHOLION I.

153. *Semicirculus minor, quo in charta utimur,* Instrumentum transportatorium *vulgo appellatur. In campo quidam circulo integro, quidam nonnisi quadrante utuntur.*

SCHOLION II.

154. *Diameter Transportatorii est trium fere digitorum Rhenanorum; majorum vero Instrumentorum goniometricorum unius pedis, aut ad summum unius cum dimidio. Divisio accurata fieri debet. In Transportatoriis gradus dimidii satisfaciunt; in majoribus dena prima. Angulos in campo Instrumento majore captos, quantum fieri potest, accuratissime in charta designaturi, diametrum Transportatorio non multo minorem diametro ejus Instrumenti, quo in campo usi sunt, & regulam circa centrum mobilem indulgent.*

PROBLEMA VII.

155. *Data quantitate anguli, ipsum describere.* Tab. II. Fig. 36.

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Ducatur recta CB, &

2. Super alterum ejus extremum ponatur centrum Instrumenti transportatorii, ita ut radius ejus cum recta CB coincidat.

3. Numerentur gradus dati ab E versus D & ad gradum ultimum notetur punctum D.

4. Ducatur recta CA, per C & D. Erit ACB angulus quæsitus (§. 141).

II. In campo, Tab. II. Fig. 38.

1. Collocetur Instrumentum goniometricum, ut in Probl. præc. (§. 152).

2. Regula HI circa centrum C ad gradum datum promoveatur.

3. Baculus ita erigi jubeatur, ut per dioptras collineanti occurrat.

THEOREMA VI.

156. *Si recta* AB *alteram* CD *secet in* E; *anguli verticales*, x [illegible] *&* E, *sunt æquales.* Tab. I. Fig. 6.

DEMONSTRATIO.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 180^\circ \\ y + o = 180^\circ \end{array}\right\} \text{(§. 148)}$$

Ergo $x + y = y + o$ (§. 87 *Arithm.*) adeoque $x = o$ (§. 91 *Arithm.*). Eodem modo ostenditur esse $y =$ E. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

157. Quodsi in campo, aut alio in casu angulum inaccessum x metiri jubeamur; accessum vero non neget verticalis o: hunc ejus loco metiri licet.

SCHO-

SCHOLION.

158. *Cum Tyrones sub initium studii mathematici sensibus atque imaginationi nimis adhuc indulgeant, ratiociniis ex assumtis deductis minus adsueti; figuras, per data ex hypothesibus Theorematum assumta, construere ac reliquarum linearum & angulorum per constructionem determinatorum quantitatem explorare* (§.126, 152) *juvat: ita sensus & veritas Propositionis elucescit, & animus ad Demonstrationes genuinas percipiendas excitatur: cum enim sit scire avidus, rationes veritatis nosse desiderat. In Demonstratione magis acquiescunt Tyrones, examine ratiocinationis legitimæ sic facto; non secus ac Theoriæ physicæ magis satisfaciunt, ubi factis experimentis decretoris consonæ deprehenduntur.*

THEOREMA VII.

Tab. I. Fig. 6. 159. *Omnes anguli* x, y, o, E, *&c. circa punctum aliquod* E *constituti, sunt æquales quatuor rectis.*

DEMONSTRATIO.

Describatur ex puncto E, vertice communi angulorum x, y, o, E, &c. (§. 54) intervallo quocunque Ea circulus (§. 131); evidens est mensuras omnium angulorum simul sumtas db, bc, ca, ad &c. conficere integram circuli peripheriam (§. 143). Mensura ergo angulorum x, y, o, E &c. junctim sumtorum est circulus integer (§. 57). Sed circulus est mensura quatuor rectorum (§. 143). Ergo omnes isti anguli æquales sunt quatuor rectis (§. 141). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

160. Omnes itaque anguli, circa idem punctum constituti, junctim 360° conficiunt (§. 144).

THEOREMA VIII.

161. *Quæ sibi mutuo congruunt, ea & æqualia, & similia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Quæ sibi mutuo congruunt, eorum iidem esse possunt termini (§. 3). Ergo unum in locum alterius salva quantitate substituere licet: consequenter æqualia sunt (§. 15 *Arith.*). *Quod erat unum.*

Porro, quoniam quæ sibi mutuo congruunt eosdem terminos habere possunt (§. 3): quin eodem modo determinari queant dubitandum non est. Sunt igitur similia (§. 120). *Quod erat alterum.*

THEOREMA IX.

162. *Quæ æqualia & similia sunt, ea sibi mutuo congruunt.*

DEMONSTRATIO.

Similia differre nequeunt, nisi quantitate (§. 26 *Arithm.*). Quamobrem si æqualia fuerint, prorsus non differunt (§. 15 *Arithm.*). Jam si sibi mutuo superimposita non iisdem terminis continerentur, diversitate terminorum differrent: quod cum sit absurdum, *per demonstrata*, iisdem terminis contineri debent; consequenter sibi mutuo congruunt (§. 3). *Q. e. d.*

THEOREMA X.

163. *Si linea lineæ congruit; singula puncta unius singulis punctis alterius congruere debent.*

DEMONSTRATIO.

Linearum enim, quæ sibi mutuo congruunt, iidem termini esse possunt (§. 3). Sed termini linearum secundum longitudinem sunt duo puncta; secundum latitudinem & profunditatem ipsæmet sui termini existunt (§. 11). Ergo si lineæ congruunt; non modo puncta

puncta extrema, sed etiam omnia intermedia congruere debent. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

164. Si centra & radii duorum circulorum congruunt; etiam peripheriæ, in quibus radii terminantur (§. 39); consequenter circuli ipsi congruere debent (§. 3).

COROLLARIUM II.

165. Ex uno itaque puncto, eodem radio, circulus nonnisi unicus describi potest.

THEOREMA XI.

Tab.II. Fig.39. 166. *Si fuerint duo anguli* BAC *&* bac *æquales, & vertex unius* a *ponatur super verticem alterius* A, *præterea crus illius* ac *super crus hujus* AC; *etiam crus alterum* ab *super alterum* AB *cadet.*

DEMONSTRATIO.

Si negas; necesse est ut *ab*, vel intra angulum BAC, vel extra eum cadat. Ducatur ex A, radio AD, arcus D*f* (§. 131): erit DE mensura anguli BAC, *De* vel *Df* mensura anguli *bac* (§. 39). Ergo, in casu priore, *De* mensura anguli *bac* minor; in posteriore eadem mensura *Df* major foret mensura anguli BAC (§. 20 *Arithm.*). Quod utrumque cum sit absurdum (§. 142); crus *ab* super AB cadit. *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

Tab. I. Fig.9. 167. *Si vertex & crura anguli unius* DAE *supra verticem & crura alterius* BAC *cadant; angulus unus* DAE *alteri* BAC *æqualis est.*

DEMONSTRATIO.

Describatur enim ex communi vertice A, intra crura AD & AE, arcus DE (§. 131); erit is mensura anguli DAE (§. 57). Sed quoniam crura DA & DE supra crura alterius anguli AB & AC cadunt, *per hypoth.* idem arcus DE inter crura AB & AC intercipitur. Est igitur & mensura anguli BAC (§. *cit.*); consequenter DAE = BAC (§. 142). *Q. e. d.* Tab.I. Fig.9.

THEOREMA XIII.

168. *Lineæ rectæ æquales sibi mutuo congrunt.* Tab.II. Fig.40.

DEMONSTRATIO.

Est *ab* = AB, *per hypoth.* Est vero etiam recta *ab* similis rectæ AB (§. 17). Ergo *ab* ipsi AB congruit (§. 162). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

169. Ergo si recta *ab* alteri æquali AB ita applicetur, ut punctum *a* supra A & *ab* supra AB cadat; etiam *b* supra B cadet (§. 3, 11).

COROLLARIUM II.

170. Si rectarum extrema coincidunt; singula puncta unius erunt in recta altera (§. 162); atque hinc inter duo puncta nonnisi unica recta cadit.

COROLLARIUM III.

171. Cum radii circulorum sint lineæ rectæ (§. 39), ubi æquales fuerint, sibi mutuo congruunt (§. 168); consequenter etiam circuli congruere debent (§. 164); atque adeo circuli æquales sunt, quorum æquales sunt radii (§. 161).

COROLLARIUM IV.

172. Quoniam non absimili modo patet, circulum, cujus minor est radius, congruere parti circuli radium majorem habentis; minor est circulus, cujus minor radius; major vero, cujus radius major (§. 20 *Arithm.*).

THEOREMA XIV.

Tab. I. Fig. 2. 173. *Si centro circuli C applicetur lineæ rectæ CD, radio AC æqualis, extremum unum; alterum peripheriam attinget.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam recta CD radio æqualis, *per hypoth.* ipsi congruet (§. 168), adeoque eosdem cum eo terminos habere debet (§. 3). Sed radius ex centro eductus in peripheria terminatur (§. 39). Ergo & recta CD ipsi æqualis, si alterum extremum in C hæreat, altero peripheriam attinget. *Q. e. d.*

THEOREMA XV.

174. *Anguli similes sunt etiam æquales.*

DEMONSTRATIO.

In angulis similibus ea coincidunt, per quæ a se invicem discerni debent (§. 24 *Arithm.*). Quare cum anguli distinguantur per rationem arcuum ex vertice intra crura descriptorum ad peripheriam (§. 58); si anguli sunt similes, arcus isti ad suas peripherias eandem rationem habere, hoc est, & ipsi similes esse debent (§. 141 *Geom.* & §. 170 *Arithm.*). Sunt igitur anguli æquales (§. 141). *Q. e. d.*

THEOREMA XVI.

175. *In figuris similibus anguli homologi sunt æquales, & latera homologa proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

In figuris similibus ea coincidunt, per quæ a se invicem discerni debent (§. 24 *Arithm.*). Quare cum figuræ nequeant distingui nisi per angulos & latera; illi æquales (§. 174), hæc proportionalia esse debent (§. 154 *Arith.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

176. *Sermo nobis tantum est de figuris rectilineis, quarum latera in se spectata omnia inter se similia sunt. Alias addendum foret, latera homologa debere esse insuper inter se similia & similiter posita, ex. gr. arcus circulorum similes convexitatem centro figuræ obvertentes.*

THEOREMA XVII.

177. *Figurarum sibi mutuo congruentium* RTUS & rtus *anguli & latera homologa inter se æqualia sunt.* Ta[b.] F[ig.]

DEMONSTRATIO.

Quoniam figuræ RTUS & *rtus* sibi mutuo congruunt, *per hypoth.* iidem utriusque termini esse possunt (§. 3). Quare cum termini earum sint perimetri (§. 31); una *rtus* supra alteram RTUS ita poni potest, ut *tu* ipsi TU, *tr* ipsi TR, *rs* ipsi RS, &c. congruat. Ergo latera homologa sunt inter se æqualia (§. 161). *Quod erat unum.*

Sunt vero T & *t*, R & *r*, S & *s* &c. vertices; TU, TR, RS, SU, & *tu*, *tr*, *rs*, *su* crura angulorum homologorum (§. 54). Quamobrem & anguli homologi æquales sunt (§. 167). *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

178. *Patet ex Scholio præcedente, quomodo idem Theorema ad figuras quoque non rectilineas extendatur.*

CAPUT

CAPUT III.

De Linearum Rectarum & Triangulorum Symptomatis.

THEOREMA XVIII.

Tab.II. Fig.41. 179. *Si in duobus triangulis* ABC *& abc, fuerit* A=a, AB=ab, AC=ac; *erit etiam* BC=bc, C=c, B=b, *totaque triangula æqualia & similia erunt.*

DEMONSTRATIO.

Concipiamus triangulum *abc* ita poni super alterum ABC, ut punctum *a* super A, & recta *ab* super AB cadat. Quoniam *ab*=AB, *a*=A, & *ac*=AC, *per hypoth.* punctum *b* super B (§. 169), recta *ac* super AC (§. 166), & punctum *c* super C (§. 169); consequenter *bc* super BC (§. 170) cadit, adeoque △ *abc* alteri ABC congruit (§. 3), consequenter *bc*=BC (§. 161), *c*=C, & *b*=B (§. 167), totaque triangula æqualia & similia sunt (§. 161). *Q. e. d.*

PROBLEMA VIII.

180. *Datis duobus lateribus* AB & AC, *cum angulo intercepto* A; *triangulum construere.*

RESOLUTIO.

1. Assumto AB pro basi, in A constituatur angulus datus (§. 155).

2. In crus ejus alterum transferatur altera datarum AC.

3. Tandem ducatur recta BC.

Erit ABC triangulum desideratum (§. 179).

SCHOLION.

181. *Tyrones latera & angulos datos in numeris assumant: quod in aliquibus casibus ad Demonstrationes empiricas distinctius percipiendas proderit, quas supra (§. 158) commendavimus.*

COROLLARIUM I.

182. Determinatis adeo duobus lateribus cum angulo intercepto, tota triangula determinantur.

COROLLARIUM II.

183. Quare si in duobus triangulis ACB & *acb* fiat *a*=A & *ab* : *ac*= AB : AC; triangula eodem modo determinantur (§. 119) adeoque similia sunt (§. 120); consequenter etiam *c*=C & *b*=B, *ab* : *bc* = AB : BC, &c. (§. 175). Tab.II. Fig.41.

THEOREMA XIX.

184. *In triangulo æquicruro* DFE 1° *anguli ad basin* y & u *sunt æquales*; 2° *recta* FG, *quæ a[ngulum] F*E *bifariam secat, basin quoque* DE, & 3° *triangulum ipsum bifariam secat*; *immo* 4° FG *ad basin* DE *perpendicularis.* Tab.II. [Fig.44.]

DEMONSTRATIO.

Nam *o*=*x*, *per hypoth.* DF = FE (§. 89) & FG = FG (§. 81 *Arithm.*). Ergo 1°, *y*=*u*; 2°, DG=GE; 3°, △ DFG=△ GFE (§. 179). Et quia etiam anguli ad G æquales, (*per* §. *cit.*) 4°, FG ad DE normalis est (§. 79). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

185. Cum triangulum æquilaterum sit etiam æquicrurum (§. 88, 89); Theorema præsens de æquilatero itidem verum est.

THEOREMA XX.

Tab. I. Fig. 16. 186. *In triangulo æquilatero* ABC *omnes anguli sunt inter se æquales.*

DEMONSTRATIO.

Est enim AC=CB (§. 88); ergo A=B (§. 184). Est vero etiam AC=AB (§. 88); ergo C=B (§. 184). Quare A=C (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

187. Triangulum itaque æquilaterum est etiam æquiangulum (§. 105).

THEOREMA XXI.

Tab. III. Fig. 55. 188. *Si trianguli* ABC *latus unum* AC *continuetur in* D; *erit angulus externus* DAB *major quolibet interno opposito* B, *vel* C.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur AB, bifariam divisa in F, ductaque recta CF, producenda in G (§. 21) donec fiat FG=FC. Quoniam GC secat AB in F (§. 50), erit $z = y$ (§. 156); consequenter $o = x$ (§. 179). Sed DAB > o (§. 84 *Arithm.*); ergo & DAB > x (§. 89 *Arithm.*). Eodem modo ostenditur esse DAB, aut, quod perinde est (§. 156), ejus verticalem HAC > ACB. *Q. e. d.*

THEOREMA XXII.

Tab. III. Fig. 57. 189. *In omni triangulo* ABC, *latus majus* AC *opponitur majori angulo* B; *minus* AB *minori* C; *& contra.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB < AC, *per hypoth.* parti hujus AD æqualis est (§. 20 *Arithm.*). Ducatur recta BD (§. 121): erit BAD triangulum æquicrurum (§. 89), adeoque $o = x$ (§. 184). Sed $o >$ C (§. 188). Ergo $x >$ C (§. 89 *Arithm.*); consequenter multo magis B > C. *Quod erat unum.*

Sit B > C, *per hypoth.* Si non sit AC > AB, erit vel AC = AB, vel AC < AB; adeoque in casu primo B = C (§. 184), in altero B < C, *per demonst.* Sed cum utrumque hypothesin evertat, absurdum est. Consequenter si angulus B > C, etiam AC > AB. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIII.

190. *In omni triangulo* ABD, *duo latera* AD *&* BD *simul sumta sunt tertio* AB *majora.*

DEMONSTRATIO.

Producatur AD in C (§. 21), donec fiat BD = DC, adeoque AC = AD + DB (§. 88 *Arithm.*): erit △BDC æquicrurum (§. 89) & hinc $y =$ C (§. 184). Cum vero sit $y < x + y$ (§. 84 *Arithm.*), erit etiam C < $x + y$ (§. 89 *Arithm.*). Quare AC, seu AD + DB > AB (§. 189). *Q. e. d.*

THEOREMA XXIV.

191. *Linea recta* AB *est brevissima omnium, quæ intra eosdem terminos* A *&* B *continentur.* Tab. Fig.

DEMONSTRATIO.

Sit curva quæcunque ACB. Ducantur rectæ AC & CB: erit AC + CB > AB (§. 190). Ducantur porro rectæ AD & DC, item CE & EB: erit AD + DC > AC & CE + EB > CB (§. *cit.*), consequenter AD + DC + CE + EB > AC + CB (§. 90 *Arithm.*), adeoque

Tab. I. Fig. 1. que multo magis AD + DC + CE + EB > AB. Quodsi plures ducas subtensas; erit earum aggregatum denuo majus ipsa AB. Quare cum illæ subtensæ cum curva tandem coincidant; erit ea major recta AB intra eosdem terminos contenta. Est ergo recta AB minor curva quacunque intra eosdem terminos contenta, hoc est, omnium linearum brevissima, quæ ab A usque ab B duci possunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

192. Distantia ergo puncti A a puncto B in plano est linea recta (§. 15, 36): cumque inter duo puncta nonnisi unica linea recta contineri possit (§. 170); via in plano brevissima est numero unica.

COROLLARIUM II.

193. Singula itaque peripheriæ puncta a centro circuli æqualiter distant (§. 37).

PROBLEMA IX.

Tab. II. Fig. 42. 194. *Metiri distantiam duorum locorum* A *&* B *ex eodem tertio* C *accessorum.*

RESOLUTIO.

1. In loco C ad arbitrium electo defigatur baculus.
2. Linea AC transferatur, ope funis & catenæ, ex C in *a*, ita ut baculus in *a* defigendus sit cum C & A in eadem recta (§. 125).
3. Eadem ratione ex C in *b* tranferatur linea CB,
4. Investigetur longitudo rectæ *ab* (§. 126). Dico, *ab* esse æqualem distantiæ quæsitæ.

DEMONSTRATIO.

Cum loca A & B punctorum instar in eodem plano sitorum considerentur, eorum distantia est recta AB (§. 192). Quoniam vero A *a* & B *b* sunt lineæ rectæ, *per constr.* & se mutuo secant in C (§. 50),

erit $x = y$ (§. 156).

Præterea $aC = CA$, $bC = CB$ } *per constr.*

Ergo $ba = AB$ (§. 179). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Collocato Instrumento goniometrico in C, investigetur quantitas anguli *x* (§. 152). Tab. I. Fig. 42.
2. Quæratur porro longitudo rectarum AC & BC (§. 126).
3. Ex datis cruribus AC & CB, cum angulo intercepto *x*, construatur juxta Scalam geometricam modicam triangulum *acb* (§. 180).
4. Inveniatur in eadem mensura longitudo basis *ab* (§. 126).

Iidem numeri indicabunt distantiam AB in ea mensura, qua in campo usus es.

DEMONSTRATIO.

Est enim $acb = ACB$, & $ac : cb = AC : CB$, *per constr.* consequenter $cb : ab = CB : AB$ (§. 183). Ergo iidem numeri, qui respondent rectis *cb* & *ab* in mensura modica, etiam rectis CB & AB in majore respondent (§. 155. *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In mensula geometrica, in D horizontaliter collocata, assumatur punctum *c*, & in eo acicula defigatur, ad quam Tab. II. Fig. 43.
2. applicata regula cum dioptris tamdiu huc illucque moveatur, donec per ea prospicienti punctum B occurrat; ducaturque in hoc regulæ situ recta *cb*.

 3. Si-

Tab.II. 3. [illegible]militer collineatio fiat in punctum
Fig.43. A, ducaturque ca.

4. Investigetur longitudo rectarum cA & cB (§. 126) &
5. Ex mensura modica transferantur lineæ istis proportionales ex c in a & b.
6. Tandem in eadem mensura inveniatur longitudo ipsius ab (§. 126).

Iidem numeri indicabunt distantiam AB in mensura majore, qua in campo usus es.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum proxime præcedente.

SCHOLION I.

Tab.[illegible] Fig.42. 195. *Quodsi angustia spatii non permittit, ut integræ* AC *&* BC *in* a *&* b *transferantur; poterunt* aC *&* bC *fieri* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}$ *&c. ipsarum* AC *&* BC: *quo in casu, eodem modo ut in resolutione secunda, demonstrabitur, esse* ab $=\frac{1}{2}$, *vel* $\frac{1}{3}$, *vel* $\frac{1}{4}$ *&c. ipsius* AB.

SCHOLION II.

196. *Notent Tyrones artificium, quo demonstrationes geometricas non modo ad facil[illegible]imam intelligentiam reducere, sed & proprio [illegible] possunt. Nimirum quicquid, vel ex constructione Problematis, aut hypothesi Theorematis, vel ex conspectu figuræ utramque repræsentantis, distincte cognoscitur, per characteres distincte exprimatur; veluti in Demonstratione prima præsentis, quod* x = y aC = AC *&* bC = BC. *Quo facto, dispiciatur cujusnam Theorematum antecedentium hypothesis in iis contineatur: thesis enim illius Theorematis ostendit, quid ex iis consequatur, veluti in nostro exemplo, quod* ab = AB. *Cum* [illegible] *maxima Demonstrationum* [illegible] *ex paucis de congruentia & similitudine triangulorum Theorematis derivetur; eorundem recordatio tandem familiarissima evadat opus est.*

THEOREMA XXV.

197. *Si ex punctis extremis* C *&* O *rectæ alicujus, radiis* CP *&* PO, *qui junctim sumti recta* CO *majores sunt, describantur circuli, ii se mutuo secabunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit CP < CO; erit parti hujus veluti CN æqualis (§. 20 *Arithm.*), adeoque ipsi congruit (§. 168). Quare si ex centro C, radio CP, circulus PNQP describatur (§. 131); erit punctum N in peripheria ipsius (§. 173). Eodem modo ostenditur, si ex centro O radio OP describatur circulus; fore punctum M in peripheria ipsius. Cum ergo CN + NO < CP + PO, *per hypoth.* & CP = CN (§. 40); erit NO < PO (§. 92 *Arithm.*). Sed PO = MO (§. 40 & *per demonst.*). Ergo NO < MO (§. 89 *Arithm.*). Quare punctum N peripheriæ circuli PNQP cadit intra circulum PMRP; consequenter circuli se mutuo secant (§. 52). *Quod erat unum.*

Nec absimili modo idem ostenditur, si fuerit CP > CO, vel CP = CO. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA X.

198. *Super data recta* AB *triangulum æquilaterum construere.* Tab. Fig.

RESOLUTIO.

1. Ex A tanquam centro, intervallo ipsius AB, describatur arcus y, &
2. Ex B, eodem intervallo, alius x (§. 131), qui priorem in C intersecabit (§. 197).
3. Ducantur rectæ AC & CB:

Erit ACB triangulum æquilaterum.

DE-

DEMONSTRATIO.

b. I. Etenim AC = AB, & BC = AB
16. (§. 40). Ergo AC = BC (§. 87 *Arithm.*). Quare triangulum ABC est æquilaterum (§. 88). *Q. e. d.*

PROBLEMA XI.

199. *Data basi* DE, *& crure* DF, *quod illa dimidia majus sit; triangulum æquicrurum construere.*

RESOLUTIO.

b. I. 1. Ex uno basis extremo D, intervallo
17. cruris dati DF, describatur arcus, &

2. ex altero extremo E eodem intervallo arcus alius (§. 131), qui ob DF+EF $\triangleright$ DE, *per hypoth. & constr.* priorem in F interscecabit (§. 197).

3. Ducantur rectæ DF & EF (§. 121). Dico DFE esse triangulum æquicrurum.

DEMONSTRATIO.

DF = FE, *per constr.* Ergo EDF est triangulum æquicrurum (§. 89). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

200. Determinatis ergo basi DE & crure DF, totum triangulum æquicrurum determinatur.

COROLLARIUM II.

201. Duo igitur triangula æquicrura DFE & *dfe* eodem modo determinantur, si fiat DF : DE = *df* : *de* (§. 119); consequenter similia (§. 120), adeoque sibi mutuo æquiangula sunt (§. 175 & 109).

THEOREMA XXVI.

b. II. 202. *Duo semicirculi* CLE *&* DGF
g. 45. *nonnisi in puncto unico* G *se mutuo secare possunt.*

DEMONSTRATIO.

Secent enim, si fieri possit, præterea Tab. II.
se etiam in L. Ducantur ex centris A Fig. 45.
& B ad puncta intersectionum L & G rectæ AL, AG; BL, BG; puncta item intersectionum connectantur recta GL (§. 121). Quoniam BL = BG (§. 40); erit BGL = BLG (§. 184). Sed BGL $\triangleright$ AGL (§. 84 *Arithm.*): ergo BLG $\triangleright$ AGL (§. 89 *Arithm.*). Porro quia AL = AG (§. 40); AGL = ALG (§. 184). Quare BLG $\triangleright$ ALG (§. 89 *Arithm.*): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arithm.*); duo semicirculi nonnisi unico in puncto se mutuo secare possunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

203. Ergo duo integri circuli non nisi duobus in punctis se mutuo secare possunt.

THEOREMA XXVII.

204. *Si in duobus triangulis* ACB Tab. II.
& acb, *fuerit* AC = ac, AB = ab, Fig. 41.
BC = bc; *etiam* A = a, B = b, C = c, *totaque triangula æqualia sunt & similia.*

DEMONSTRATIO.

Ex centro A, radio AC, descriptus concipiatur arcus *y*, & ex centro B, radio BC, alius *x* (§. 131). Concipiamus porro $\triangle acb$ ita poni supra $\triangle ACB$, ut punctum *a* super A, & recta *ab* super AB, cadat. Quoniam *ab* = AB, *per hypoth.* punctum *b* super B cadet (§. 169). Et quia *ac* = AC, & *bc* = BC, *per hypoth.* recta *ac* in arcu *y* & *bc* in arcu *x* terminabitur (§. 17?), consequenter punctum *c* super C cadet (§. 202), & rectæ *ac*, *bc* rectis AC, BC congruent (§. 170). Quare *a* = A; *b* = B,

Tab.II. Fig.41. $b=B$, $c=C$ (§. 167); cumque $\triangle acb$ alteri ACB congruat (§. 3), $\triangle acb$ = & ∽ $\triangle$ ACB (§. 161). *Q. e. d.*

PROBLEMA XII.

Tab. I. Fig. 18. 205. *Datis tribus lateribus* AB, BC, CA, *quorum duo ſimul ſumta* AC *&* BC *tertio* AB *majora ſunt; triangulum conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Aſſumta AB pro baſi, ex A, intervallo ipſius AC, deſcribatur arcus y, &
2. ex B, intervallo ipſius BC, arcus alius x (§. 131), qui ob AC+BC > AB *per hypoth.* priorem in C ſecabit (§. 197).
3. Ducantur rectæ AB & BC (§. 121). Ita factum eſt, quod petebatur.

COROLLARIUM I.

206. Cum ex tribus datis rectis nonniſi unicum triangulum conſtrui poſſit (§. 204); determinatis tribus lateribus, totum triangulum determinatur.

COROLLARIUM II.

207. Quare ſi, in duobus triangulis ACB & acb, fiat AC : AB = $ac : ab$, AC : BC = $ac : bc$, triangula eodem modo determinantur (§. 119); conſequenter ſimilia (§. 120), adeoque ſibi mutuo æquiangula ſunt (§. 175, 109).

PROBLEMA XIII.

Tab.II. Fig.46. 208. *Angulo dato* DAE *æqualem* bac *conſtituere.*

RESOLUTIO.

I. In charta,
1. Ex A, intervallo AC, deſcribatur arcus BC, erit AB=AC (§. 40).
2. Ducatur recta ac=AC, & ex a, intervallo ipſius AB, deſcribatur arcus x; item
3. Ex c, intervallo ipſius CB, alius y, qui ob AB+BC > AC (§. 190), ſeu $ab+bc > ac$ (§. 190), priorem in b interſecabit (§. 197).
4. Ducatur recta ab (§. 121). Dico eſſe a=A.

II. In Solo,
1. Defigatur baculus in C cum A & E, itemque alius in B cum A & D in eadem recta (§. 125).
2. In a & c defigantur baculi, ea lege ut ſit ac=AC.
3. Ad eos funis, vel catena, ita applicetur, ut pars ipſius ab=AB, & altera cb=CB fiat.
4. In b defigatur baculus. Dico eſſe bac=BAC.

Interdum etiam in Solo uti licet modo priore.

DEMONSTRATIO.

In utroque caſu ac=AC, ab=AB, cb=CB, *per conſtruct.* Ergo bac =BAC (§. 204). *Q. e. d.*

PROBLEMA XIV.

209. *Angulum datum* HIK *in duas partes æquales dividere.* Tab. Fig.

RESOLUTIO.

1. Ex centro I ducatur, radio quocunque, arcus LM (§. 131).
2. Ex L & M, intervallo dimidia LM majore, ducantur arcus ſe mutuo ſecantes in N (§. 197).
3. Ducatur recta IN (§. 121). Dico eſſe HIN = NIK.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim IL=IM (§. 40), LN=MN, *per conſtr.* IN = IN. Ergo HIN =NIK (§. 204). *Q. e. d.*

PRO-

PROBLEMA XV.

Tab.II. Fig.50. 210. *Lineam rectam* AB *in duas partes æquales dividere & in medio ejus perpendicularem erigere.*

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Ex A & B, intervallo dimidia AB majore, ducantur arcus se mutuo in C secantes (§. 197).
2. Fiat similis intersectio infra lineam in D (§. *cit.*).
3. Ducatur recta DC (§. 121).
Dico esse AE = EB.

DEMONSTRATIO.

Tr. ACB est æquicrurum (§. 199) & recta CED dividit angulum ACB bifariam (§. 209). Ergo eadem recta CD dividit AB bifariam in E, & ad AB in E perpendicularis est (§. 184). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab.II. Fig.51. 1. Ponatur circinus in A & eo usque aperiatur, donec medium lineæ attingere videatur in D.
2. Intervallum AD transferatur ex B in E: quo facto
3. Non difficile erit determinatu punctum medium F.

II. In Solo,

1. Filum longitudini lineæ AB æquale complicetur, ut punctum medium inveniatur.
2. Hoc acicula infixa notetur & filum lineæ datæ rursus coextendatur.
3. Ad punctum medium baculus in terra defigatur.

Sic factum est, quod petebatur.

SCHOLION.

211. *Duo modi posteriores equidem secandi rectam bifariam mechanici dicuntur, non geometrici, quia tentando res peragitur: illorum tamen in praxi egregius est usus.*

PROBLEMA XVI.

212. *Ex puncto* G *in recta* ML *dato perpendicularem* GI *excitare.*

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Posito circino in G, arbitrario intervallo resecentur utrinque partes æquales GK & GH. Tab.II. Fig.49.
2. Ex punctis K & H, intervallo dimidia KH majore, fiat intersectio in I (§. 197).
3. Ducatur recta GI (§. 121), quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Nam KG = GH, & KI = IH, *per construct.* IG = IG. Ergo anguli ad G sunt æquales (§. 204), consequenter IG ad ML perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Normæ, hoc est, instrumenti ex duabus regulis ad angulum rectum junctis compositi crus unum ita applicetur ad rectam ML, ut anguli vertex supra punctum datum G cadat. Tab.II. Fig.52.
2. Ducatur juxta crus alterum recta IG (§. 121), quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Angulus normæ est rectus, *per hypoth.* Sed ipsi æqualis est IGL (§. 167): ergo IGL est itidem rectus (§. 145), adeo-

adeoque IG ad ML perpendicularis (§. 78).

Tab. II. II. In Solo,
Fig. 52. Norma utimur majore, & juxta crus GI filum extenditur. Aut

Tab. II. 1. Filum KIH, in duas partes æquales in I divisum, ex punctis K & H ex-
Fig. 49. tenditur &

2. In I baculus defigitur, tandemque
3. KH bifariam secatur in G (§. 210).

Dico esse GI ad KH perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

Cum KI=HI, & KG=GH, *per construct.* & GI = GI; anguli ad G deinceps positi sunt æquales (§. 204); consequenter IG ad ML normalis (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA XXVIII.

Tab. III. Fig. 53. 213. *Ex uno puncto* D, *super eadem recta* AB, *nonnisi perpendicularis unica* CD *erigi potest in eodem plano.*

DEMONSTRATIO.

Si fieri potest, sit præterea DE ad idem punctum D perpendicularis, quæ [illegible] anguli ADC cadat: erit ADE angulus rectus (§. 78). Et quoniam CD perpendicularis ad AD *per hypoth.* ADC similiter rectus est (§. *cit.*); consequenter ADE=ADC (§. 145): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arithm.*), ED ad AB perpendicularis esse nequit. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIX.

Tab. III. Fig. 53. 214. *Si recta* CD *perpendicularis ad* DB *continuetur in* F, *erit etiam* DF *ad* DB *perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam CD perpendicularis ad DB *per hypoth.* angulus *x* rectus est (§. 78). Ergo *y* similiter rectus est (§. 65, 145), consequenter DF perpendicularis ad DB (§. 78). *Q. e. d.*

THEOREMA XXX.

215. *Si duo puncta* H *&* Q *alicujus rectæ* HI *a duobus punctis* K *&* L *alterius rectæ* MN *utrinque æqualiter distent; erit* HI *ad* MN *perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam puncta H & Q utrinque a punctis K & L æqualiter distant, *per hypoth.* HK = HL & QK = QL (§. 192). Est vero etiam QH=QH. Ergo $o=x$ (§. 204); consequenter cum HI=HI, anguli ad I æquales (§. 179), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVII.

216. *A dato puncto* H *ad rectam* MN *perpendicularem* HI *demittere.*

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Posito circino in H, intervallo arbitrario, eodem tamen, intersecetur MN in K & L.
2. Ex K & L fiat intersectio in Q (§. 197).
3. Ducatur per Q recta HI (§. 121).

Hæc erit ad MN perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH = LH & KQ=LQ *per construct.* puncta H & Q a punctis K & L utrinque æqualiter distant (§. 192). Ergo HI ad MN perpendicularis (§. 215). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Applicetur norma ad lineam datam ML; ita ut crus unum eandem stringat, alterum vero punctum datum I attingat.

2. Du-

II. 2. Ducatur recta GI (§. 121), quæ ad ML perpendicularis erit.

DEMONSTRATIO.

Eadem est quæ in casu simili Problematis 16 (§. 212).

II. In Solo,

Tab. Aut utimur norma majore, ut in Probl. II. 16, aut

54. 1. Fune ex H extenso designantur puncta K & L & in iis baculi defiguntur. (§. 125).

2. Intervallum KL dividitur bifariam in I (§. 210).

Dico, baculos in H & I defixos perpendicularem HI designare.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH = LH & KI = LI, *per construct.* HI = HI; anguli ad I sunt æquales (§. 204), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXI.

Tab. III. Fig. 56. 217. *Ab uno puncto* H, *ad eandem rectam* LM, *non nisi unica perpendicularis* HI *duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur, si fieri potest, adhuc alia HK ad LM itidem perpendicularis, erit o rectus (§. 78). Quia HI ad LM perpendicularis, *per hypoth.* erit x quoque rectus (§. *cit.*). Est vero $o > x$ (§. 188), adeoque unus rectus altero recto major: quod cum sit absurdum (§. 145), a puncto H ad LM nonnisi unica perpendicularis duci potest. *Q. e. d.*

THEOREMA XXXII.

218. *In omni triangulo rectangulo* HIK *angulus nonnisi* x *rectus est; reliqui* H *&* K *sunt acuti.*

DEMONSTRATIO.

Angulus y rectus est (§. 79). Sed $y > m$, item $y >$ H (§. 188). Ergo K & H sunt recto minores, adeoque acuti (§. 66). *Q. e. d.* Tab. III. Fig. 56.

COROLLARIUM I.

219. Angulorum igitur maximus in triangulo rectangulo est rectus.

COROLLARIUM II.

220. In triangulo rectangulo latus maximum est hypothenusa (§. 95, 189).

THEOREMA XXXIII.

221. *In triangulo obtusangulo* PNO *angulus obtusus nonnisi unicus est, reliqui* P *&* O *sunt acuti.* Tab. I. Fig. 20.

DEMONSTRATIO.

$y+x=2$ rectis (§. 147). Sed y, utpote obtusus *per hypoth.* major recto (§. 66). Ergo x recto minor. Quoniam vero $x >$ O, item $x >$ P (§. 188); erunt O & P multo magis recto minores, adeoque acuti (§. 66). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

222. In triangulo obtusangulo angulorum maximus est obtusus.

COROLLARIUM II.

223. Ergo latus maximum, quod obtuso opponitur (§. 189).

PROBLEMA XXXIV.

224. *Linea perpendicularis* HI *est brevissima omnium, quæ a puncto* H *ad eandem rectam* LM *duci possunt.* Tab. III. Fig. 56.

DEMONSTRATIO.

Quoniam HI perpendicularis ad LM, *per hypoth.* angulus x rectus est (§. 78), adeoque HK hypothenusa (§. 95), consequenter HK $>$ HI (§. 220). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

225. Ergo diſtantia puncti a linea, vel plano, eſt recta ab illo puncto ad lineam vel planum perpendicularis (§. 15).

COROLLARIUM II.

Tab. III. Fig. 58. 226. Quare ſi linea HI fuerit ipſi KL parallela, erunt perpendicula quævis ex illa in hanc demiſſa GE, AB, CD inter ſe æqualia, & contra (§. 81).

COROLLARIUM III.

227. Altitudo figuræ eſt perpendiculum ex vertice in baſin demiſſum (§. 115).

COROLLARIUM IV.

Tab. I. Fig. 19. 228. In triangulo rectangulo angulus K rectus (§. 91), & hinc cathetus unus MK ad alterum KL perpendicularis (§. 78). Ergo ſi KL ſumatur pro baſi, erit M vertex (§. 114), adeoque MK altitudo (§. 227).

COROLLARIUM V.

Tab. I. Fig. 21. 23. 229. Similiter in quadrato & oblongo latus unum cum altero efficit rectum C vel K (§. 98, 100), adeoque unum ad alterum perpendiculare (§. 78). Quod ſi ergo latus unum CD vel IK ſumatur pro baſi; erit A vel L vertex (§. 114), conſequenter AC vel KL altitudo (§. 227).

THEOREMA XXXV.

Tab. III. Fig. 59. 230. *Si* HI *fuerit parallela &* BA *perpendicularis ad* KL; *erit eadem* AB *etiam perpendicularis ad* HI.

DEMONSTRATIO.

Fiat EB=BD & erigantur ex E & D perpendiculares EG & DC (§. 212); erit GE= CD (§. 226), & E=D (§. 78, 145); conſequenter BG=BC & $y=u$ (§. 179). Sed quoniam AB perpendicularis ad KL, *per hypoth.* ideo $u+x=o+y$ (§. 79). Ergo & $x=o$ (§. 91 *Arithm.*). Quare cum porro ſit AB=AB; erit & $m=n$ (§. 179), adeoque BA ad HI perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

231. Sunt ergo EG, AB, CD diſtantiæ tum rectæ KL a recta HI, tum rectæ HI a recta KL (§. 225), adeoque ſi HI parallela ipſi KL, etiam KL parallela eſt ipſi HI (§. 81).

THEOREMA XXXVI.

232. *Parallelæ* AB *&* EF *eidem tertiæ* CD *ſunt etiam parallelæ inter ſe, & parallelis parallelæ ſunt inter ſe parallelæ.*

DEMONSTRATIO.

Ducantur GI & KM perpendiculares ad CD (§. 216): erunt eædem perpendiculares ad AB & EF (§. 214, 230). Ergo GH=KL & HI=LM (§. 226); conſequenter GH+HI=KL+LM (§. 88 *Arithm.*) hoc eſt, GI=KM (§. 86, 87 *Arithm.*); adeoque AB parallela ipſi EF (§. 226). *Quod erat unum.*

Poſterius patet per prius.

THEOREMA XXXVII.

233. *Si duas parallelas* AB *&* CD *ſecet transverſa* EF *in* G *&* H; *erunt* 1°. *anguli alterni* y *&* u *æquales;* 2°. *angulus externus* x *æquatur interno oppoſito* u; 3°. *duo interni oppoſiti* o *&* u *ſunt æquales duobus rectis.*

DEMONSTRATIO.

Si recta EF ſecet parallelas AB & CD ad angulos rectos, omnia manifeſta ſunt per Theorema 35 (§. 230). Si vero oblique ſecet; ducantur perpendiculares GI & HK (§. 212). Producatur GI in M & HK in L (§. 21) donec fiat IM=GI & KL=HK.

1°. Quo-

Tab. III. Fig. 60. 1°. Quoniam GI perpendicularis ad CD, *per construct.* erunt anguli ad I æquales (§. 79). Porro GI = IM, *per constr.* & HI = IH. Ergo GH = HM, & $u = z$ (§. 179). Eodem modo ostenditur esse HG = GL, & $y = t$. Quamobrem & GL = HM (§. 87 *Arithm.*). Est vero etiam HK = GI (§. 226) & hinc HK + KL = GI + IM (§. 88 *Arithm.*), hoc est, HL = GM (§. 86 *Arithm.*) & GH = GH: Unde $t + y = u + z$ (§. 204). Cum itaque $t = y$, & $u = z$ *per demonstrata*: erit $y + y = u + u$ (§. 15 *Arithm.*), hoc est $2y = 2u$, consequenter $y = u$ (§. 94 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

2°. $x = y$ (§. 156), & $u = y$ (*per num.* 1). Ergo $x = u$ (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

3°. $x + o = 180°$ (§. 148). Sed $x = u$ (*per num.* 2). Ergo $u + o = 180°$ (§. 15 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

PROBLEMA XVIII.

Tab. II. Fig. 41. 234. *Datis duobus lateribus* AB *&* BC, *cum angulo* A *uni eorum* BC *opposito; triangulum* ABC *construere.*

RESOLUTIO.

1. Ducta recta AB, in puncto A excitetur angulus dato æqualis (§. 208), factaque AB uni datorum laterum æquali,
2. Ex B, intervallo alterius lateris dati BC, crus anguli AC intersecetur in C.
3. Puncta B & C connectantur recta (§. 121). *Sic factum est, quod petebatur.*
4. Quod si BC < BA; aut bis secabit crus AC, aut idem tangit; adeoque in casu posteriore angulus ad C rectus est (§. 309), in priore constare debet, utrum angulus ad C sit acutus, an obtusus. Tab. II. Fig. 41.

COROLLARIUM I.

235. Cum ex duobus lateribus, atque angulo uni eorum opposito, triangulum construi possit; iis datis, reliqui anguli & crus reliquum una determinantur. Quare si in duobus triangulis ejusdem speciei ABC & abc, fuerit AB = ab, BC = bc, & A = a; erit etiam AC = ac, B = b, C = c, & △ ABC = △ abc.

SCHOLION.

236. *In genere liquet, æqualia esse quæ per æqualia determinantur, seu, quod perinde est, figuras esse æquales quæ ex æqualibus datis eodem modo construuntur. Unde non solum triangulorum, verum etiam reliquarum figurarum congruentia ex hoc principio demonstrari potest.*

COROLLARIUM II.

237. Quodsi in duobus triangulis ejusdem speciei, veluti acutangulis ABC & abc, fuerit A = a & AB : BC = $ab : bc$, triangula eodem modo determinantur (§. 119), adeoque similia sunt (§. 120); consequenter etiam B = b, C = c, BC : CA = $bc : ca$ & CA : AB = $ca : ab$ (§. 175).

THEOREMA XXXVIII.

238. *Perpendicula* KH *&* GI *æquales parallelarum partes* KG *&* HI *intercipiunt.* Tab. III. Fig. 60.

DEMONSTRATIO.

KH = GI (§. 230, 226), $u = y$ (§. 233), & GH = GH. Ergo KG = HI (§. 235). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXIX.

Tab. III. Fig. 61. 239. *Si trianguli cujuscunque* ACB *latus unum* BC *continuetur in* D; *erit angulus externus* DCA *æqualis duobus internis oppositis* y *&* z *simul sumtis.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur CE basi AB parallela, erit $x=y$, & $o=z$ (§. 233); consequenter DCA $= x+o = y+z$ (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XL.

240. *In quovis triangulo* ACB *tres anguli* y, u, z *junctim sumti sunt æquales duobus rectis seu* 180°.

DEMONSTRATIO.

Nam $o+x=y+z$ (§. 239). Ergo $o+x+u=y+z+u$ (§. 88 *Arithm.*). Sed $o+x+u=180°$ (§. 147). Ergo $y+z+u=180°$ (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

Tab. I. Fig. 19. 241. In triangulo igitur rectangulo MKL, duo anguli obliqui M & L junctim sumti efficiunt rectum seu 90°, adeoque semirecti sunt, si triangulum fuerit æquicrurum (§. 184).

COROLLARIUM II.

242. Si unus angulus est obtusus; duo reliqui simul sumti sunt recto minores (§. 66).

COROLLARIUM III.

Tab. I. Fig. 16. 243. In triangulo æquilatero ACB quilibet angulus 60°, nimirum 180 : 3. (§. 186).

COROLLARIUM IV.

244. Cum itaque in triangulo rectangulo necessario angulus unus sit rectus (§. 91); triangulum rectangulum æquilaterum esse nequit.

COROLLARIUM V.

245. Si unus trianguli angulus ex 180° subtrahitur, summa duorum reliquorum relinquitur; &, si summa duorum ex 180° aufertur, residuus fit tertius.

COROLLARIUM VI.

246. Si duo anguli unius trianguli æquentur duobus alterius, sive sigillatim, sive junctim; etiam tertius unius æqualis est tertio alterius (§. 91 *Arithm.*).

COROLLARIUM VII.

247. In quovis triangulo anguli ad basin y & z junctim sumti sunt duobus rectis minores. Tab. II. Fig.

COROLLARIUM VIII.

248. Quoniam in triangulo æquicruro DFE anguli ad basin y & u æquales sunt (§. 184); si angulus ad verticem F subtrahitur a 180°, & residuum bisecatur; unus angulorum æqualium y vel u prodit. Similiter, si duplum anguli unius ad basin y a 180° subtrahitur, angulus ad verticem F relinquitur. Tab. Fig.

PROBLEMA XIX.

249. *In extremitate* F *lineæ* FG *perpendicularem* FH *excitare.* Tab. III. Fig.

RESOLUTIO.

1. Super FG construatur △ æquilaterum FIG (§. 198).
2. Producatur GI in H (§. 21), donec fiat HI=GI.
3. Ducatur recta HF (§. 121): quæ erit ad FG perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam △ FIG est æquilaterum, *per constr.* $o=60°$ & $u=60°$ (§. 243). Ergo $y=120°$ (§. 239); consequenter ob FI = HI *per constr.* $x=30°$ (§. 248). Cum adeo $x+o=90°$; angulus ad F rectus (§. 144) & HF ad FG perpendicularis est (§. 78). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XLI.

Tab. III. Fig. 63. 250. *Si recta* DE *secet rectam* AB *in* C ; *non alibi eandem denuo secabit.*

DEMONSTRATIO.

Occurrat enim, si fieri potest, recta DE alteri AB in alio adhuc puncto, ex. gr. in A : erunt rectæ ADCE puncta duo A & C in recta altera AB, consequenter recta ADCE tota supra AB cadit (§. 170), atque adeo eam non secat (§. 50): quod cum hypothesi repugnet, DE non alibi, quam in C, ipsam AB secare potest. *Q. e. d.*

THEOREMA XLII.

Tab.II. Fig.41. 251. *Si in duobus triangulis* ABC *&* abc, *fuerit* AB=ab, A=a *&* B=b; *erit etiam* AC=ac, BC=bc, C=c, *&* △ ACB=& ∽ △ acb.

DEMONSTRATIO.

Concipiamus △ *abc* poni supra alterum ABC, ita ut punctum *a* super A & recta *ab* super AB cadat. Quoniam *ab*=AB, *a*=A, & *b*=B, *per hypoth.* punctum *b* super B (§. 169), recta *ac* super AC & *bc* super BC (§. 166); consequenter *c* super C (§. 250) cadit. Cum adeo △ *abc* alteri ABC congruat (§. 3); erit *ac*=AC, *bc*=BC, *c*=C (§. 177), & △ *abc*= & ∽ △ ABC (§. 161). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

252. Si in duobus triangulis ACB & *acb* fuerit A = *a*, B = *b* & BC = *bc*; erit etiam C = *c* (§. 246), consequenter AC = *ac*, AB = *ab* & △ ACB = & ∽ △ *acb* (§. 251).

THEOREMA XLIII.

Tab.II. Fig.44. 253. *Si in triangulo* DFE *anguli ad basin* u *&* y *æquales; triangulum est æquicrurum.*

DEMONSTRATIO.

Secet FG angulum F bifariam (§. 209); erit DF = FE (§. 252). Est ergo △ DFE æquicrurum (§. 89). *Q. e. d.* Tab.II. Fig.44.

COROLLARIUM.

254. Si ergo tres anguli fuerint æquales; æquilaterum est (§. 88).

THEOREMA XLIV.

255. *Si duas lineas* AB *&* CD *secet transversa* EF *in* G *&* H, *ita ut vel* 1°. y = u ; *vel* 2°. x = u ; *vel* 3°. o + u = 180° ; *erunt lineæ istæ inter se parallelæ.* Tab. III. Fig. 60.

DEMONSTRATIO.

1. Demittantur ex H & G perpendiculares HK & GI (§. 212); erit K=I (§. 78, 145). Est vero & *y*=*u*, *per hypoth.* & HG=HG. Quare HK =GI (§. 252); consequenter cum HK & GI sint distantiæ linearum AB & CD (§. 225); lineæ AB & CD sunt inter se parallelæ (§. 81). *Quod erat primum.*

2. *x*=*u*, *per hypoth.* *x*=*y* (§. 156). Ergo *y*=*u* (§. 87 *Arithm.*); consequenter AB & CD sunt inter se parallelæ, *per num.* 1. *Quod erat secundum.*

3. *o*+*u*= 180°, *per hypoth.* Sed *o*+*x*= 180° (§. 147). Ergo *u*=*x* (§. 87 *Arithm.*), consequenter AB & CD sunt inter se parallelæ, *per num.* 2. *Quod erat tertium.*

THEOREMA XLV.

256. *Si duæ lineæ* EG *&* AB *fuerint perpendiculares ad eandem tertiam* HI ; *erunt inter se parallelæ.* Tab. III. Fig. 58.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. III. Fig. 58. Fiat AB = EG, ducaturque recta KL; erit HI ipsi KL parallela (§. 81); consequenter EB = GA (§. 238). Quare cum etiam sit GB = GB; erit EGB = ABG (§. 204); consequenter EG ipsi AB parallela (§. 255). *Q. e. d.*

THEOREMA XLVI.

Tab. III. Fig. 64. 257. *Parallelæ* DF *&* GA *inter easdem parallelas* FA *&* DG *sunt æquales. Et contra, si* DF *&* GA *fuerint parallelæ & æquales; erit etiam* FA *ipsi* DG *parallela & æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta DA (§. 121): erit $x = y$ & $o = u$ (§. 233). Quare cum AD = AD, erit DF = GA (§. 251). *Quod erat unum.*

DF = AG, *per hypoth.* & cum eædem lineæ sint parallelæ *per hypoth.* $o = u$ (§. 233). Quare cum etiam sit DA = DA, erit $x = y$ (§. 179); consequenter FA ipsi DG parallela (§. 255), adeoque etiam æqualis, *per num.* 1. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA XX.

Tab. III. Fig. 65. 258. *Per datum punctum* V *parallelam rectæ* RS *ducere.*

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Ex V demittatur perpendicularis VK (§. 216).
2. Ex puncto quolibet T erigatur perpendicularis TA = KV (§. 212).
3. Per V & A ducatur recta MN, quæ erit ipsi RS parallela (§. 226).

Aliter.

1. Regula ad rectam RS applicetur & circinus intervallo VK aperiatur.
2. Crus unum circini juxta ductum regulæ ab R versus S promoveatur.

Ita crus alterum per V parallelam ipsi RS describet (§. 81).

Aliter.

1. Per datum punctum V ducatur utcunque recta RG.
2. In V fiat $o = x$ (§. 208).

Erit VN seu MN parallela ipsi RS (§. 255).

Aliter.

Ex modo præcedente enatus est sequens.

1. Triangulum rectangulum AVN, ex ligno ebenino aut alio Indico paratum, ita applicetur ad rectam RS, ut basis ejus VN parti ipsius congruat.
2. Hypothenusæ ejusdem Trianguli AV applicetur regula RG, quæ altera manu in hoc situ immota detineatur.
3. Triangulum AVN juxta ductum regulæ promoveatur, donec basis punctum V attingat.

Erit enim in quovis situ, basis VN, ob $y = x$, ipsi RS parallela (§. 255). *Q. e. d.*

Aliter.

Utimur interdum *Parallelismo*, ex duabus regulis ligneis potius, quam orichalceis (§. 122) AB & CD composito, quæ ejusdem ubique latitudinis retinaculis EF & GH inter se æqualibus ita conjunguntur, ut retinacula intervallis æqualibus EG & FH a se invicem distent, ipsæ autem regulæ variis intervallis diduci queant. Nimirum

1. Re-

Tab. III. Fig. 67. 1. Regula una debite applicetur ad rectam RS.

2. Altera ad datum punctum V adducatur, &

3. Juxta hujus ductum recta AB per V ducatur; quæ erit ipsi RS parallela.

DEMONSTRATIO.

Ducatur obliqua linea EH (§. 121). Quoniam EG=FH, EF=GH, *per constr.* & EH=EH, erit $o=x$ (§. 204), adeoque FH parallela ipsi EG (§. 255). Sed AB ipsi EG, & RS ipsi FH parallela, *per constr.* Ergo AB parallela ipsi RS (§. 232). *Q. e. d.*

II. In campo,

Tab. III. Fig. 68. Commode utimur modo primo antecedentium, vel

1. In puncto quolibet K defigatur baculus cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 125).

2. Ad V fiat $o=x$ (§. 208).

Erit MV, quæ facile produci poteſt in N (§. 125), ipſi RS parallela (§. 255).

Aliter.

1. In punctis K & I defigantur baculi cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 125).

2. Fiat $u=x$ (§. 208), & TA=VK.

3. In M & N defigantur baculi cum aliis in V & A defixis in eadem recta (§. 125).

Erit MN parallela ipſi RS.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $x=u$, *per conſtr.* erit TA parallela ipſi KV (§. 255); conſequenter $z=y$ (§. 233). Eſt vero etiam TA =KV, *per conſtruct.* & TV=TV. Ergo $m=n$ (§. 179); conſequenter MN parallela ipſi RS (§. 255). *Q. e. d.*

SCHOLION.

259. *Si parallelismis crebro utaris, retinacula continuo affrictu nimis efforantur & a rectitudine cito recedunt ipsi parallelismi. Huic malo præsens remedium attulit* Jacobus Leupoldus, *artifex insignis, qui retinacula ex geminis lamellis orichalceis elasticis, in medio firmiter connexis, & capita clavorum, quibus regulis affiguntur, conica parare solet. Notum vero est, orichalcum ad elasticitatem usque vehementi contusione indurari.*

THEOREMA XLVII.

260. *Per idem punctum* C *eidem rectæ* DE *parallela nonnisi unica* AB *duci potest.* Tab. III. Fig. 69.

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim, ſi fieri poteſt, adhuc alia HG, priorem ſecans in C, cujus adeo pars GC efficit cum parte alterius CB angulum BCG. Ex I erigatur perpendicularis IL (§. 212); erit tum IK ad CG, tum IL ad CB perpendicularis (§. 230), conſequenter anguli CKL (§. 214) & CLK recti (§. 78): quod cum ſit abſurdum (§. 218), per C nonniſi AB ipſi DE parallela duci poteſt. *Q. e. d.*

Aliter.

Angulus NCH=NQD & NCA =NQD (§. 233). Ergo NCH=NCA (§. 87 *Arithm.*): quod cum ſit abſurdum (§. 84 *Arithm.*), HG & AB non ſunt ſimul ipſi DE parallelæ. *Q. e. d.*

THEOREMA XLVIII.

261. *Si recta* NO *secet duas rectas alias* HG & DE *in* C & Q, *ita ut duo* Tab. III. Fig. 69.

Tab. III. Fig. 69. *duo anguli interni oppositi* HCO *&* DQN *fuerint simul sumti duobus rectis majores; lineæ* GH *&* ED *versus eam plagam divergunt.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur ACB parallela ipsi DE per C (§. 258); tum angulus ACO cum angulo DQN efficiet duos rectos (§. 233). Sed HCO & DQN simul sunt duobus rectis majores. *per hypoth.* Ergo HCO > ACO (§. 92 *Arithm.*); consequenter AC intra spatium HCQD cadit. Erigatur perpendicularis PS (§. 212): erit PR = CF (§. 226), consequenter PS > PR (§. 84 *Arithm.*) > CF (§. 89 *Arithm.*). Distantiæ igitur rectarum CH & QD versus H & D crescunt (§. 225), adeoque lineæ CH & QD versus eam plagam divergunt (§. 84). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIX.

262. *Si duas rectas* HG *&* DE *secet transversa* NO *in* C *&* Q, *ita ut anguli* GCO *&* EQN *simul sumti sint duobus rectis minores; lineæ* CG *&* QE *versus eam plagam convergunt.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam CG ipsi QE parallela esse nequit (§. 233), ducatur AB parallela ipsi DE per C (§. 258): tum angulus BCQ cum angulo EQN efficiet duos rectos (§. 233). Sed GCO & EQN simul sumti sunt duobus rectis minores, *per hypoth.* Ergo GCO < BCQ, (§. [illegible] *Arithm.*); consequenter CB extra spatium GCQE cadit. Demittantur perpendiculares LI & CF (§. 216); erit CF = IL (§. 226); consequenter IK < IL (§. 84 *Arithm.*) < CF (§. 89 *Arithm.*). Distantiæ igitur rectarum CG & QE decrescunt versus G & E (§. 225), adeoque lineæ CG & QE versus eam plagam convergunt (§. 83). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

263. Si anguli GCQ & EQC simul sumti fuerint duobus rectis minores; erunt ipsi deinceps positi duobus rectis majores (§. 147). Quare lineæ, quæ versus unam plagam convergunt (§. 262), versus oppositam divergunt (§. 261).

PROBLEMA XXI.

264. *Datis recta* AB, *& angulis adjacentibus* A *&* B, *qui junctim sumti duobus rectis minores sunt, triangulum* ABC *describere.* Tab. Fig.

DEMONSTRATIO.

1. Ad datam rectam AB excitentur anguli dati A & B (§. 155).
2. Crura AC & BC continuentur, donec sibi mutuo occurrant in C (§. 250, 262). ABC triangulum erit desideratum.

COROLLARIUM I.

265. Data ergo linea una, datisque duobus angulis, triangulum determinatur.

COROLLARIUM II.

266. Quare si in duobus triangulis fiat $A = a$, & $B = b$; triangula eodem modo determinantur (§. 119), adeoque similia sunt (§. 120). Tab. Fig.

COROLLARIUM III.

267. Si in duobus triangulis fuerit $A = a$, & $B = b$; consequenter in rectangulis unus obliquorum in uno æqualis uni in altero (§. 145); erit etiam $C = c$ (§. 246); hoc est, △△ ACB & *acb* sibi mutuo æquiangula (§. 109).

(§. 109). Quare △△ sibi mutuo æquiangula similia sunt (§. 296), & hinc latera homologa, seu æqualibus angulis opposita, proportionalia habent (§. 175).

THEOREMA L.

Tab. III. Fig. 70. 268. *Si in triangulo* ABC *recta* DE *basi* AC *parallela ducatur; segmenta crurum cruribus proportionalia sunt; hoc est*, BA : BC = BD : BE = AD : EC; *&* BA : AC = BD : DE; *atque* △ BDE ∽ △ BAC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam DE parallela ipsi AC, erit $x=y$, & $o=u$ (§. 233); adeoque △BDE ∽ △ BAC, & BA : BC = BD : BE, & BA : AC = BD : DE (§. 267). Ergo & BA : BD = BC : BE (§. 173 *Arithm.*); consequenter AD : BD = EC : BE (§. 193 *Arithm.*), seu BD : AD = BE : EC (§. 169 *Arithm.*), vel denique BD : BE = AD : EC (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LI.

Tab. III. Fig. 71. 269. *Recta* FH, *angulum* GFE *bifariam secans, basin* GE *cruribus adjacentibus* EF *&* GF *proportionaliter secat.*

DEMONSTRATIO.

Producatur EF in I (§. 21), donec fiat FI = FG, erit $o+x=y+u$ (§. 239). Sed $o=x$, *per hypoth.* & $y=u$ (§. 184), adeoque $2y=2o$ (§. 15 *Arithm.*). Ergo $o=y$ (§. 94 *Arithm.*); consequenter HF ipsi GI parallela (§. 255). Quare EF : EH = FI : GH (§. 268) = GF : GH (§. 168 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

270. Est ergo & EF : GF = EH : GH (§. 173 *Arithm.*); consequenter EF + FG : EF = GE : EH (§. 190 *Arithm.*); seu EF + FG : GE = EF : EH (§. 173 *Arithm.*); hoc est, ut summa crurum ad basin integram, ita crus unum ad segmentum hujus adjacens. *Q. e. d.* Tab. III. Fig. 71.

PROBLEMA XXII.

271. *Datis tribus lineis* AB, AC *&* BD, *invenire quartam proportionalem.* Tab. III. Fig. 72.

RESOLUTIO.

1. Ducatur angulus non nimis acutus FAG pro arbitrio.
2. Ex A in B transferatur linearum datarum prima; ex A in C altera; ex B in D tertia.
3. Ducatur recta BC (§. 121).
4. In D constituatur angulus x ipsi ABC æqualis (§. 208).

Dico, esse AB : AC = BD : CE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $o=x$, *per constr.* erit BC ipsi DE parallela (§. 255). Quamobrem AB : AC = BD : CE (§. 268). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

272. Quodsi duabus lineis AB & AC datis tertia inveniri debet; etiam BD ipsi AC æqualis fieri, hoc est, AC bis poni debet. Erit nimirum AB : AC = AC : CE.

COROLLARIUM II.

273. Si DB sumatur pro unitate; respondebit CE exponenti rationis AC : AB (§. 140 *Arithm.*).

PROBLEMA XXIII.

274. *Datam rectam* AB *in quotcunque partes æquales dividere.* Tab. IV. Fig. 73.

RESOLUTIO.

1. Ex recta CD pro arbitrio assumta resecentur tot partes æquales, in quot data AB dividenda, ex. gr. 5.

Tab. IV. Fig. 73.

2. Super harum partium intervallo construatur triangulum æquilaterum CED (§. 198).
3. Ex E in a transferatur recta AB, itidemque ex E in b.
4. Ducatur recta ab: ducantur itidem aliæ ex E in 1, 2, 3, &c.

Dico esse $ab = AB$, $a1 = \frac{1}{7}AB$, $a2 = \frac{2}{7}AB$, &c.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Ea = Eb$, & $EC = ED$, *per construct.* erit $Ea : Eb = EC : ED$. (§. 168, 173 *Arithm.*). Quare, cum angulus E utrique triangulo ECD & Eab communis sit, erit $EC : CD = Ea : ab$, & $o = x$, (§. 183). Sed $EC = CD$, *per construct.* Ergo $Ea = AB = ab$ (§. 151 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam $o = x$, *per demonstr.* erit $a1$ parallela ipsi C 1 (§. 255); consequenter $EC : C1 = Ea : a1$ (§. 268), hoc est, ob $EC = CD$, *per construct.* & $Ea = ab$, *per demonstr.* $CD : C1 = ab : a1$ (§. 168 *Arithm.*). Sed $C1 = \frac{1}{7}CD$, *per construct.* Ergo $a1 = \frac{1}{7}ab$ (§. 151 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Eodem modo ostenditur, esse $a2 = \frac{2}{7}AB$, consequenter $12 = \frac{1}{7}AB$, & ita porro.

COROLLARIUM.

Tab. IV. Fig. 74. 275. Quod si ergo CD fuerit utcunque divisa in 1 & 2; eodem modo recta ab secabitur in eadem ratione. Est nempe $CD : C1 = ab : a1$, & $CD : C2 = ab : a2$, &c. (§. 274).

SCHOLION.

276. *Corollarii hujus usus amplissimus est in Architectura tam civili, quam militari; præsertim ubi Ichnographiæ vel ampliandæ, vel contrahendæ.*

PROBLEMA XXIV.

277. *Scalam geometricam construere.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AF, & in eam transferantur partes 10 æquales B 1, 12, 23, 34, &c. intervallum vero 10 partium AB totidem ex B in E, ex E in F, &c. quoties libuerit.
2. In A excitetur perpendicularis AC arbitrariæ longitudinis, in partes 10 æquales divisa (§. 249).
3. Per puncta divisionum 1, 2, 3, 4, 5 &c. agantur parallelæ cum AF (§. 258).
4. In ultimam CD transferantur partes 10 partibus ipsius AB æquales.
5. Tandem puncta 10 & 9, 9 & 8, 8 & 7, &c. lineis transversis connectantur (§. 121).

Dico, si AB fuerit decempeda, fore B 1, 12, 23, 34 &c. pedes, 99 digitum unum, 88 digitos duos, 77 tres, 66 quatuor &c.

DEMONSTRATIO.

$B1 = 12 = 23$ &c. $= \frac{1}{10}AB$, *per construct.* Sed pes est decempedæ pars decima (§. 25). Ergo cum AB sit decempeda, *per hypoth.* erunt B 1, 12, 23 &c. pedes. *Quod erat unum.*

Porro quia 99 est parallela ipsi A 9, *per construct.* $C9 : CA = 99 : A9$, (§. 268). Sed $C9 = \frac{1}{10}CA$, *per construct.* Ergo $99 = \frac{1}{10}A9$ (§. 151 *Arithm.*). Quare cum A 9 sit pes, *per demonstr.* erit 99 digitus (§. 25). Eodem modo ostenditur esse 88 duos, 77 tres &c. digitos. *Quod erat alterum.*

SCHO-

SCHOLION.

Tab. IV. Fig. 75. 278. *Quemadmodum hic linea exigua A 9 in 10 partes æquales dividitur; ita eadem in quotcunque alias eodem artificio dividi potest. Neque opus est, ut angulus A sit rectus; sed idem obliquus esse potest.*

COROLLARIUM.

279. Quodsi ergo circini crus unum collocatur in I & alterum in K; erit intervallum IK = 1° 4′ 5″ & ita porro.

PROBLEMA XXV.

Tab. IV. Fig. 76. 280. *Invenire distantiam duorum locorum* AB, *quorum unus B tantum accedi potest.*

RESOLUTIO.

1. Baculo ad arbitrium in E defixo, recta BE transferatur ex E in C, ita ut baculus in C defixus sit cum E & B in eadem recta (§. 125).
2. In C constituatur angulus ECF ipsi B æqualis (§. 208).
3. Tandem ex C progrediendum versus D, donec baculus in D defixus sit cum F & C, itemque cum E & A in eadem recta (§. 125).

Dico esse DC=BA.

DEMONSTRATIO.

Nam BE=EC, $o=x$, *per construct.* & $y=u$ (§. 156). Ergo AB=DC (§. 251). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. IV. Fig. 77. 1. Defigatur baculus in I cum B & A in eadem recta (§. 125), itidemque alius utcunque in K.
2. Ex K in L transferatur IK, in M vero KB.
3. Denique ex K progrediendum in N, donec baculus ibi defixus sit cum M & L, itidemque cum K & A in eadem recta (§. 125).

Dico esse MN=BA.

DEMONSTRATIO.

BK=KM, & IK=KL, *per construct.* & $o=u$, (§. 156). Ergo IB=ML, & $y=x$ (§. 179). Quare cum sit $o+m=u+n$ (§. 156), & IK = KL, *per constr.* erit IA=NL (§. 251); consequenter AB=NM (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. IV. Fig. 77.

Aliter.

1. Mensula geometrica in C collocata, per dioptras collineetur in A & B, ducanturque rectæ *ac* & *cb*. Tab. IV. Fig. 78.
2. Quæratur distantia stationis a loco accesso AC (§. 126), &
3. Ex Scala geometrica in *ac* transferatur (§. 277).
4. Translocetur mensula in A, ita ut punctum *a* ipsi A immineat, & per dioptras regulæ ad *ac* applicatæ baculus in prima statione C defixus conspiciatur.
5. Mox collineatio in B fiat, ducaturque *ab*.
6. Denique in Scala geometrica capiatur intervallum ipsius *ab* (§. 277).

Ita distantia quæsita AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Quoniam c=C, & a=C, (*per construct.* & §. 167), erit $ac:ab$ = AC: AB (§. 267), hoc est, iidem numeri rationes $ac:ab$ & AC: AB indigitant (§. 149 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Baculo in C defixo investigetur quantitas angulorum A & C (§. 152), itemque longitudo ipsius AC (§. 126).
2. Ope Instrumenti transportatorii & Scalæ geometricæ construatur triangulum acb (§. 264).

Tab. IV. Fig. 78. 3. Ad Scalam geometricam applicetur recta ab (§. 277).

Ita distantia AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ proxime præcedens.

PROBLEMA XXVI.

281. *Metiri distantiam duorum locorum inaccessorum* AB.

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 76. Sine Instrumentis tædiosior est Problematis resolutio, quam ut commendari possit. Cui tamen volupe fuerit eandem experiri, is

1. Statione in E assumta rectas BE & AE inveniat (§. 280).
2. His datis reperiet DC ipsi BA æqualem (§. 194).

Aliter.

Tab. IV. Fig. 79.
1. Duabus stationibus in C & D electis, in prima C collocetur mensula, & per dioptras collineetur in D, B, & A, ducanturque juxta regulæ, cui affiguntur, ductum rectæ cd, cb, ca.
2. Quæratur distantia stationum CD (§. 126), &
3. Ex Scala geometrica transferatur in cd (§. 279).
4. Baculo in C defixo, mensula collocetur in D, ea lege ut punctum d ipsi D, hoc est puncto in quo defigebatur ante baculus immineat, & per dioptras regulæ ad cd applicatæ respicienti baculus in C occurrat.
5. Hinc porro collineatio fiat in A & B, ducanturque rectæ da, & db.
6. Tandem distantia punctorum a & b investigetur in Scala geometrica (§. 279).

Dico esse $cd : ab = CD : AB$.

DEMONSTRATIO.

Est enim $cdb = CDB$, & $bcd = BCD$ (*per construct.* & §. 167). Ergo $dc : cb = DC : CB$ (§. 267). Similiter cum sit $acd = ACD$, & $adc = ADC$ (*per construct.* & §. 167), erit $dc : ac = DC : AC$, adeoque $bc : ac = BC : AC$ (§. 196 *Arithm.*); consequenter, ob $acb = ACB$ (*per construct.* & §. 167), $ac : ab = AC : AB$ (§. 183), & ob $dc : ac = DC : AC$ (*per demonstr.*) $dc : ab = DC : AB$ (§. 197 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Electis duabus stationibus C & D, investigetur quantitas angulorum y, & x, item z & w (§. 152), quorum summæ dant angulos C & D (§. 86 *Arithm.*).
2. Quæratur porro distantia stationum CD (§. 126), &
3. Ducatur in charta linea recta, in quam ex Scala geometrica transferatur recta cd ipsi CD respondens (§. 279).
4. Super ea, ope angulorum x & D, construatur triangulum bcd, &, ope angulorum z & C, alterum acd (§. 264).
5. Tandem in Scala geometrica investigetur distantia punctorum a & b (§. 279).

Dico esse $ab : cd = AB : CD$.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum proxime præcedente.

SCHO-

SCHOLION I.

282. *Levi attentione patet, non absimili methodo ex duabus stationibus reperiri distantias plurium locorum.*

SCHOLION II.

Tab. V. Fig. 81. 283. *Nec minus manifestum est, mensulæ situm in istiusmodi operationibus horizontalem esse debere: id quod obtinetur ope perpendiculi* ♒.

PROBLEMA XXVII.

284. *Altitudinem accessam* AB *metiri.*

RESOLUTIO.

Tab. V. Fig. 82. 1. Baculus DE tantæ longitudinis sumatur, ut terræ perpendiculariter infixus altitudinem oculi adæquet.
2. Humi prostratus baculum ad calces pedum perpendiculariter terræ infigi cura (§. 121).
3. Quod si contingat, ut E & B sint cum oculo C in eadem recta; erit CA = AB; sin punctum inferius F cum E & oculo in eadem recta fuerit; propius cum baculo ad altitudinem AB provolvaris opus est; sin punctum superius; procul recedendum, donec prædicta conditio adimpleatur.
4. Tandem distantiam oculi C ab altitudine AB metiaris necesse est (§. 126).

Dico esse CA = AB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim AB (§. 227) & ED *per construct.* ad AC perpendiculares, inter se parallelæ sunt (§. 256), adeoque CD : DE = CA : AB (§. 268). Sed CD = DE *per hypoth.* Ergo CA = AB (§. 149 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In distantia plurium, ex. gr. 30, 40, & amplius, pedum defigatur perpendiculariter baculus DE, & aliquo hinc intervallo in C alius minor, ita ut cum oculo in F constituto E & B sint in eadem recta. Tab. V. Fig. 83.
2. Investigetur distantia baculorum GF, & baculi minoris ab altitudine quæsita HF, itemque differentia altitudinum baculorum GE (§. 126).
3. Quæratur ad GF, GE & HF quarta proportionalis BH (§. 302 *Arithm.*).
4. Huic addatur altitudo baculi minoris FC, vel pars AH.

Dico summam esse altitudinem AB.

Ex. gr. Sit HF = 48′, GF = [illegible], GE = 16′, FC = 5′.

20 :	16 =	48	5)	192 (	$38\frac{2}{5}$	= BH
5	4	4		15	5	= FC
		192		42	$43\frac{2}{5}$	= AB
				40		
				2		

DEMONSTRATIO.

Cum HF ipsi AC parallela supponatur, sintque BA (§. 227) & ED *construct.* ad AC perpendiculares; erunt eædem perpendiculares ad HF (§. 230); adeoque GE & BH parallelæ (§. 256); consequenter GF : GE = HF : HB (§. 268). *Quod erat unum.*

Porro cum HA & FC sint perpendiculares inter easdem parallelas HF

Tab.V. Fig.83. & AC (*per constr.* & §. 227); erit FC = HA (§. 226). Quare BH = FC = BH + HA (§. 88 *Arithm.*) = BA (§. 86 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab.V. Fig.84. Tab. IV. Fig.8.
1. Mensula in D verticaliter erigatur, ita ut latus ipsius FE sit horizonti parallelum: id quod obtinetur ope perpendiculi Q.
2. Ducatur recta *ef* lateri mensulæ parallela, & regula cum dioptris ad hanc applicata vertatur mensula, donec collineatio in altitudinem quæsitam fiat.
3. Circa punctum *e* vertatur regula, donec oculo per dioptras transpicienti apex altitudinis A occurrat, ducaturque recta *eb*.
4. Quæratur distantia stationis ab altitudine *e*C (§. 126), &
5. Ex Scala geometrica minore transferatur ex *e* in *c* (§. 279):
6. Ex *c* erigatur perpendiculum *bc* (§. 212), quod
7. Ad Scalam geometricam applicatum (§. 279) partem altitudinis AC manifestat.
8. Addatur altitudo BC.

Dico, summam esse altitudinem AB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AC perpendicularis ad BD (§. 227), & C*e* ipsi BD parallela *per constr.* erit eadem AC perpendicularis ad C*e* (§. 230). Sed ad eandem etiam *bc* perpendicularis, *per constr.* Ergo *bc* ipsi AC parallela (§. 256); consequenter *ec* : *cb* = *e*C : CA (§. 268).

Aliter.

1. Investigetur quantitas anguli *e* (§. 152), & distantia stationis *e* C (§. 126).
2. Super *ec* in Scala geometrica minore assumta (§. 279) construatur triangulum ad *c* rectangulum *ecb* (§. 264).
3. Reliqua fiant ut ante.

DEMONSTRATIO.

Est enim *c* = C, & *e* = E, *per constr.* Ergo *ec* : *cb* = *e*C : CB (§. 267). *Q. e. d.*

SCHOLION.

285. *In omnibus istis resolutionibus supponitur planities perfecte horizontalis: quæ cum rarissime in praxi occurrat, si notabilis fuerit declivitas, non tam Instrumenti altitudo, quam ipsa* CB *addenda, in altitudine accessa facile investiganda. Necesse etiam est, ut baculi, quantum fieri potest, exactissime ad horizontem perpendiculariter infigantur, & in Instrumentis præscripta ratione collocandis cura maxima adhibeatur: immo altitudo* BC *eodem modo investigari potest, quo ipsam* AC *invenimus.*

PROBLEMA XXVIII.

286. *Altitudinem inaccessam* AB *metiri.*

RESOLUTIO.

Sine Instrumentis prolixa est operatio. Nimirum
1. Distantia stationis CA vel FH quæritur, per Problema 25 (§. 280).
2. Reliqua fiunt, ut in Problemate præcedente (§. 284).

Aliter.

1. Statione in D electa, mensula collocetur ut in Problemate præcedente (§. 234).

2. Du-

Tab.V. 2. Ducantur ut ibidem rectæ *ef* & *af*.
Fig.85. 3. Baculi in G defixi, ut sit in recta *f*C, quæratur distantia a puncto *f* (§. 126), &
4. Ex Scala geometrica transferatur in *fe* (§. 279).
5. Sub puncto *f* in D defigatur baculus, & mensula ita collocetur in G, ut punctum *e* ipsi G immineat, & per dioptras regulæ ad *ef* applicatæ respicienti baculus in D occurrat.
6. Vertatur regula circa punctum *e*, donec per dioptras prospiciens apicem A videat, ducaturque recta *ea*.
7. Ex puncto *a* demittatur *ac* ad *fc* perpendicularis (§. 216): quæ
8. Ad Scalam geometricam (§. 279) applicata prodit altitudinem AC.
9. Quodsi puncta, B, G, D fuerint in eadem recta, addatur altitudo puncti *f* ut habeatur AB; sin minus, regula circa *e* vertatur, donec per dioptras despiciens videat B, ducatur *eb*, & perpendiculum *ac* continuetur, donec ipsi *eb* in *b* occurrat. Etenim *ab* in Scalam geometricam translata manifestabit AB.

DEMONSTRATIO.

In △△ enim *fea* & F*e*A, est angulus *afe* = AF*e*, & *aef* = A*e*F, *per construct.* Ergo *fe* : *ea* = F*e* : *e*A (§. 267). Porro AC & *ac* perpendiculares ad FC (*per* §. 227 *& constr.*) adeoque inter se parallelæ (§. 256). Quare *ae* : *ac* = A*e* : AC (§. 268), consequenter *fe* : *ac* = F*e* : AC (§. 194 *Arithm.*). *Quod erat unum.* Tab.V. Fig.85.

Quoniam *ab* parallela ipsi AB, *per demonstrata* : erit *ae* : *ab* = A*e* : AB (§. 268); consequenter *fe* : *ab* = F*e* : AB (*per demonst.* & §. 194 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter.

1. Investigetur quantitas anguli AFC in D, & anguli A*e*C in G; itemque C*e*B in eadem statione G (§. 152).
2. Quæratur distantia F*e* (§. 126).
3. Construatur ex his datis juxta Scalam modicam triangulum *aef* (§. 279).
4. Demittatur ex vertice *a* in basin continuatam perpendicularis *ac* (§. 216) indefinite producenda.
5. Fiat angulus *ceb* ipsi C*e*B æqualis (§. 208), & producatur crus *eb*, donec perpendiculari *ab* in *b* occurrat (§. 21).

Dico esse *fc* : *ab* = FC : AB.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.

CAPUT IV.

De Circuli Symptomatis.

THEOREMA LII.

Tab. I. Fig. 5. 287. *Circuli se intus tangentes sunt eccentrici.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus unus alterum intus tangit, *per hypoth.* ille totus intra hujus peripheriam continetur (§. 47). Quare si ex centro ejus C ducatur in peripheriam majoris recta CN (*§.* 121); ea peripheriam minoris in M secabit (§. 50), eritque adeo radius minoris CM pars ipsius CN (*§. 9 Arithm.*). Quodsi jam C ponatur centrum commune circulorum; erit CL=CM, & CL=CN (*§.* 40), adeoque CM = CN (§. 87 *Arithm.*), quod cum sit absurdum (*per demonstr. &* §. 84 *Arithm.*); circuli idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 44). *Q. e. d.*

THEOREMA LIII.

Tab. V. Fig. 86. 288. *Duo circuli se mutuo secantes sunt eccentrici.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus X alterum Z secat, *per hypoth.* pars illius intra hunc cadit (§. 4). Ducatur itaque ex C centro circuli X radius CB, qui continuatus ad peripheriam circuli Z secabit peripheriam illius in E (§. 50); eritque CB pars ipsius CE (§. 9 *Arithm.*). Quodsi C ponatur centrum etiam circuli Z; erit CB=AC, & CE=AC (§. 40); adeoque CB=CE (§. 87 *Arith.*). Quod cum sit absurdum (*per demonstr. &* §. 84 *Arithm.*); circuli X & Z idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 44). *Q. e. d.*

THEOREMA LIV.

Tab. Fig. 289. *In eodem vel in æqualibus circulis, chordæ æquales* AB *&* DE *æquales arcus subtendunt: & contra.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB=DE *per hypoth.* BC =CE, & AC=CD (§. 40); angulus ACB=DCE (§. 204); consequenter arcus AB & DE, mensuræ angulorum ACB & DCE (§. 57), æquales sunt (*§.* 142). *Quod erat primum.*

Arcus AB & DE æquales sunt, *per hypoth.* Sunt vero etiam iidem mensuræ angulorum ACB & DCE (§. 57): anguli igitur isti æquales sunt (§. 142). Quoniam porro BC = CE, & AC =CD (*§.* 40); erit quoque AB=DE (§. 179). *Quod erat alterum.*

THEOREMA LV.

290. *Si in circulis inæqualibus arcus* AB *&* ab *fuerint similes; chordæ cognomines ad suos radios* AC *&* ac *eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AB & *ab* similes sunt, *per hypoth.* iidemque mensuræ angulorum ACB & *acb* (§. 57); erit ACB =*acb* (§. 141). Est vero AC : BC=*ac*: *bc* (§. 40 *Geom.* & §. 149 *Arithm.*). Ergo AB : BC=*ab* : *bc* (§. 183). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA LVI.

Tab.V. Fig.88. 291. *Radius* CE, *chordam* BA *bifariam secans in* D, *etiam arcum bifariam secat in* E; *& ad chordam* BA *perpendicularis: & contra.*

DEMONSTRATIO.

AD=DB, *per hypoth.* AC=CB (§. 40), & DC=DC. Ergo $o=x$, & $y=u$ (§. 204); consequenter CE ad AB perpendicularis in D (§. 79), & arcus AE atque EB, æqualium angulorum u & y mensuræ (§. 57), æquales sunt (§. 142): *Quod erat primum.*

Sint arcus AE & EB æquales *per hypoth.* cum iidem sint mensuræ angulorum u & y (§. 57); erit $y=u$ (§. 142). Est vero etiam AC=CB (§. 40), & DC=DC. Ergo AD=DB, & $o=x$ (§. 179); consequenter CD ad AB perpendicularis (§. 79). *Quod erat secundum.*

Sit denique radius CE perpendicularis ad chordam AB in D *per hypoth.* erit $o=x$ (§. 79). Est vero etiam AC =CB (§. 40), & hinc $m=n$ (§. 184); consequenter $y=u$ (§. 246). Quare arcus AE & EB, æqualium angulorum u & y mensuræ (§. 57), æquales sunt (§. 142), & AD=DB (§. 251). *Quod erat tertium.*

THEOREMA LVII.

292. *Si recta* NE *chordam* AB *bifariam secet, & ad eam perpendicularis fuerit; per centrum transit, & tam arcum* AEB *quam* ANB *bifariam secat.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam ND perpendicularis ad AB, *per hypoth.* erit $o=x$ (§. 79). Est vero etiam AD=DB, *per hypoth.* & ND=ND. Ergo AN=NB (§. 179); consequenter arcus cognomines æquales sunt (§. 289). Eodem modo ostenditur, arcus AE & EB æquales esse. *Quod erat unum.* Tab.V. Fig.88.

Arcus AN=NB, & AE=EB, *per demonstr.* Ergo NA + AE=NB + BE (§. 88 *Arithm.*); consequenter NE diameter circuli (§. 135), adeoque per centrum transit (§. 39). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA XXIX.

293. *Datum arcum* AB *in duas partes æquales dividere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Ducatur ad punctum medium D chordæ AB perpendicularis NE (§. 210): hæc arcum AB bifariam secabit (§. 292). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA XXX.

294. *Per data tria puncta non in directum jacentia* A, B & C *circulum describere.* Tab.V. Fig.?

RESOLUTIO.

1. Ex A & C fiant intersectiones in D & E, itemque aliæ duæ G & H ex C & B.
2. Ducantur rectæ DE & HG (§. 121).

Dico I esse centrum circuli per A, C, B describendi (§. 131).

DEMONSTRATIO.

Puncta A, C, & B sunt in peripheria alicujus circuli, *per hypoth.* atque adeo rectæ AC & CB chordæ (§. 28). Sed ED ad AC, GH ad EC perpendicularis; & ED ipsam AC, GH vero

Tab.V. Fig.89. BC bifariam fecat (§. 210). Ergo utraque per centrum tranfit (§. 292). Quare, cum DE & GH tantum in I fe mutuo fecent (§. 250), erit I centrum circuli per puncta data A, C, & B tranfeuntis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

295. Affumtis in peripheria, vel arcu circuli tribus punctis; centrum inveniri, datufque arcus perfici poteft.

COROLLARIUM II.

296. Si tria puncta unius peripheriæ tribus punctis alterius congruant; peripheriæ totæ congruunt: atque adeo circuli æquales funt (§. 161).

COROLLARIUM III.

297. Omne triangulum eft circulo infcriptibile (§. 116).

THEOREMA LVIII.

Tab.V. Fig.87. 298. *In eodem vel æqualibus circulis, chordæ æquales* AB *&* DE *a centro* C *æqualiter diftant: & contra.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam FC & CG funt diftantiæ chordarum AB & DE a centro C, *per hypoth.* erunt ad chordas perpendiculares (§. 225): & hinc *o* & *x* recti (§. 78), adeoque æquales (§. 145). Porro cum AB=DE, *per hypoth.* & CF ad AB perpendicularis *per demonftrata*, ipfam AB; CG vero perpendicularis ad DE, *per demonftrata*, ipfam DE bifecet (§. 291); erit FA=DG (§. 177 *Arithm.*). Quare cum etiam fit AC=CD (§. 40); erit CF = CG (§. 235). *Quod erat unum.*

Quodfi diftantiæ FC & CG fuerint æquales, *per hypoth.* cum fit *o*=*x per demonftr.* & AC=CD (§. 40); erit AF=DG (§. 235). Sed AF = $\frac{1}{2}$AB, & DG = $\frac{1}{2}$DE (§. 291). Ergo AB =DE (§. 177 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA LIX.

299. *Chordarum maxima eft diameter* AB.

DEMONSTRATIO.

Eft enim CO = BC & CN = CA (§. 40). Sed CO+CN > ON (§. 190). Ergo BC + CA, hoc eft, BA > ON (§. 89 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LX.

300. *Si intra triangulum* ACB *fupra ejufdem bafi* AB *conftruatur triangulum* ADB; *erunt crura interioris* AD *&* DB *fimul fumta minora cruribus exterioris* AC *&* CB *fimul fumtis: angulus vero ad verticem interioris* D *major angulo ad verticem exterioris* C.

DEMONSTRATIO.

Quia AE < AC+CE (§. 190); AE + EB < AC + CE + EB (§. 90 *Arithm.*), hoc eft, AD + DE + EB < AC+CB (§. 86, 89 *Arithm.*). Sed DB < DE+EB (§. 190). Ergo multo magis AD+DB < AC+CB. *Quod erat unum.*

Quoniam *o* > *x*, & *u* > *m* (§. 188); erit *o* + *u* > *x* + *m* (§. 90 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA LXI.

301. *Chorda arcus majoris* AB *major eft; chorda minoris* AD *minor.*

DEMONSTRATIO.

EB+EC > BC (§. 190), hoc eft, quia DE + EC = BC (§. 40), EB +EC

V. $+EC > DE+EC$ (§. 89 *Arithm.*); con-
91. sequenter $EB > DE$ (§. 92 *Arithm.*). Est vero $AE+DE > DA$ (§. 190). Ergo multo magis $AE+EB > DA$, hoc est, $AB > DA$ (§. 86, 89 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LXII.

b. I. 302. *Secantium* MA, MN, ME
7. *ex eodem puncto* M *ductarum maxima est* MA, *quæ per centrum transit: reliquæ sunt tanto minores, quo a centro remotiores. Contra earundem portiones extra circulum* MD, MO, MB *sunt tanto majores, quo magis a centro distant: minima est* MB *secantis* MA *per centrum transentis.*

DEMONSTRATIO.

1. $NC+MC > MN$ (§. 190). Sed $NC=CA$ (§. 40). Ergo $MA=CA+CM$ (§. 86 *Arithm.*) $=NC+CM$ (§. 88 *Arithm.*) $> MN$ (§. 89 *Arithm.*) *Quod erat primum.*

2. $MO+EO > ME$ (§. 190). Sed $ON > EO$ (§. 301). Ergo multo magis $MO+ON$, hoc est, MN (§. 86 *Arithm.*) $> ME$. *Quod erat secundum.*

3. $CO+OM > MC$ (§. 190). Sed $CO=CB$ (§. 40). Ergo $OM > MB$ (§. 92 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

4. $CD+DM > CO+OM$ (§. 300). Sed $CD=CO$ (§. 40). Ergo $DM > OM$ (§. 92 *Arithm.*). *Quod erat quartum.*

THEOREMA LXIII.

b. V. 303. *Si ex puncto* E *intra circulum*
92. *assumto ducantur in peripheriam rectæ* EF, EB, EG, *&c. item* EA, ED, EH *&c. maxima erit* EF, *quæ per centrum* C *transit: reliquæ* EB, EG *&c.* Tab. V. Fig. 92.
tanto majores, quo maximæ propiores. Contra minima est EA, *quæ continuata per centrum transit: reliquæ* ED, EH *&c. sunt tanto majores, quo ab ea remotiores.*

DEMONSTRATIO.

1. $EC+BC > EB$ (§. 190). Sed $BC=CF$ (§. 40). Ergo $EC+BC=EC+CF$ (§ 88 *Arithm.*) hoc est, EF (§. 86 *Arithm.*) $> EB$ (§. 89 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

2. $EI+GI > GE$, & $IB+IC > BC$ (§. 190), hoc est, ob $BC=GI+IC$ (§. 40), $IB+IC > GI+IC$ (§. 89 *Arithm.*), adeoque $IB > GI$ (§. 92 *Arithm.*). Quare $EI+IB > EI+GI$ (§. 90 *Arithm.*); adeoque $EI+IB$, hoc est, EB (§. 86 *Arithm.*) $> GE$. *Quod erat alterum.*

3. $CE+ED > CD$ (§. 190), Sed $CD=CE+EA$ (§. 40). Ergo $CE+ED > CE+EA$ (§. 89 *Arithm.*); consequenter $ED > EA$ (§. 92 *Arith.*). *Quod erat tertium.*

4. $EK+KD > ED$, & $KH+KC > CH$ (§. 190), hoc est, ob $CH=CK+KD$ (§. 40), $KH+KC > KC+KD$ (§. 98 *Arithm.*), adeoque $KH > KD$ (§ 92 *Arithm.*). Quare $EK+KH > EK+KD$ (§. 90 *Arithm.*); adeoque $EK+KH$, hoc est, EH (§. 86 *Arithm.*), $> ED$. *Quod erat quartum.*

THEOREMA LXIV.

304. *Recta* IL *radio* CL *perpendicu-*

 la-

Tab. I. Fig. 3. *lariter insistens tangit circulum in unico puncto* L : *nec inter tangentem* HL *&* *circulum alia recta duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim quælibet alia CK (§. 121). Quoniam IL perpendicularis ad CL, *per hypoth.* adeoque L est rectus (§. 78); K erit acutus (§. 218). Ergo CK ⊳ CL (§. 220); consequenter quodlibet punctum K a L diversum, hoc est tota linea LI, seu HI, extra circulum cadit (§. 40); & ideo circulum tangit in unico puncto L (§. 47). *Quod erat unum.*

Ducatur deinde, si fieri potest, inter tangentem HL & circulum recta ML. Demittatur in eam ex centro C perpendicularis CD (§. 216); erit D rectus (§. 78), adeoque CL ⊳ CD (§. 220). Cadit itaque D intra circulum (§. 40): quod cum hypothesi repugnet (§. 47), inter tangentem & circulum per contactum transiens recta alia duci nequit. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

305. Angulus igitur contactus, tangente HL & arcu ML interceptus, est quovis rectilineo minor: angulus vero semicirculi, inter radium CL & arcum ML interceptus, est quovis rectilineo acuto major.

SCHOLION.

306. *Hoc paradoxum* EUCLIDIS *exercuit Mathematicorum ingenia. Agitata est de eo controversia inter* Jacobum PELETARIUM Cenomani *in Gallia Matheseos Professorem, &* Christophorum CLAVIUM *Jesuitam* Bambergensem [illegible] (a) *hic angulum contactus rectilineo heterogeneum* (§. 30 Arithm.) *agnovit, quemadmodum linea est superficiei heterogenea; ille vero e numero angulorum sustulit & pro non quanto declaravit. Peculiarem* De angulo contactus & semicirculi *Tractatum, An.* 1656, *conscripsit* WALLISIUS, *qui legitur Operum Vol. II. f.* 605 *& seqq. ubi, cum* PELETARIO, *angulum contactus omni assignabili minorem, adeoque nullius magnitudinis esse defendit.*

(a) In Schol. ad 16. Elem. III. f. 117. & seqq. Tom. I. Oper.

COROLLARIUM II.

307. Circulum in eodem puncto L nonnisi unica recta HI tangere potest.

PROBLEMA LXV.

308. *Omnis recta* HI *circulum tangens radio* CL *ad punctum contactus ducto perpendicularis est.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus IL non esse ipsi CL perpendicularem. Ergo ex C duci poterit KC ad HI perpendicularis (§. 216); hæcque, utpote tangens *per hypoth.* extra circulum cadet (§. 47); consequenter CK ⊳ CN (§. 84 *Arithm.*) ⊳ CL (§. 40 *Geom.* & §. 89 *Arithm.*). Est vero etiam CK ⊲ CL (§. 220): quod cum sit absurdum, tangens IL radio CL ad contactum perpendicularis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

309. Tangens IL efficit cum radio CL in puncto contactus rectum (§. 78).

COROLLARIUM II.

310. Si HI circulum tangat, & ex centro C ad eam perpendicularis CL demittatur (§. 216), punctum contactus L determinatur.

PROBLEMA XXXI.

311. *Ducere rectam* HI *circulum in dato puncto* L *tangentem.*

RE-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex centro circuli C ad punctum contactus L ducatur radius CL.
2. In L excitetur perpendicularis LH (§. 249), quæ circulum in L tanget (§. 308). *Q. e. f. & d.*

THEOREMA LXVI.

312. *Arcus* FG & HI *inter chordas parallelas intercepti sunt æquales.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur CK ex centro C perpendicularis ad FH (§. 216): erit eadem perpendicularis ad GI (§. 230), ob FH & GI *per hypoth.* parallelas; dividetque adeo tam arcum FKH, quam GKI bifariam in K (§. 291). Quare KF — KG = KH — KI, hoc est, FG = HI (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LXVII.

313. *Angulus ad centrum* ACD *est duplus anguli ad peripheriam* ABD, *eidem arcui* AD *insistentis.*

DEMONSTRATIO.

I. Ducatur EF per centrum C ipsi BD parallela (§. 258); erit EB = DF (§. 312); adeoque $o = x$ (§. 142). Sed $o = y$ (§. 156). Ergo $x = y$ (§. 87 *Arithm.*) $= \frac{1}{2}$ACD. Porro $o = u$ (§. 233). Ergo $u = y = \frac{1}{2}$ACD (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

II. In casu altero, $o = 2y$, & $u = 2x$, *per cas.* I. Ergo $u + o = 2x + 2y$ (§. 88 *Arithm.*), hoc est, ABD $= \frac{1}{2}$ACD (§. 94 *Arithm.*). *Quod erat secundum.*

III. In casu tertio, $o + u = 2y + 2x$, *per cas.* I, & $o = 2y$, *per cas.* I. Ergo $u = 2x$ (§. 91 *Arithm.*), hoc est, $\frac{1}{2}$ACD = ABD (§. 94 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

THEOREMA LXVIII.

314. *Anguli ad peripheriam* ABD *mensura est arcus dimidius* AD, *cui insistit.* Tab. [illegible] F[illegible]

DEMONSTRATIO.

I. Sit ABD angulus in majore segmento: insistet ergo arcui minori AD quam semicirculo (§. 70, 56); adeoque ipsi respondet angulus ad centrum ACD (§. 72, 135). Sed anguli ACD mensura est arcus AD (§. 73). Ergo ipsius ABD mensura dimidius arcus AD (§. 313, 142). *Quod erat unum.*

II. Sit ACB angulus in semicirculo. Tab. V.
Ducatur utcunque recta CD: erit arcus dimidius AD mensura anguli ACD, & $\frac{1}{2}$ DB mensura ipsius DCB, *per cas.* I. Ergo $\frac{1}{2}$ ADB mensura anguli ACB. *Quod erat secundum.* Fig. 95.

III. Sit denique HIK angulus in minore segmento. Ducatur utcunque recta IL: erit ut ante $\frac{1}{2}$ HL mensura anguli HIL, & $\frac{1}{2}$ LK mensura anguli LIK, *per cas.* I. Ergo denuo $\frac{1}{2}$ HLK mensura anguli HIK. *Quod erat tertium.* Tab. V. Fig. 96.

COROLLARIUM I.

315. Duo vel plures anguli HLI & HM[illegible] eidem arcui HI, vel æqualibus arcubus insistentes, æquales sunt (§. 142). Fig. 14.

COROLLARIUM II.

316. Quare cum porro sit $o = x +$ [illegible] (§. 239); erit anguli extra centrum [illegible]sura dimidium arcuum HI & LM, quibus ipse & ejus verticalis K insistunt (§. 314).

COROL-

COROLLARIUM III.

Tab.V. Fig.95. 317. Cum angulus in semicirculo ACB semicirculo insistat, *per hypoth.* mensura ejus est circuli quadrans (§. 314), adeoque ipse rectus est (§. 143).

COROLLARIUM IV.

Fig.96. 318. Cum angulus in majore segmento DIF arcui DF, minori quam est semicirculus, insistat (§. 70); mensura ejus est semiquadrante minor (§. 314); adeoque ipse recto minor (§. 143); consequenter acutus §. 66).

COROLLARIUM V.

319. Non absimili ratione liquet, angulum in minore segmento HIK esse obtusum.

COROLLARIUM VI.

Tab. VI. Fig.97. 320. Quoniam $o = x + y$ (§. 239), & anguli o mensura est $\frac{1}{2}$ LM, anguli y vero $\frac{1}{2}$ NO (§. 314); anguli extra peripheriam mensura est differentia inter dimidium arcum concavum LM cui insistit, & dimidium convexum NO inter crura interceptum.

PROBLEMA XXXII.

Tab. VI. Fig.98. 321. *Normam examinare, utrum exacta sit, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Describatur intervallo arbitrario semicirculus AEF, &
2. Ducantur in eo, ex diametri utroque extremo A & F ad punctum E in peripheria arbitrario assumtum, rectæ AE & FE.
3. Cruribus anguli AEF ita applicetur norma, ut ejus vertex super E cadat. Hoc enim si fieri potest, erit norma exacta.

DEMONSTRATIO.

Cum enim angulus normæ LEM æqualis est angulo AEF (§. 167), adeoque rectus (§. 317), consequenter norma exacta (§. 212). *Q. e. d.*

THEOREMA LXIX.

322. *Mensura anguli minoris segmenti* ATB *est dimidium arcus* TDB; *anguli vero majoris segmenti* BTH *dimidium arcus majoris* BGT.

DEMONSTRATIO.

Ducatur ex puncto contactus T diameter TE; erit ATE rectus (§. 308). Cum adeo ejus mensura sit arcus dimidius EBT (§. 135, 143), anguli vero BTE dimidius arcus EB (§. 314); erit anguli ATB mensura dimidius arcus BDT. *Quod erat unum.*

Eodem modo patet, cum dimidius semicirculus EGT sit mensura anguli ETH (§. 135, 143), & dimidius arcus EB mensura anguli BTE (§. 314), esse dimidium arcum BGT mensuram anguli BTH. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

323. Cum anguli G mensura etiam sit dimidius arcus BDT, ipsius D vero arcus dimidius BGT (§. 314); angulus in majore segmento G æqualis est angulo minoris segmenti ATB, & angulus in minore segmento D æqualis est angulo majoris segmenti BTH (§. 142).

COROLLARIUM II.

324. Si chorda GT ultra circulum continuetur in F; erit anguli BTF mensura semisumma arcuum TB & TG a chordis cognominibus subtensorum. Nam ATF = GTH (§. 156). Ergo ejus mensura dimidius arcus TG (§. 322). Est vero anguli ATB mensura arcus dimidius TB (§. *cit.*). Quare semisumma eorundem arcuum est mensura anguli BTF.

COROLLARIUM III.

325. Si LM & MN sint tangentes ex eodem puncto ductæ; erit angulorum MLN & MNL mensura arcus dimidius LN (§. 322); consequenter anguli ipsi sunt æquales (§. 142), & ideo LM = MN (§. 253).

COROLLARIUM IV.

326. Quia angulorum L, M & N mensura est semicirculus (§. 240, 243), angulorum vero L & N junctim sumtorum arcus LN (§. 322); erit anguli M a duabus tangentibus LM & NM intercepti mensura differentia arcus intercepti LN a semicirculo.

PROBLEMA XXXIII.

327. *Inter duas lineas* AB *&* BE *mediam proportionalem* BD *invenire.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur lineæ datæ AB & BE in directum, dividaturque AE bifariam in C (§. 210).
2. Ex C, intervallo ipsius AC, describatur semicirculus ADE (§. 136).
3. Ex B erigatur perpendicularis BD (§. 212).

Dico esse AB : BD = BD : BE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam BD perpendicularis ad AE, *per construct.* m & n sunt anguli recti (§. 78). Sed $o+x$ est itidem rectus (§. 317) & y utrique triangulo ABD & ADE communis. Ergo $v = z$ (§. 246); consequenter $y = x$ (§. *cit.*); & tunc AB : BD = BD : BE (§. 267). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

328. Cum sit AB : BD = BD : BE; ex data sagitta AB & dimidia chorda BD invenitur diameter (§. 302 *Arithm.*). Sit ex. gr. AB = 80''', BD = 300'''; erit BE = 1125''', adeoque AB + BE = AE = 1205''' seu fere 12'. Tab. VI. Fig. 101.

COROLLARIUM II.

329. Ex demonstratione una liquet, △ rectangulum ADE per lineam perpendicularem DB, ex angulo recto D in hypothenusam AE demissam, resolvi in duo triangula ABD & BDE inter se & toti ADE similia (§. 267).

COROLLARIUM III.

330. Cum adeo etiam sit AB : AD = AD : AE (§. *cit.*); si lineæ fuerint majores, una datarum ex A in B, altera ex A in E transfertur, factisque reliquis, ut in resolutione Problematis, erit AD media proportionalis quæsita.

COROLLARIUM IV.

331. Si ergo AB sit unitas, erit BD radix ipsius BE, aut AD ipsius AE (§. 247 *Arithm.*)

THEOREMA LXX.

332. *Si duæ chordæ* HM *&* LI *se mutuo secent in* K; *erit* HK : LK = KI : KM. Tab. I. Fig. 1.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim $x = x$ & $u = u$ (§. 315): ideo HK : LK = KI : KM (§. 267). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXI.

333. *Si fuerint duæ secantes* GL *&* GM *ex eodem puncto* G *ductæ; erit* GM : GL = GN : GO. Tab. VI. Fig.

DEMONSTRATIO.

Angulus x est utrique triangulo GNO & GML communis. Anguli GNO mensura est semisumma arcuum NL & NO (§. 32[illegible]). Sed anguli GML mensura est semisumma eorundem arcuum (§. 314). Quare GNO = GML (§. 142); consequenter GM : GL = GN : GO (§. 267). *Q. e. d.*

TH-

THEOREMA LXXII.

Tab. VI. Fig. 2. 334. *Si ex eodem puncto* A *ducantur duæ rectæ* AD *&* AB, *quarum altera circulum tangit, altera secat; erit tangens* AD *media proportionalis inter totam secantem* AB *& ejus portionem* AC *extra circulum.*

DEMONSTRATIO.

Angulus A est utrique triangulo ACD & ABD communis. Anguli ADC & ABD æquales sunt (§. 323). Ergo AC : AD = AD : AB (§. 267). *Q. e. d.*

CAPUT V.

De Figurarum descriptione.

THEOREMA LXXIII.

Tab. VI. Fig. 10. 335. IN *parallelogrammis latera opposita sunt æqualia: & si in figura quadrilatera latera opposita fuerint æqualia, erint eadem parallelogrammum.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam OPQN parallelogrammum, *per hypoth.* erit OP parallela ipsi NQ & ON parallela ipsi PQ (§. 102); consequenter, ducta diagonali PN, erit $x=o$ & $n=m$ (§. 233); adeoque OP = NQ & ON = PQ (§. 251). *Quod erat unum.*

Quodsi OP=NQ & ON=PQ, *per hypoth.* cum etiam sit NP = NP; erit $x=o$ & $n=m$ (§. 204); consequenter OP ipsi QN, & ON ipsi PQ parallela (§. 255); adeoque OPQN parallelogrammum (§. 102). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

336. In Quadrato, Oblongo, Rhombo, & Rhomboide latera opposita æqualia sint (§. 98, 99, 100, 101); erunt Quadratum, Oblongum, Rhombus, & Rhomboides parallelogramma (§. 335).

THEOREMA LXXIV.

337. *Diagonalis dividit parallelogramma in duas partes æquales: anguli in iis diagonaliter oppositi sunt æquales: anguli vero ad idem latus oppositi duobus rectis æquantur: & duo latera simul sumta sunt diagonali majora.*

DEMONSTRATIO.

In Parallelogrammis ON = PQ & PO = QN (§. 335). Sed PN=PN. Ergo △ NOP = △ NQP (§. 204). *Quod erat unum.*

Quoniam in parallelogrammis OP ipsi NQ & ON ipsi PQ parallela (§. 103): anguli O & N, N & Q, Q & P, P & O simul sumti æquantur duobus rectis (§. 233). *Quod erat secundum.*

Quoniam angulus O + N=N+Q, *per demonstrata*; erit O = Q (§. 91 *Arithm.*). Similiter quoniam Q+P=Q +N, *per demonstrata*; erit P=N (§. 91 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

Denique NO + PO > NP, & PQ +QN > PN (§. 190). *Quod erat quartum.*

PRO-

PROBLEMA XXXIV.

338. *Super data recta* CD *Quadratum construere.*

RESOLUTIO.

1. In C erigatur perpendicularis AC (§. 249) = CD.
2. Ex D & A, intervallo ipsius CD, fiat intersectio in B (§. 197).
3. Ducantur AB & DB.

DEMONSTRATIO.

AC = CD = AB = BD, *per constr.* Ducta ergo diagonali AD, patet esse C = B (§. 204). Sed C rectus est *per constr.* Ergo B etiam rectus (§. 145); consequenter o & x, item y & m semirecti (§. 241), adeoque $o+y$ & $x+m$ itidem recti. Quare figura est Quadratum (§. 98). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In C & D erigantur perpendiculares CA & DB ipsi CD æquales (§. 249).
2. Ducatur recta AB.

DEMONSTRATIO.

Est enim CA = DB = CD, *per constr.* & quoniam AC & BD perpendiculares ad CD, *per constr.* anguli ad D & C sunt recti (§. 78); adeoque BA parallela ipsi DC (§. 226); consequenter anguli A & B sunt recti (§. 233); & ob parallelas AC & BC (§. 256) AB = CD (§. 238). Est igitur ABCD Quadratum (§. 98). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXV.

339. *Datis duabus rectis* MI *&* IK, *Rectangulum parallelogrammum, seu Oblongum construere.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur MI & IK ad angulos rectos (§. 249). Tab. VI. Fig. 10.
2. Ex M, intervallo ML = IK, describatur arcus; & ex K, intervallo KL = IM, alius priorem intersecans in L (§. 197).
3. Ducantur rectæ ML & KL.

DEMONSTRATIO.

MI = KL, & ML = IK, *per constr.* Est ergo MIKL parallelogrammum (§. 335); consequenter I = L, & I+M ac I+K, = duobus rectis (§. 337). Sed I est rectus, *per constr.* Ergo & L (§. 145); itemque M & K recti sunt. Est ergo figura constructa Oblongum (§. 100). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVI.

340. *Data recta* GH, *una cum angulo obliquo* G, *Rhombum construere.* Tab. VI. Fig. 106.

RESOLUTIO.

1. Ad rectam datam GH constituatur in G angulus dato æqualis (§. 208).
2. Fiat GE = GH, & reliqua peragantur ut in Probl. 34 (§. 338).

DEMONSTRATIO.

EG = EF = FH = HG, *per construct.* Est ergo EFHG parallelogrammum (§. 335); consequenter G = F & G+H ac G+E = duobus rectis (§. 337). Sed G est angulus obliquus *ex hypothesi*: Ergo & F; consequenter etiam E & H sunt obliqui. Adeoque figura constructa Rhombus est (§. 99). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVI.

Tab. VI. Fig. 106. 341. *Datis duabus rectis* ON *&* OP, *una cum angulo intercipiendo* O, *Rhomboidem construere.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur rectæ ON & OP sub angulo dato (§. 208).
2. Reliqua peragantur ut in Probl. 35 (§. 339).

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Problematis præcedentis.

THEOREMA LXXV.

Tab. VI. Fig. 107. 342. *Si peripheria circuli dividatur in partes quotcunque æquales, ducanturque subtensæ* AB, BC, CD, *&c. figura circulo inscripta regularis est.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim arcus AB, BC, CD &c. sint æquales, *per hypoth.* etiam chordæ cognomines æquales sunt (§. 289); cumque anguli A, B, C, &c. æqualibus arcubus BCDE, CDEA, DEAB &c. insistant, ipsi quoque æquales sunt (§. 315). Figura igitur circulo inscripta regularis est (§. 106). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVIII.

343. *Invenire summam omnium angulorum in quocunque Polygono.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicentur 180° per numerum laterum.
2. A producto subtrahantur 360°: residuum est summa quæsita.

Ex. gr. Pentag. 180 Hexag. 180

5	6
900	1080
360	360
540	720

DEMONSTRATIO.

Quælibet figura, ex assumto in ea puncto F, in tot triangula AFB, BFC, CFD, &c. resolvitur, quot habet latera AB, BC, CD, &c. Si ergo 180° per numerum laterum multiplices, prodit summa omnium angulorum in dictis triangulis (§. 240). Sed anguli circa punctum F, qui non pertinent ad angulos Polygoni, semper efficiunt 360° (§. 159). Quodsi ergo a facto supra invento subtrahantur 360°, summa angulorum Polygoni relinquitur. *Q. e. d.*

Aliter:

Cum numerus triangulorum ABC, CAD, & DAE, in quæ resolvitur figura polygona per diagonales AC & AD ex puncto A ductas, a numero laterum AB, BC, CD, DE, EA constanter binario differat; si 180° multiplicentur per numerum laterum binario mulctatum, prodit summa omnium angulorum A, B, C, D, & E (§. 240). *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. pro Pentag. 180 pro Hexag. 180

3	4
540	720

COROLLARIUM I.

344. Quodsi summa inventa per numerum laterum dividatur; quotus est angulus Polygoni regularis (§. 106).

SCHOLION.

345. *En tibi Tabulam, in qua summa angulorum in figuris rectilineis quibuscunque, & quantitas unius in regularibus, a Trigono usque ad Dodecagonum exhibetur* (§. 343). *Construitur columna secunda continua additione* 180; *tertia vero numeris in columna secunda per numerum angulorum sive laterum*

terum divisis (§. 344). *Utimur hac Tabula tum in figuris regularibus describendis; tum in angulorum quantitate examinanda, utrum scilicet Instrumento rite explorata fuerit, nec ne. Aberratum enim esse intelligimus, ubi eorum summa minor vel major deprehenditur ea, quæ in Tabula definitur: ex. gr. si in Heptagono superet* 900.

Num. Lat.	Sum. Ang.	Ang. Fig. regul.	Num. Lat.	Sum. Ang.	Ang. Fig. reg.
III	180	60	VIII	1080	135
IV	360	90	IX	1260	140
V	540	108	X	1440	144
VI	720	120	XI	1620	$147\frac{3}{11}$
VII	900	$128\frac{4}{7}$	XII	1900	150

COROLLARIUM II.

Tab. VI. Fig. 106. 346. Si latera figuræ polygonæ cujuscunque continuentur, anguli externi, 1, 2, 3, 4 &c. cum angulis figuræ internis efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera (§. 147). Sed interni soli efficiunt bis tot rectos quot sunt latera, demtis quatuor (§. 343). Ergo externi in omni casu conficiunt 4 rectos seu 360°.

PROBLEMA XXXIX.

Tab. VI. Fig. 107. 347. *Dato Polygono regulari cuicunque* ABCDE *circulum circumscribere.*

RESOLUTIO.

1. Duo ejus anguli E & D dividantur bifariam rectis EF & DF (§. 209), ob angulos FED & FDE duobus rectis minores, concursuris in F (§. 262).
2. Ex puncto concursus F describatur radio EF circulus (§. 131).

DEMONSTRATIO.

Quoniam *o* & *u* sunt angulorum Polygoni dimidii, *per constr.* erit $o=u$ (§. 106 *Geom.* & §. 94 *Arithm.*); consequenter EF=FD (§. 253). Circulus adeo transiens per E transit etiam per D (§. 40). Ducatur jam ex F in A recta FA (§. 121). Quoniam $o=x$, *per constr.* ED=EA (§. 106), & EF =EF; erit AF=FD (§. 179). Ergo circulus transiens per D & E transit etiam per A (§. 40). Porro quia AF =EF *per demonstr.* erit $m=x$ (§. 184). Sed x dimidius angulus Polygoni, *per constr.* Ergo & m (§. 87 *Arithm.*); consequenter etiam y. Quare si ducatur FB (§. 121); erit ut ante FB=FE, adeoque radius circuli. Eodem modo ostenditur FC, & si quæ plures fuerint rectæ istiusmodi, esse radios circuli, adeoque circulum transire per omnes angulos Polygoni, hoc est, eidem circumscribi (§. 116). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

348. Omnis ergo figura regularis est circulo inscriptibilis (§. 216).

PROBLEMA XL.

349. *Invenire angulum in dato Polygono regulari.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Concipiatur Polygonum regulare ABCDE circulo inscriptum (§. 34[illegible]). Quoniam arcus dimidius BCDE mensura anguli quæsiti A (§. 314); arcus vero AB, qui ipsius EAB dimidius, habetur circuli peripheria per numerum laterum divisa (§. 289); angulus Polygoni A relinquitur, si [illegible] cum AB a semicirculo subtraxeris. *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. [illegible]ratur angulus Pentagoni. Dividatur 360 per 5, quotus 72 eſt arcus AB, qui ex 180 ſubductus relinquit 108 angulum Pentagoni quæſitum.

THEOREMA LXXVI.

350. *Quadrilateri circulo inſcripti* GHIK *anguli bini oppoſiti* H & K, *item* G & I *conficiunt duos rectos.*

DEMONSTRATIO.

Inſiſtunt enim junctim ſumti integro circulo; ex. gr. K arcui GHI & H complemento ejus ad circulum GKI (§. 56); adeoque ipſorum menſura eſt ſemicirculus (§. 314). Sunt ergo duobus rectis æquales (§. 143). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLI.

Tab. VI. Fig. * 351. *Circulo Quadratum circumſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur diametri AB & DE ſe mutuo in centro C ad angulos rectos ſecantes (§. 210).
2. Ex A, E, B, D, intervallo radii, fiant interſectiones in F, G, H, I.
3. Ducantur rectæ FG, GH, IH, & IF.

Erit FGHI Quadratum circulo circumſcriptum.

DEMONSTRATIO.

Anguli ad A, E, B, D ſunt recti (§. [illegible]8); adeoque FG, GH, HI & IF circulum tangunt (§. 304). Sunt vero anguli G, F, I, H recti (§ 338), & FG = GH = HI = FI = 2 AC, *per conſtr.* Ergo FGIH eſt Quadratum (§. 98), idque circulo [illegible]tum (§. [illegible]). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLII.

352. *Super data recta* ED *Polygonum regulare quodcunque deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur angulus Polygoni (§. 344, 349).
2. Fiat in E ipſi æqualis (§. 155), & EA = ED.
3. Per puncta A, E, D deſcribatur circuli peripheria (§. 294).
4. In ea applicetur data recta ED, quoties fieri poteſt.

Ita deſcribetur figura quæſita (§. 342, 348).

Aliter.

1. In E & D fiant anguli dimidio angulo Polygoni ſigillatim æquales (§. 155), quorum crura EF & DF ſe mutuo ſecabunt in F (§. 262).
2. Ex F tanquam centro, radio EF, deſcribatur circulus, qui erit circulus Polygono circumſcriptus (§. 347).
3. Reliqua abſolvantur ut ante.

PROBLEMA XLIII.

353. *Circulo dato Polygonum regulare quodcunque inſcribere.*

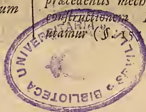
RESOLUTIO.

1. Dividantur 360 per numerum laterum, ut innoteſcat quantitas anguli EFD (§. 59).
2. Conſtruatur is ad centrum (§. 155).
3. Chorda ED ad peripheriam toties applicetur, quoties fieri poteſt.

Ita figura regularis erit circulo inſcripta (§. 342, 117). *Q. e. f. & d.*

SCHOLION.

354. Reſolutio Problematis præſentis & præcedentis mechanica quidem eſt, cum ad conſtructionem Inſtrumento transportatorio utamur (§. 15[illegible]): non tamen ideo contemnenda,



nenda, *tum quia universalis & facilis, tum quia constructionis rite peractæ indicium præbet. Pentagoni, Decagoni & Quindecagoni constructionem tradunt* EUCLIDES (*a*) & PTOLEMÆUS (*b*): *de qua in Analysi. Equidem & Heptagoni, Enneagoni & Hendecagoni constructiones geometricæ passim apud Autores, practicos inprimis, occurrunt: sed a rigore demonstrationum abhorrent.* Joh. Carolus RENALDINUS (*c*) *omnium Polygonorum describendorum regulam catholicam præscribit, passim Geometriis practicis insertam: sed quantum fallat, Cl.* WAGNERUS, Mathemat. in Academia Helmstad. Professor *ostendit* (*d*), *& nos inferius in Analysi ostendemus.*

PROBLEMA XLIV.

355. *Polygonum regulare quodcunque circulo circumscribere.*

RESOLUTIO.

1. Inscribatur figura regularis similis circulo dato, v. gr. Pentagonum ABCDE, si Pentagonum *abcde* circumscribendum (§. 353).
2. Chorda AB bifariam secetur in H per rectam F*h* ad eandem in H normalem (§. 210), quæ arcum cognominem in *h* secat.
3. Per A & B producantur radii FA & FB.
4. Per *h* ducatur ipsi AB parallela radiis continuatis in *a* & *b* occurrens: erit *ab* latus unum Polygoni circumscripti.
5. Producantur radii FE, FD, FC, donec fiat F*e*=F*d*=F*c*=F*a* & puncta *a*, *e*, *d*, *c*, *b* connectantur rectis *ae*, *ed*, *dc*, *cb*: erit *abcde* Polygonum circulo circumscriptum. *Q. e. f.* Tab. VI. Fig. 107.

(a) *Elem.* IV. Prop. 11. 16. & *Elem.* XIII: Prop. 10.

(b) *Almag.* Lib. 1. c. 9. f. m. 8. conf. *Joannes* REGIOMONTANUS in *Epitome* hujus *Almag.* Lib. 1. Prop. 1.

(c) Lib. 2. *De Resolut. & composit. Mathem.* f. 367.

(d) In peculiari Dissertatione *Helmstadii* 1700 habita.

DEMONSTRATIO.

Quoniam *ab* parallela ipsi AB, *per construct.* erit angulus F*ha* = FHA (§. 233). Sed ob FH ad AB perpendicularem, *per construct.* FHA rectus est (§. 78). Ergo etiam F*ha* rectus (§. 145); consequenter *ab* circulum in *h* tangit (§. 78, 304). Est vero etiam angulus F*ab* = FAB (§. 233); adeoque dimidius angulus Polygoni (§. 347). Porro quoniam AB = AE, *per construct.* & FA = FE = FB (§. 40); erit angulus *b*F*a* = *a*F*e* (§. 204). Quare, cum etiam sit F*a* = F*e* *per construct.* &, ob F*ab* = F*ba* *per demonstrata*, rectos ad *h* & latus F*h* utrique triangulo F*ah* & F*hb* commune, F*b* = F*a* (§. 252); erit *ae* = *ab* & F*ae* = F*ab* (§. 179); consequenter *a* angulus Polygoni, ex. gr. in nostro casu Pentagoni. Eodem modo ostenditur, angulos quoque *e*, *d*, *c*, *b* esse angulos Polygoni circumscribendi, & *ed* = *dc* = = *ab*. Quod vero etiam *ae* circulum in *g* tangat, ita demonstratur. Demittatur ex F perpendicularis (§. 216): erit angulus ad *g* rectus (§. 78). Quoniam porro F*ab* = F*ag*, *per demonstrata*, & F*a* = F*a*; erit F*h* = F*g* (§. 252). Quare cum F*h* sit radius circuli *per construct.* erit etiam F*g* radius circuli (§. 40), atque adeo *ae* circulum in *g* tangit.

Tab. VI. Fig. 107. tangit (§. 354). Idem eodem modo ostenditur de rectis *ed*, *dc*, *bc*: Polygonum itaque *abcde* circulo est circumscriptum (§. 117). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXVII.

356. *Latus Hexagoni* AB *æquatur radio circuli circumscripti* AC.

Fig. 110. DEMONSTRATIO.

Angulus C = 60° (§. 57). Ergo A+B = 120° (§. 245); consequenter, ob AC = BC (§. 40), A = B = 60° (§. 184). Quare △ ACB æquilaterum (§. 254); consequenter AB = AC (§. 88). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

357. Hexagonum regulare circulo inscribitur, si radius ad peripheriam sexies applicetur.

COROLLARIUM II.

358. Si super linea data AB Hexagonum describendum; triangulum æquilaterum ACB construitur (§. 198): est enim vertex C centrum circuli Hexagono quæsito circumscribendi (§. 356).

PROBLEMA XLV.

Tab. VI. Fig. 1[illegible]. 359. *Datis omnibus lateribus figuræ cujuscunque, & tot diagonalibus quot sunt latera demtis tribus; figuram construere.*

RESOLUTIO.

Cum figura qualibet ABCDE per diagonales AC & AD in tot triangula BAC, CAD, DAE resolvatur, quot [illegible] latera demtis tribus; non alia re opus est, quam ut unum triangulum super altero excitetur (§. 205).

PROBLEMA XLVI.

360. *Datis omnibus lateribus figuræ, & tot angulis quot sunt latera demtis tribus; figuram construere.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AB uni datorum laterum æqualis.
2. Ad A & B excitentur anguli eidem adjacentes (§. 155); & latera AE & BC per data debite determinentur.
3. Fiat porro in C angulus conveniens (§. 155); & determinetur latus DC, &c.
4. Tandem ex E & D fiat intersectio in F, intervallo laterum EF & DF.

Ductis enim DF & EF, figura terminabitur, eritque æqualis quæsitæ (§. 161, 177).

Eodem modo construi possunt figuræ regulares ex latere & angulo dato (§. 106).

COROLLARIUM.

361. Si omnes anguli præter unum F dentur, duo latera DF & FE ut dentur opus non est.

SCHOLION.

362. *Tyrones ut se exerceant in figuris irregularibus describendis, lineas pro arbitrio in pedibus ac digitis, quantitates angulorum in gradibus, assumere debent. Quodsi contingat figuram non terminari, id indicio erit, casum esse impossibilem; adeoque vel in angulorum, vel in linearum quantitate quædam erunt immutanda.*

PROBLEMA XLVII.

363. *Areæ cujusdam campestris rectilineæ* abcde *libere permeabilis Ichnographiam perficere, hoc est, figuram areæ campestri similem describere.*

RESO-

RESOLUTIO.

1. Investigetur longitudo singulorum laterum *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea*, itemque diagonalium *ac* & *ad* (§. 126).
2. Construatur figura ABCDEA (§. 359) juxta scalam geometricam minorem (§. 279).

Dico figuram ABCDE esse figuræ campi *abcde* similem.

DEMONSTRATIO.

Est enim AB : BC = *ab* : *bc*, BC:CD = *bc* : *cd*, CD : DE = *cd* : *de*, &c. Etenim ex. gr. *ab*, 6, & *bc*, 7 pedum in campo existentibus, etiam AB = 6 & BC = 7 in charta, *per constr.* Quare cum porro sit AC : AB = *ac* : *ab*, AC : AD = *ac* : *ad*, AD : AE = *ad* : *ae*, &c. *per constr.* erit $o = o$, $x = x$, $y = y$, $n = n$, $m = m$, $r = r$, $u = u$, $s = s$, $t = t$ (§. 207); consequenter $x + m + r = x + m + r$, $y + n = y + n$, $u + s = u + s$ (§. 88 *Arithm.*). Quamobrem figura ABCDE est figuræ campi *abcde* similis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Posita mensula ita in uno figuræ angulo ut punctum *a* vertici ejus immineat, per dioptras regulæ affixas collineatio fiat in baculos in singulis angulis B, C, D, E defixos, ducanturque lineæ indefinitæ *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.
2. Investigetur longitudo rectarum *a*B, *a*C, *a*D, *a*E (§. 126), &
3. Exinde juxta Scalam modicam (§. 279) determinentur *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.
4. Ducantur *bc*, *cd*, *de*.

Dico *abcde* esse similem figuræ ABCDE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in △△ *abc* & *a*BC angulus *a* communis & *ab* : *ac* = *a*B : *a*C *per constr.* erit angulus *abc* = *a*BC & *acb* = *a*CB, nec non *ab* : *bc* = *a*B : BC & *ac* : *bc* = AC : BC (§. 183). Similiter quoniam in △△ *acd* & *a*CD angulus *a* communis & *ac* : *ad* = *a*C : *a*D atque in △△ *dae* & D*a*E angulus *a* itidem communis & *ad* : *ae* = *a*D : *a*E *per construct.* erit angulus *acd* = *a*CD & *adc* = *a*DC, nec non *ac* : *cd* = *a*C : *c*D & *ad* : *cd* = *a*D : *c*D, itemque anguli *ade* = *a*DE & *aed* = *a*ED, nec non *ad* : *de* = *a*D : DE & *ae* : *ed* = *a*E : ED (§. 183). Quoniam itaque $a = a$, $b = B$, $acb + acd = a\text{CB} + a\text{CD}$, hoc est, $c = C$, $adc + ade = a\text{DC} + a\text{DE}$, hoc est, $d = D$ & denique $e = E$ *per demonstr.* figuræ *abcde* & *a*BCDE inter se æquiangulæ sunt (§. 109). Porro cum sit *ac* : *bc* = *a*C : BC & *ac* : *cd* = *a*C : CD *per demonstr.* erit etiam *bc* : *cd* = BC : CD (§. 196 *Arithm.*) & cum sit *ad* : *dc* = *a*D : DC & *ad* : *de* = *a*D : DE *per demonstr.* erit denuo *dc* : *de* = DC : DE. Quamobrem, cum quoque sit *ab* : *bc* = *a*B : BC & *ae* : *ed* = *a*E : ED, *per demonstrata*; latera æquales angulos comprehendentia proportionalia sunt. Sunt itaque figuræ *abcde* & *a*BCDE similes (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Mensula intra figuram posita eligatur punctum *f*, ex quo per dioptras regulæ affixas ut ante collineatio fiat in baculos in A, B, C, D & E

Tab. VI. Fig. 114. defixos, ducanturque rectæ indefinitæ *fa*, *fb*, *fc*, &c.

2. Investigetur longitudo rectarum *f*A, *f*B, *f*C, *f*D, *f*E (§. 126).

3. Inde determinetur longitudo rectarum *fa*, *fb*, *fc*, &c. juxta Scalam modicam (§. 279).

4. Tandem ducantur *ab*, *bc*, *cd*, &c. Dico *abcdeg* esse figuræ ABCDEG similem.

DEMONSTRATIO.

Angulus *f* utrique △ *fab* & *f*AB communis, estque *fa* : *fb* = *f*A : *f*B, *per constr.* Ergo anguli ad *a* & A, item ad *b* & B æquales sunt, atque *fa* : *ab* = *f*A : AB (§. 183). Eodem modo ostenditur esse in △△ *fga* & *f*GA angulos ad *a* & A æquales, atque *fa* : *ag* = *f*A : AG, consequenter *ab* : *ag* = AB : AG (§. 196 *Arithm.*) & angulus *bag* = BAG (§. 86 *Arithm.*). Quare, cum eadem ratione demonstretur esse *g* = G, *e* = E, *d* = D, *c* = C, *b* = B, & *ag* : *ge* = AG : GE, *ge* : *ed* = GE : ED, *ed* : *dc* = ED : DC, *dc* : *cb* = DC : CB & *cb* : *ba* = CB : BA, figura *abcdeg* est majori ABCDEG similis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Collocato Instrumento goniometrico in *a*, investigetur quantitas angulorum *x*, *m*, *r* (§. 152) & longitudo rectarum *ab*, *ac*, *ad* & *ae* (§. 126).

2. Construantur juxta Scalam modicam △△ ABC, ACD & ADE (§. 180).

Dico ABCDE esse similem figuræ *abcde*.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum secunda Problematis præsentis.

Aliter.

1. Collocato Instrumento goniometrico in *f*, investigetur quantitas angulorum A*f*B, B*f*C, C*f*D, D*f*E, E*f*G, G*f*A (§. 152), & longitudo rectarum *f*A, *f*B, *f*C, *f*D, *f*E, *f*G (§. 126).

2. Construantur, ut ante, juxta Scalam modicam △△ *bfa*, *afg*, *gfe*, *efd*, *dfc* & *cfb* (§. 180).

Dico *abcdeg* esse similem figuræ ABCDEG.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum tertia Problematis præsentis.

Aliter.

1. Pyxis cum acu magnetica, cujus margo in 360 gradus divisa & quæ in cardine Meridiei ac Septentrionis dioptris instructa, ita collocetur in *a*, ut ejus centrum ipsi *a* immineat, & per dioptras collineanti baculus in *b* defixus occurrat, noteturque angulus declinationis acus a linea meridiana pyxidis ipsi *ab* imminente versus ortum vel occasum.

2. Pyxidis dioptræ convertantur successive ad baculos in *c*, *d*, & *e* defixos, notenturque, ut ante, in singulis casibus anguli declinationis.

3. Investigetur longitudo rectarum *ab*, *ac*, *ad*, *ae* (§. 126).

4. Ducatur in charta recta LM & assumto in ea puncto A applicetur centrum Instrumenti transportatorii

&

& fiant anguli *i*, *x*, *m*, *r* angulis declinationum rectarum *ab*, *ac*, *ad*, *ae* æquales (§. 155), atque ex harum longitudine per Scalam modicam determinetur longitudo ipsarum AB, AC, AD, AE, (§. 279).

Dico figuram ABCDE esse alteri *abcde* similem.

DEMONSTRATIO.

In campo acus magnetica semper eidem lineæ respondet in plano horizontali imaginario mundi, quod immobile est, etsi diversis in pyxide successive immineat. Lineam istam designet in charta recta LM & punctum A centrum acus, ex quo descriptus est circulus. Quodsi jam linea meridiana pyxidis admovetur lateri AB, erit principium numerationis in *g* & acus indicabit in *f* quantitatem anguli *i*. In Instrumento transportatorio initium numerandi fit in *f*, & si arcus *fg* declinationi in campo observatæ æqualis assumitur, angulus *i* idem erit, qui ante, situsque lineæ AB rite determinatur. Arcus enim *fg* perinde metitur declinationem ipsius AB a linea meridiana, quam monstrat acus, sive numerandi principium in *f*, sive in *g* fiat. Eodem modo liquet, arcus *fh*, *fk*, *fl* determinare situm rectarum AC, AD, AE respectu lineæ LM; consequenter anguli *x*, *m*, *r* in figura ABCDE erunt æquales totidem cognominibus in altera *abcde*. His suppositis reliqua demonstrantur ut supra in Demonstratione secunda.

Aliter.

Quodsi pyxis cum acu magnetica dioptris non fuerit instructa, sed lignea regula *fg* ita affixa, ut linea meridiana ejusdem *bd*, transiens per centrum pyxidis *c*, sit eidem parallela: Tab. XI. Fig. 174.

1. Regula *fg* ad latus figuræ AB applicetur; quo facto, AB erit ipsi [illegible] parallela.
2. Notetur gradus, quem indicat acus magneticæ *ae* circa centrum *c* libere mobilis cuspis *a*: dico esse angulum *bca* ipsi BAL æqualem, si ML ducatur acui magneticæ *ae* in I productæ parallela.
3. Eodem modo, si regula, cui pyxis affixa, applicetur diagonali AE & recta *ae* designet situm acus, *bd* autem ipsi AE parallela lineam meridianam pyxidis; erit angulus *acb* ipsi EAL æqualis. Cetera igitur peraguntur ut ante.

DEMONSTRATIO.

Id tantummodo demonstrari debet, angulum *acb* esse ipsi BAL, & in altero situ pyxidis ipsi EAL æqualem. Quoniam ex resolutione patet, *bd* esse ipsi BA parallelam, erit angulus IHA ipsi *ecd* (§. 233), consequenter ejus verticali *bca* æqualis (§. 156 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*). Similiter cum sit ML ipsi I*a* parallela, *per construct.* erunt alterni IHA & H[illegible] æquales (§. 233); consequenter H[illegible] $=$ *bca* (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Similiter, si pyxis ad diagonalem AE applicatur, [illegible] ipsi EA parallela, *vi solutionis*; erit NKA $=$ [illegible] (§. 233). Quare cum porro [illegible] *bca* $=$ *ecd* (§. 156); erit NKA $=$ [illegible]

Tab. XI. Fig. 174. (§. 87 *Arithm.*). Denique quia acus magnetica pyxide quomodocunque promota situm obtinet priori, quem habuerat, parallelum, estque adeo N*a* ipsi I*a* parallela; ML vero parallela ipsi I*a per construct.* erit etiam ML ipsi N*a* parallela (§. 232); consequenter NKA = EAL (§. 233), ac ideo EAL = *bca* (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter.

Tab. VII. Fig. 115. 1. Charta super mensula expansa, ex centro *o* describatur circulus.

2. In eodem defigatur stylus, cui inferatur regula cum dioptris.

3. Collineetur in singulos areæ angulos A, B, C, &c. notenturque in peripheria circuli puncta diametraliter opposita *a* & *a*, *b* & *b*, *c* & *c* &c.

4. [illegible]figetur longitudo rectarum *o*A, *o*B, *o*C &c. (§. 126).

VII. Fig. 116. 5. Charta, a mensula remota, alteri mundæ coextendatur in tabula, & Parallelismus ad *aa* applicatus arbitrario intervallo aperiatur, donec in charta munda ipsi parallela AA commode duci possit (§. 258).

6. Idem Parallelismus applicetur ad *bb* & eo usque aperiatur, donec recta BB huic parallela ducta alteram AA ipsi *aa* parallelam in puncto commodo O intersecet.

7. Applicetur porro successive ad rectas *cc*, *dd*, *ee*, quæ confusionis evitandæ gratia in Schemate non omnes [illegible] expressæ, & aperiatur usque ad punctum intersectionis O ipsis *aa* & *bb* parallelarum, ducanturque per idem dictis *cc*, *dd*, *ee* parallelæ CC, &c.

8. Tandem ex puncto intersectionis O convenienter determinetur longitudo rectarum ipsis *o*A, *o*B, *o* C, &c. respondentium juxta Scalam modicam (§. 279). Ita enim ut supra Ichnographiam absolvere licebit.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum tertia Probl. præs. modo demonstretur, si plures lineæ *aa*, *bb*, *cc* &c. se intersecent in *o* & his ducantur totidem aliæ parallelæ AA, BB, CC &c. se itidem in O intersecantes; fore $y = m$, $x = n$, $z = l$ &c. Quod facile patet. Continuetur enim BB, donec ipsi *aa* occurrat in f; continuentur etiam CC & *cc*, donec ipsis *bb* & AA occurrant in g & k. Erit, ob parallelas *aa* & AA, $m = f$, &, ob parallelas *bb* & BB, $y = f$ (§. 233); adeoque $m = y$ (§. 87 *Arithm.*). Similiter, ob parallelas *bb* & BB, $n = g$, &, ob parallelas *cc* & CC, $x = g$ (§. 233), adeoque $n = x$ (§. 87 *Arithm.*). Item, ob parallelas *aa* & AA, $z = k$, &, ob parallelas *cc* & CC, $l = k$ (§. 233), adeoque $l = z$ (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

364. *Ideo commendatur methodus ultima, quod exigua eaque unica charta ingenti tractui dimetiendo sufficiat. Si enim campus in plures resolutus fuerit partes, littera initialis in singulis nota quadam numerica notanda &, ubi unum alphabetum fuerit absolutum, aliud litteris aliis usurpandum.*

SCHO-

SCHOLION II.

365. Etiam sine parallelismo Ichnographiam facillime conficere datur, si puncta a *&* a, *item* b, c, d &c. *subtili acu perforentur & per foramina pulvis carbonum linteo inclusus trajiciatur. Puncta enim* a *&* a *dabunt rectam, qua bifariam divisa determinatur centrum* O: *reliqua puncta* b, c, d &c. *situm angulorum figuræ respectu hujus centri determinant.*

SCHOLION III.

366. Acus magnetica ex optima chalybe cudenda, nec foraminibus (quod ornatus gratia interdum fieri solet ab ignaris) pertundenda, quoniam vis magnetica per lineam rectam diffunditur. Ejus longitudo 6 digitos ne superet, ne sphæram magnetis excedat; a duobus ne deficiat. Præstat major minore, ut angulus, quo in usu a linea meridiana pyxidis declinat, exactius innotescat. Communiter utuntur acu duorum vel ad summum trium digitorum. Uno magnetis polo cum aliqua mora eam affricari sufficit: affricanda autem est pars acus, quæ septentrionem respicere debet, polo australi, nec ductu contrario destruendum, quod anteriore communicatum fuerat. In hemisphærio septentrionali, quod nos inhabitamus, pars acus borealis post contactum magnetis ponderosior evadit & inclinatur: quare levior fieri debet australi. Pyxis ex ligno, ebore vel orichalco; stylus, cui capitellum acus ex ære, cupro, vel argento intus in conum excavatum imponitur, ex orichalco vel argento paratur. Ut acus tanto exactius libretur, quidam styli apicem chalybeum faciunt.

PROBLEMA XLVIII.

367. *Ichnographiam areæ* ABCDE *ex duabus stationibus* A *&* B *perficere.* Tab. VII. Fig. 117.

RESOLUTIO.

1. Posita mensula in A, collineatio fiat in singulos areæ angulos B, C, D, & E; ducanturque rectæ versus eos ex *a*.
2. Quæratur distantia stationum AB (§. 126), & in mensulam ex Scala geometrica (§. 279) transferatur in *ab*.
3. Mensula ex A deferatur in B, ita ut punctum cognomine *b* in ea designatum ipsi B respondeat, & regula ad lineam *ba* applicata, per dioptras collineanti baculus in A defixus occurrat.
4. Ex puncto *b* in singulos rursus figuræ angulos collineatio fiat, & versus eos rectæ ducantur, quæ priores in *e*, *d*, *c*, intersecant.
5. Denique jungantur puncta *a* & *e*, *e* & *d*, *d* & *c*, rectis *ae*, *ed*, *dc*.

Dico, Ichnographiam esse absolutam.

DEMONSTRATIO.

Quoniam 1°. ABC = *abc*, & CAB = *cab*, *per constr.* erit AB : BC = *ab* : *bc*, & AB : AC = *ab* : *ac* (§. 267). Similiter 2°. quia EAB : *eab*, & EBA = *eba*, *per constr.* erit AEB = *aeb*, itemque EA : AB = *ea* : *ab* & EB : AB = *eb* : *ab* (§. *cit.*). Porro 3°. cum sit DAB = *dab* & DBA = *dba*; erit etiam DA : AB = *da* : *ab* & DB : AB = *db* : *ab* (§. *cit.*). 4°. DBC = *dbc*, *per constr.* &, quoniam DB : AB = *db* : *ab* (*per num.* 3), atque AB : BC = *ab* : *bc* (*per num.* 1); DB : BC = *db* : *bc* (§. ... *Arithm.*). Ergo CDB = *cdb*, atque BCD = *bcd*, & BC : CD = *bc* : *cd*, nec non BD : CD = *bd* : *cd* (§. 183). 5°. DB : BC = *db* : *bc* (*per demonstra*...

Tab. VII. Fig. 117. ta n. 4.) & AB : BC = *ab* : *bc* (*per num.* 1). Ergo DB : AB = *db* : *ab* (§. 195 *Arithm.*). Eſt vero etiam EB : AB = *eb* : *ab* (*per num.* 2). Ergo DB : EB = *db* : *eb* (§. *cit.*). Quare cum etiam ſit DBE = *dbe*, *per conſtruct.* erit BDE = *bde* & DEB = *deb*, nec non DB : DE = *db* : *de* & DE : EB = *de* : *eb* (§. 183). 6°. BD : CD = *bd* : *cd* (*per num.* 4) & DB : DE = *db* : *de* (*per num.* 5). Ergo CD : DE = *cd* : *de* (§. 196 *Arithm.*). 7°. EB : AB = *eb* : *ab* (*per num.* 2) & DE : EB = *de* : *eb* (*per num.* 5). Ergo DE : AB = *de* : *ab* (§. 197 *Arithm.*). Quare cum porro ſit EA : AB = *ea* : *ab* (*per num.* 2) erit DE : EA = *de* : *ea* (§. 195 *Arithm.*). 8°. Quia CDB = *cdb* (*per num.* 4) & BDE = *bde* (*per num.* 5); erit CDE = *cde* (§ 88 *Arithm.*). 9°. Similiter quia AEB = *aeb* (*per num.* 2) & DEB = *deb* (*per num.* 5) erit DEA = *dea* (§. 88 *Arithm.*). Cum itaque ſit EAB = *eab*, & ABC = *abc*, *per conſtr.* BCD = *bcd* (*per num.* 4), CDE = *cde* (*per num.* 8), & DEA = *dea* (*per num.* 9); atque præterea AB : BC = *ab* : *bc* (*per num.* 1), BC : CD = *bc* : *cd* (*per num.* 4), CD : DE = *cd* : *de* (*per num.* 6), DE : EA = *de* : *ea* (*per num.* 7), tandemque EA : AB = *ea* : *ab* (*per num.* 2); figuræ ABCDE & ra *abcde* ſimilis eſt (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In A inveſtigetur quantitas angulorum EAD, DAC, & CAB, itemque ex B quantitas angulorum ABE, EBD, & DBC (§. 152); quæraturque ſtationum diſtantia AB (§. 126).
2. Ducta in charta recta *ab* per Scalam modulam diſtantiæ ſtationum AB convenienter determinetur (§. 279).
3. In *a* conſtituantur angulis EAD, DAC, CAB æquales *ead*, *dac*, *cab*; in *b* vero ipſis ABE, EBD & DBC æquales *abe*, *ebd* & *dbc* (§. 155).
4. Tandem puncta interſectionum *b*, *c*, *d*, *e*, *a*, rectis connectantur.

Dico *abcde* eſſe ſimilem areæ ABCDE.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.

Aliter.

1. Ope pyxidis magneticæ obſerventur, ut in Probl. præc. ex duabus ſtationibus A & B declinationes linearum AB, AC, AD, AE, itemque BC, BD, BE a linea meridiana acus.
2. Quæratur diſtantia ſtationum (§. 126).
3. In charta eodem modo, quo in Probl. præc. determinetur ſitus rectarum *ab*, *ac*, *ad*, &c. ac puncta interſectionum *c*, *d*, *e* rectis connectantur.

Ita Ichnographia erit abſoluta.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente, modo una notentur, quæ in demonſtratione penultima Problematis præcedentis dicta ſunt.

PROBLEMA XLIX.

368. *Ichnographiam areæ perficere, cujus integram peripheriam peragrare licet.*

RESO-

RESOLUTIO.

1. Menſula in A collocata, collineetur in baculos in B & E defixos, ut angulo BAE æqualis *bae* in eadem deſignari poſſit.
2. Longitudo utriuſque rectæ AB & AE (§. 126) explorata ex Scala minore transferatur in menſulam ex *a* in *b* & *e* (§. 279).
3. Menſula in B transloccetur, ita ut ipſi B punctum cognomine in eadem reſpondeat, & viſus per dioptras collineantis baculum in A attingat. Quo facto,
4. Idem dirigatur per eaſdem in C, quo ſicut ante, angulo ABC æqualis *abc* & rectæ BC proportionalis *bc* in menſula deſignari poſſint.
5. Quodſi idem cum reliquis areæ angulis & lateribus fiat; erit figura in menſula delineata areæ propoſitæ ſimilis.

DEMONSTRATIO.

Singuli enim anguli figuræ in menſula delineatæ ſunt æquales ſingulis angulis areæ, & latera illius lateribus hujus homologis proportionalia ſunt, *per conſtr.* Figura igitur delineata eſt areæ ſimilis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

Quæratur longitudo omnium laterum (§. 126), & quantitas tot angulorum quot ſunt latera demtis tribus (§. 152). His enim datis Ichnographia *per Probl.* 46 (§. 360), vi demonſtrationis præcedentis abſolvetur.

Aliter.

1. Notetur in ſingulis angulis figuræ A, B, C, D, E, laterum AB, BC, CD, DE, AE declinatio a linea meridiana pyxidis magneticæ, ut in P[illegible] 47 (§. 363). Tab. VII.
2. Quæratur ſimul longitudo laterum (§. 126).
3. In charta deſignetur linea *ab*, & in eam transferatur ex Scala modica longitudo lateris AB (§. 279).
4. Ad rectam *ab* applicetur latus pyxidis lineæ ejuſdem meridianæ parallelum, ita tamen ut extremum ipſius ſeptentrionale ſeptentrionem reſpiciat, & charta cum pyxide huc illucque moveatur, donec acus angulum declinationis debitum monſtret.
5. Charta immota, idem lat[illegible] collocetur in *a* & circa id vertatur, donec angulum declinationis convenientem lateri AE indicet acus: ita enim rectam *ae* ducere & per Scalam modicam ipſi AE proportionalem determinare licet.
6. Quodſi hæc operatio continuetur; Ichnographia tandem abſolvetur.

DEMONSTRATIO.

Non aliud hic demonſtrandum e[illegible] quam angulum *bae*, ope pyxidis m[illegible] neticæ in charta ſic deſignatum, eſſe alteri BAE in campo æqualem. Superi[illegible] uſum pyx[illegible] magnet[illegible] [illegible] inſtructæ exponentes demonſtravimus, pyxide ad latus figuræ AB in campo ita applicata ut linea meridiana ejuſdem ſit huic parallela, angulum declinatio-nis

Tab. VII. Fig. 118. nis acus esse ipsi BAM æqualem, si ML ita ducatur, ope pyxidis, ut ejusdem lineæ meridianæ parallela existat (§. 363). Eodem modo ex ibidem demonstratis apparet, pyxide eadem lege ad latus figuræ AE applicata, esse angulum EAL angulo declinationis acus in hoc situ æqualem. His jam datis, si latus pyxidis lineæ meridianæ ejusdem parallelum ad rectam *ab* in charta ductam applicetur, & charta cum pyxide vertatur, donec acus, in conveniente situ, angulum declinationis eundem, quem in campo ad latus BA, monstret; erit perinde *ba*K eidem angulo declinationis æqualis. Similiter, si eadem lege pyxis applicetur ad punctum *a*, donec acus angulum declinationi lateris AE convenientem monstret & juxta ejus latus ducatur *ae*; erit angulus *ea*I angulo declinationis æqualis. Supponimus nempe, rectam KI per *a* ea lege esse ductam, ut lineæ meridianæ pyxidis in plano mundi imaginario immobili respondeat, centro in *a* collocato. Est igitur 1 = I & 6 = VI, *per construct.* Sed 1 + 7 + 6 = 180°, & I + VII + VI = 180° (§. 147); consequenter 1 + 7 + 6 = I + VII + VI (§. 87 *Arithm.*). Quare 7 = VII (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Vel:

Tab. VII. Fig. 118. 1. In charta ducantur lineæ quotcunque parallelæ.

2. Instrumentum transportatorium Parallelismo instructum ad extimam parallelarum ita applicetur, ut centrum sit in *a*, radius vero ipsi *a*K respondeat, noteturque punctum *z*, indicans in peripheria Instrumenti gradum declinationis acus a linea meridiana pyxidis in campo ad punctum A.

3. Ab *a* per *z* ducatur recta, & ex *a* in *b* transferatur ex Scala modica longitudo rectæ AB in campo mensuratæ.

4. Regula Parallelismi solitaria unam parallelarum stringente, altera cui cohæret Instrumentum transportatorium promoveatur, donec hujus centrum ipsum *b* attingat & ad gradum declinationis in B observatæ designetur punctum *y*: quo facto, ut ante, rectam *bc* ducere licet.

5. Hac operatione continuata, integra areæ Ichnographia tandem absolvetur.

DEMONSTRATIO.

1 = I, 2 = II, 3 = III, 4 = IV & 5 = V, *per constr.* & quoniam recta per *b* ducta (quæ diametrum Instrumenti transportatorii refert) ipsi *a*K parallela, *per construct.* acus vero magnetica in B est parallela situi in A; erit 1 = 8, & I = VIII (§. 233), consequenter 8 = VIII (§. 87 *Arithm.*). Simili modo ostenditur esse 6 = VI. Quare cum sit 1 + 7 + 6 = I + VII + VI (§. 147 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*); erit 7 = VII (§. 91 *Arithm.*). Porro 2 = II, *per constr.* & 8 = VIII, *per demonstr.* Ergo 8 + 2 = VIII + II (§. 88 *Arithm.*). Similiter 12 = 2 & XII = II (§. 233) & 3 = III, *per constr.* Quare cum sit

sit 12+9+3=XII+IX+III (§. 147 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*); erit 9=IX (§. 91 *Arithm.*). Porro 4=IV, *per constr.* & hinc, cum sit 10=3 & X =III (§. 233), adeoque ob 3=III, *per demonstr.* 10=X (§. 87 *Arithm.*), 4+10=IV+X (§. 88 *Arithm.*). Denique 5=V, *per constr.* & 4+11 =IV+XI (§. 233 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*). adeoque ob 4=IV, *per constr.* 11=XI (§ 91 *Arithm.*). Quare 5+11=V+XI (§. 88 *Arithm.*). Singuli igitur anguli figuræ *abcde* sunt æquales singulis angulis areæ ABCDE. Quare cum etiam latera illius lateribus hujus homologis proportionalia sint, *per constr.* figura *abcde* areæ ABCDE similis (§. 175). *Q. e. d.*

PROBLEMA L.

369. *Figuræ in charta delineatæ similem in campo designare.*

RESOLUTIO.

Quoniam hoc Problema est inversum alterius, quo Ichnographias arearum paramus; non modo tot ejus dantur casus, quot hujus commemoravimus, sed & ipsius resolutio ex resolutionibus Problematum inmediate præcedentium intelligitur. Ex. gr. Si semicirculo, vel mensula & pertica utimur: anguli singuli figuræ aut anguli diagonalibus intercepti, &c. in Solo designantur *per Probl.* 7 (§. 155), & latera, vel diagonales, &c. per mensuram majorem decenter determinantur.

CAPUT VI.

De Figurarum Dimensione ac Divisione.

PROBLEMA LI.

370. *INvenire aream Quadrati.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur longitudo lateris (§. 126).
2. Hæc ducatur in seipsam.

Factum exprimit aream Quadrati. Sit ex. gr. Latus Quadrati = 345

345
1725
1380
1035
erit Area = 119025

DEMONSTRATIO.

Aream quadrati investigans quærit, quot digiti quadrati, hoc est, quot quadratula digitum longa & lata in eodem contineantur (§. 118). Evidens vero est, si latus Quadrati AB concipiatur in quotcunque partes æquales & Quadratum ipsum per rectas puncta divisionum in lateribus oppositis connectentes in Quadrata minora divisum, esse quadratulorum series, quot partes habet latus AB, & in qualibet serie tot reperiri quadratula, quot latus BC, vel idem AB habet partes. Numerus ergo quadratulorum invenitur, si latus in seipsum ducatur. *Q. e. d.* Tab. VII. Fig. 119.

COROLLARIUM I.

371. Si latus Quadrati fuerit 10, Area erit 100. Cum igitur decempeda ſit 10 pedum, pes 10 digitorum, &c. (§. 25): pertica quadrata 100 pedes quadratos; pes quadratus 100 digitos quadratos, &c. continet (§. 118).

COROLLARIUM II.

372. Si latus Quadrati fuerit 12, area erit 144. Quare cum pertica dividatur in 12 pedes; pes in 12 digitos &c. pertica quadrata continet 144 pedes quadratos; pes quadratus 144 digitos quadratos &c. (§. 118).

COROLLARIUM III.

373. Datus igitur numerus in priori caſu facile in digitos, pedes, & perticas quadratas reſolvitur, ſi ſcilicet a dextra ſiniſtram verſus duæ notæ digitis, duæ pedibus reſecentur: quæ enim ſiniſtram verſus reſiduæ ſiunt, perticis cedunt. Ex. gr. 119025 digiti conficiunt 11 perticas, 90 pedes, 25 digitos.

COROLLARIUM IV.

374. Quadrata ſunt inter ſe in ratione duplicata laterum (§. 159 *Arithm.*). Ex. gr. Quadratum lateris dupli eſt quadruplum Quadrati lateris ſimpli. Et Quadrata æqualia ſunt, quorum latera æqualia ſunt.

PROBLEMA LII.

Tab. VII. Fig. 120. 375. *Invenire aream Rectanguli* ABCD.

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur longitudo laterum AB & AC (§. 126).
2. Ducatur AB in AC.

Factum erit area Rectanguli.

Ex. gr. Sit AB = 345
AC = 123
1035
690
345
erit Area = 42435

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ Problematis præcedentis.

COROLLARIUM I.

376. Rectangula ſunt in ratione compoſita ſuorum laterum AB & AC (§. 159 *Arithm.*)

COROLLARIUM II.

377. Si ergo fuerint tres lineæ continue proportionales, Quadratum mediæ Rectangulo extremarum æquale eſt (§. 298 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

378. Si quatuor fuerint lineæ rectæ proportionales; Rectangulum ſub extremis æquatur Rectangulo ſub mediis (§. 297 *Arithm.*).

COROLLARIUM IV.

379. Quare ſi ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ, quarum altera AD circulum tangit, altera AB ſecat; erit Quadratum tangentis AD Rectangulo ſub ſecante AB & ejus portione extra circulum AC æquale (§. 334 & 377).

COROLLARIUM V.

380. Si duæ vel plures ſecantes GL & GM ex eodem puncto G ducantur, erunt Rectangula ſub totis & earum portionibus extra circulum æqualia (§. 333 & 379).

COROLLARIUM VI.

381. Si duæ chordæ HM & LI ſe mutuo ſecent in K; erunt Rectangula ſub ſegmentis inter ſe æqualia (§. 332 & 378).

COROLLARIUM VII.

382. Cum orgya, qua lignorum ſtrues metimur, vel quadrati, vel rectanguli figuram habeat; ejus area *per Probl. præc. vel præſ.* inveniri poteſt. Per hanc itaque ſi factum ex longitudine in latitudinem ſtruis dividatur; quotus indicat, quot ipſa orgyas contineat (§. 69 *Arithm.*).

THEOREMA LXXVIII.

383. *Duo Parallelogramma* ABDC *&*

Tab. VII. Fig. 121. & ECDF *super eadem basi CD & inter easdem parallelas* AF & CD *constituta sunt inter se æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB & CD, itemque EF & CD sunt latera opposita parallelogrammi *per hypoth.* erit AB = CD & EF = CD (§. 335); consequenter AB = EF (§. 87 *Arithm.*) & hinc porro AE = BF (§. 88 *Arithm.*). Quoniam porro AC = BD & CE = DF (§. 335); erit △ ACE = △ BDF (§. 204); adeoque ABGC = FEGD (§. 91 *Arithm.*); consequenter ABDC = EFDC (§. 88 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

384. Quoniam AF & CD sunt parallelæ, *per hypoth.* erunt perpendicula inter eas intercepta æqualia (§. 226): quæ cum sint altitudines parallelogrammorum (§. 227); parallelogramma inter easdem parallelas constituta ejusdem altitudinis sunt. Patet adeo Parallelogramma super eadem basi & ejusdem altitudinis æqualia esse (§. 383).

COROLLARIUM II.

385. Ergo & Triangula super eadem basi & ejusdem altitudinis æqualia sunt. Nam Parall. ACDB = Parall. ECDF (§. 384), sed △ ACD = $\frac{1}{2}$ Parall. ACDB & △ FCD = $\frac{1}{2}$ Parall. ECDF (§. 337). Ergo △ ACD = △ FCD (§. 94 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

386. Quodcunque adeo Triangulum CFD est dimidium Parallelogrammi ACDB super eadem vel æquali basi CD, & ejusdem altitudinis, seu intra easdem parallelas. Nam △ CFD = △ ACD (§. 385). Sed △ ACD = $\frac{1}{2}$ Parall. ACDB (§. 337). Ergo △ CFD = $\frac{1}{2}$ Parall. ACDB (§. 87 *Arithm.*).

PROBLEMA LIII.

387. *Invenire aream Rhombi & Rhomboidis, seu Parallelogrammi obliquanguli.*

RESOLUTIO.

1. In CD pro basi assumtam demittatur perpendiculum AE (§. 216), quod erit altitudo parallelogrammi (§. 227). Tab. VII. Fig. 1[illegible]
2. Multiplicetur basis per altitudinem.

Ex. gr. Sit CD = 4° 5′ 6″
AE = 2 3 4
1 8 2 4
1 3 6 8
9 1 2
Erit Area = 10°6 7′ 0 4″

DEMONSTRATIO.

Parallelogrammum obliquangulum æquatur rectangulo super eadem basi CD & ejusdem altitudinis CE (§. 384). Sed area rectanguli æquatur facto ex basi in altitudinem (§. 375 & 229). Ergo eidem æqualis est area parallelogrammi obliquanguli (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

388. Parallelogramma sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 159 *Arithm.*), adeoque & Triangula eorum dimidia (§. 386) in eadem existunt (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

389. Ergo si altitudines sunt æquales, basium; si bases sunt æquales, altitudinum rationem habent (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

390. Parallelogramma æqualia bases & altitudines reciprocant (§. 299 *Arithm.*).

THEOREMA LXXIX. Tab. VIII. Fig. VII. 123.

391. *Triangulum est æquale Pa[illegible]grammo super eadem basi sed dimidiæ altitudinis; itemque Parallelogrammo sup[illegible] dimidia basi & ejusdem altitudinis.*

DEMONSTRATIO.

Sit AEFB parallelogrammum rectangulum, cum obliquangulo cuicunque super eadem basi AB & intra easdem

 nis

Tab. VII. Fig. 123. basi parallelas AB & EF existenti æquale sit (§. 383) atque adeo eidem salva quantitate substitui possit (§. 15 *Arithm.*). Jam

I. Si triangulum ADC fuerit rectangulum, assumta AD pro basi, erit CD altitudo; sumta vero DC pro basi, erit AD altitudo (§. 228). Jam cum altitudo parallelogrammi rectanguli AE (§. 229) sit altitudini dimidiæ trianguli CG æqualis, *per hypoth.* & angulus ad D sit rectus (§. 91), adeoque, ob EF & AB parallelas (§. 102), is ad G similiter rectus (§. 233), ac præterea angulus ad E itidem rectus (§. 100), & hinc G=E (§. 145); sint vero etiam verticales ad H æquales (§. 156): erit △CGH = △EHA (§. 252); consequenter EGDA = △ACD (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

II. Si triangulum ACB fuerit obliquangulum, per perpendiculum DC in duo rectangula ADC & CDB resolvetur (§. 78, 91). Ergo si fiat FB = DG dimidiæ altitudini; erit DGFB = △DCB & AEGD = △ACD, *per cas.* 1. Ergo AEFB = △ACB (§. 88 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Tab. VII. Sit DK = KB = ½DB & DG = GA = ½DA; erit GK = ½AB, adeoque dimidia basis. Jam CFKD = △DCB & ECD = △ACD, *per cas.* 1. Quare EFKF = △ACB (§. 88 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA LIV.

Tab. VIII. 392. [illegible] Trianguli.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Multiplicetur basis AB per altitudinem CD: erit productum area rectanguli ejusdem baseos & altitudinis (§. 387).

2. Productum dividatur bifariam. Ita prodit area Trianguli ABC (§. 386).

Aliter.

Basis dimidia ½ AB multiplicetur per altitudinem CD; vel basis AB per altitudinem dimidiam ½ CD. Factum erit area Trianguli (§. 391, 387).

Ex. gr. AB = 3° 4′ 2″   AB = 3° 4′ 2″

CD = 2 3 4	½CD = 1 1 7
1 3 6 8	2 3 9 4
1 0 2 6	3 4 2
6 8 4	3 4 2
8 0 0 2 8	△ = 4 0 0 1 4
2)	
△ACB, 4 0 0 1 4	

½ AB = 1° 7′ 1″
CD = 2 3 4
6 8 4
5 1 3
3 4 2
△ = 4 0 0 1 4

COROLLARIUM I.

393. Triangula æqualia bases & altitudines dimidias (§. 299 *Arithm.*); consequenter etiam bases & altitudines integras reciprocant (§. 178 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

394. Si area Trianguli per basin dimidiam dividitur, quotus est altitudo (§. 210 *Arith.*).

PROBLEMA LV.

395. *Invenire latus Quadrati Parallelogrammo, vel Triangulo dato æqualis.*

RESOLUTIO.

Quæratur inter basin & altitudinem Parallelogrammi, vel inter dimidiam basin & altitudinem, aut integram basin & dimidiam altitudinem Trianguli media proportionalis, *per* §. 327, aut in numeris *per* §. 301 *Arithm.* Ita prodit latus Quadrati quæsitum.

DE-

DEMONSTRATIO.

Factum enim ex basi in altitudinem exprimit aream parallelogrammi (§. 375, 387); & factum ex dimidia basi in altitudinem, vel ex dimidia altitudine in basin aream trianguli (§. 392). Cum adeo quadratum lineæ vel numeri reperti sit in utroque casu facto isti æquale (§. 298 *Arithm.*); erit Quadratum istud in priori casu Parallelogrammo, in posteriori Triangulo æquale. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXX.

396. *In Parallelogrammis & Triangulis similibus, altitudines sunt lateribus homologis proportionales; & bases ab iis lateribus proportionaliter secantur.*

DEMONSTRATIO.

Cum altitudines AE & *ae* sint ad bases CD & *cd* perpendiculares (§. 227); erunt E & *e* anguli recti (§. 78), adeoque æquales (§. 145). Et quia parallelogrammum ABDC ipsi *abdc* triangulum CAD ipsi *cad* simile, *per hypoth.* erit C = *c* (§. 175). Quare AC:AE = *ac*:*ae* (§. 267). Est vero etiam AC:CD = *ac*:*cd* (§. 175). Ergo AE:CD = *ae*:*cd* (§. 196 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam E = *e* & C = *c*, *per demonstr.* erit AC:CE = *ac*:*ce* (§. 267). Est vero etiam AC:CD = *ac*:*cd* (§. 175). Ergo CE:CD = *ce*:*cd* (§. 196 *Arithm.*); adeoque ED:CE = *ed*:*ce* (§. 193 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

397. *Patet quoque a priori. Quoniam enim* ABDC ∽ abdc *&* △ ACD ∽ △ acd, *per hypoth. perpendicula* AE *&* ae, *pariterque segmenta basium* CE *&* ce, *itidemque* ED *&* ed *eodem modo determinantur* (§. 119, 216), *adeoque similia sunt* (§. 120). *Cum adeo ea eadem sint, per quæ a se invicem discerni debebant* (§. 24 Arithm.), *lineæ autem rectæ, utpote similes* (§. 17), *non aliter nisi ratione discerni possint* (§. 132 Arithm.); *tam perpendicula, quam segmenta basium ad latera homologa figurarum eandem rationem habere debent* (§. 149 Arithm.). *Eodem modo generaliter patet, rectas quascunque in figuris similibus eodem modo determinatas tum inter se, tum ad latera homologa eandem rationem habere.*

Tab. VII. Fig. 122.

COROLLARIUM I.

398. Quoniam Parallelogramma & Triangula sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 388); similia vero habent bases altitudinibus proportionales (§. 396); igitur Parallelogramma & Triangula similia habent rationem duplicatam homologorum laterum (§. 159 *Arithm.*). Et eodem modo patet, quod etiam sint in ratione duplicata altitudinum ac segmentorum baseos; immo linearum eodem modo utlibet determinatarum (§. 397).

COROLLARIUM II.

399. Sunt ergo ut quadrata laterum, altitudinum, & segmentorum basium homologorum, necnon linearum eodem modo utlibet determinatarum (§. 374).

PROBLEMA LV.

400. *Invenire aream Polygoni irregularis, ac Trapezii.* Tab. VIII. Fig. 125.

RESOLUTIO.

1. Resolvatur per diagonales AD & AC in triangula.
2. Inveniantur areæ singulorum triangulorum (§. 392) &
3. Addantur. Erit summa area quæsita (§. 86 *Arithm.*).

Tab. VIII. Fig. 126.

Ex.gr. $\frac{1}{2}$AD = 43′	$\frac{1}{2}$AD = 43′	$\frac{1}{2}$AC = 42′
EF = 35	GC = 45	BH = 30
215	215	△ABC, 1260
129	172	
△AED, 1505	△DAC, 1935	
	△AED, 1505	
	△ABC, 1260	

Area Polygoni irreg. 47°00′

Quodsi $\frac{1}{2}$AD multiplicetur per summam altitudinum EF + GC, vel integra AD per $\frac{1}{2}$(EF + GC); prodibit area Trapezii AEDC.

Ex. gr. EF = 35	$\frac{1}{2}$AD = 43
GC = 45	EF + GC = 80
EF + GC = 80	AEDC = 3440
$\frac{1}{2}$(EF + GC) = 40	
AD = 86	
AEDC = 3440	

Tab. VIII. Fig. 127. Similiter si in Trapezio fuerit AB ipsi CD parallela, erunt triangulorum altitudines BF & GC æquales (§. 226, 227); consequenter Trapezii area prodit, ducta semisumma basium parallelarum AB & CD in altitudinem ejus BF (§. 392).

Ex. gr. Sit AB 246″, CD = 378″, BF = 195″

erit $\frac{1}{2}$(AB + CD) = 312
BF = 195
1560
2808
312
Area Trapezii 60840

THEOREMA LXXXI.

Tab. VIII. Fig. 107. 401. *Figura regularis* ABCDE *ex centro circuli circumscripti* F *in triangula æqualia atque similia resolvitur, & area ejus æqualis Triangulo, cujus basis peripheria totius Polygoni* AB+BC+CD, *&c. altitudo perpendiculum* FG *ex centro* F *in latus unum* AB *demissum. Idem valet de area circumscripti* abcde, *nisi quod altitudo sit radius* FG.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB = BC = CD = DE = EA (§. 106), & FA = FB = FC = FD = FE (§. 40); triangula AFB, BFC, CFD, DFE, EFA æqualia & similia sunt (§. 204). *Quod erat unum.*

Constituantur triangula AFB, BFC, CFD, &c. in quæ resolutum est Polygonum ABCDE, super eadem recta AA (§. 199). Erigatur in A perpendicularis Af (§. 249) ipsi altitudini triangulorum æqualis. Erit AfB = AFB, BfC = BFC, CfD = CFD, &c. (§. 385); consequenter AfA = AFB + BFC + CFD &c. (§. 88 *Arithm.*) æqualis est areæ Polygoni regularis (§. 86, 87 *Arithm.*). *Quod erat secundum.*

Cum recta Fg ex centro F ad contactum *g* ducta sit radius & ad latus *ae* perpendicularis (§. 308); erit ea altitudo trianguli *a*F*e* (§. 227). Reliqua patent ut ante. *Quod erat tertium.*

PROBLEMA LVI.

402. *Invenire aream Polygoni regularis.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Latus Polygoni AB multiplicetur per dimidium laterum numerum; ex. gr. latus Hexagoni per 3.
2. Factum porro ducatur in perpendiculum GF ex centro circuli circumscripti in latus AB demissum.

Ita prodit area quæsita (§. 392, 401).

Ex.

Ex. gr. AB =	5°4
dimidius Numer. later.	$2\frac{1}{2}$
	27
	108
Semiperimeter =	135
FG =	29
	1215
	270
Area Pentagoni	39°15′

THEOREMA LXXXII.

403. *Quadrilatera & Polygona similia* ABCDE *&* abcde *per diagonales* AC, AD *&* ac, ad *in similia triangula* ABC *&* abc, ACD *&* acd, ADE *&* ade *dividuntur, & inter se & totis proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam ABCDE ∽ *abcde*, *per hypoth.* erit $o = o$, & AB : BC = *ab* : *bc* (§. 175). Ergo △*bac* ∽ △BAC, $y = y$ atque *bc* : *ca* = BC : CA (§. 183). Est vero etiam *bc* : *cd* = BC : CD, & $n + y = n + y$ (§. 175). Ergo *ca* : *cd* = CA : CD (§. 196 *Arithm.*) & $n = n$ (§. 91 *Arith.*); consequenter △*cad* ∽ △CAD, *cd* : *da* = CD : DA, & $u = u$ (§. 183). Est vero etiam $u + s = u + s$, & *cd* : *de* = CD : DE (§. 175). Ergo $s = s$ (§. 91 *Arithm.*) & *da* : *de* = DA : DE (§. 196 *Arithm.*); consequenter △*dea* ∽ △DEA (§. 183), *Quod erat primum.*

Quoniam △ABC ∽ △*abc*, △DAC ∽ △*dac* & △DAE ∽ △*dae*, *per demonstrata*; erit △ABC : △*abc* = $CA^2 : ca^2$, △DAC : △*dac* = $CA^2 : ca^2$ = $DA^2 : da^2$ & △DAE : △*dae* = $DA^2 : da^2$ (§. 398); consequenter △ABC : △*abc* = △DAC : △*dac* & △DAC : △*dac* = △DAE : △*dae* (§. 167 *Arith.*); adeoque etiam △DAE : △*dae* = △ABC : △*abc* (§. *cit.*). Sunt igitur △△ ABC, ACD, ADE, & *abc*, *acd*, *ade* inter se proportionalia. *Quod erat secundum.* Tab. VI. *Fig.* 111.

Quoniam denique △ABC : △*abc* = △DCA : △*dca* = △DEA : △*dea per secundum hujus*; erit △ABC + △DCA + △DEA : △*abc* + △*dca* + △*dea* = △ABC : △*abc* (§. 192 *Arithm.*). Sed △ABC + △DCA + △DEA = polygono ABCDE & △*abc* + △*dca* + △*dea* = *abcde* (§. 86 *Arithm.*). Ergo ABCDE : *abcde* = △ABC : △*abc* = △DCA : △*dca*, &c. (§. 168 *Arithm.*); consequenter ABCDE : △ABC = *abcde* : △*abc*, & ABCDE : △DCA = *abcde* : △*dca* &c. (§. 173 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

404. Cum Polygona regularia sint æquilatera & æquiangula (§. 106), tum etiam sibi mutuo æquiangula (§. 344); Polygona regularia ejusdem ordinis, veluti omnia Pentagona, omnia Hexagona, &c. regularia, inter se similia sunt (§. 175). Polygona igitur regularia ejusdem ordinis per diagonales in triangula similia dividuntur & inter se, & totis proportionalia.

SCHOLION.

405. *Poterat Theorema præsens ex notione determinationis facilius demonstrari. Nimirum cum figuræ* ABCDE *&* abcde *sint similes*, per hypoth. *adeoque anguli* A *&* a *æquales* (§. 175), *atque præterea diagonales* AC, AD & ac, ad *ex angulis hisce æqualibus* A *&* a *ducantur*; △△ ABC *&* abc, CAD *&* cad, DAE *&* dae *eodem modo determinantur* (§. 119); *consequenter & inter se similia sunt & similes partes figurarum existunt* (§. 120); *eandem adeo ad figuras tanquam tota rationem* (§. 170 Arithm.), *immo eandem inter se rationis*

Tab. VI. Fig. 111. *tionem quam Polygona aut Quadrilatera habent* (§. 171 Arithm.).

THEOREMA LXXXIII.

406. *Figuræ, tam regulares quam similes irregulares, habent rationem duplicatam homologorum laterum.*

DEMONSTRATIO.

Sint figuræ ABCDE & *abcde*, sive regulares, sive irregulares similes, eæque sive quadrilateræ, sive polygonæ quæcunque ejusdem ordinis; erit ABCDE : *abcde* = △ ABC : △ *abc* = △ ACD : △ *acd* = △ ADE : △ *ade* (§. 403, 404). Sed △ ABC : △ *abc* = $AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$; △ ADC : △ *adc* = $CD^2 : cd^2$ & △ ADE : *ade* = $DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2$ (§. 398). Ergo ABCDE : *abcde* = $AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2 = DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2$ (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

407. *Eodem modo ostenditur, figuras rectilineas similes esse in ratione duplicata diagonalium ex angulis æqualibus* A *&* a *ductarum, vel linearum aliarum quarumcunque eodem modo intra eas determinatarum* (§. 405).

THEOREMA LXXXIV.

408. *Circuli & figuræ similes ipsis inscriptæ vel circumscriptæ sunt inter se ut Quadrata diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus describi duos circulos & iis circumscribi quadrata, omnia utrobique eodem modo determinabuntur (§. [illegible] & 357). Sunt ergo figuræ utræque inter se similes (§. [illegible]). Cum adeo utrobique eadem sint, per quæ distingui debent (§. 24 *Arithm.*); quadrata circulis circumscripta ad suos circulos eandem rationem habere debent (§. 132 *Arithm.*). Quamobrem Circuli inter se sunt ut Quadrata diametrorum (§. 173 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, figuras similes circulis inscriptas vel circumscriptas esse ut circulos, quibus inscribuntur vel circumscribuntur. Sed circuli sunt ut quadrata diametrorum, *per demonstrata.* Ergo Figuræ ipsis inscriptæ & circumscriptæ similes sunt ut Quadrata diametrorum (§. 167 *Arithm.*) *Quod erat alterum.*

Aliter.

Resolvantur Polygona circulis inscripta ABCDE & *abcde* ex centris F & *f* in △△ AFB, BFC, CFD, & *afb*, *bfc*, *cfd*, &c. erit angulus FAB = *fab* & FBA = *fba*, &c. (§. 344, 347); consequenter △ AFB ∽ △ *afb* (§. 267). Eodem modo patet, esse △ BFC ∽ △ *bfc*, △ CFD ∽ △ *cfd* &c. Habemus itaque △ AFB : △ *afb* = $BF^2 : bf^2$, △ BFC : △ *bfc* = $BF^2 : bf^2$ &c. (§. 398). Ergo ABCDE : *abcde* = $BF^2 : bf^2$ (§. 187 *Arithm.*) consequenter cum radii BF & *bf* sint ut diametri (§. 39 *Geom.* & 178 *Arithm.*), Polygona similia circulo inscripta sunt ut Quadrata diametrorum (§. 260 *Arithm.*). Et idem eodem modo ostenditur de Polygonis circulo circumscriptis, cum triangula similia etiam sint in ratione duplicata altitudinum (§. 398), altitudines vero triangulorum, in quæ resolvitur polygonum circulo circumscriptum, sint radii circulorum (§. 355).

Quod

Quodsi jam Polygonum circulo inscriptum tot sumatur laterum, donec subtensa a peripheria magnitudine inassignabili differat; polygonum cum circulo idem erit. Unde etiam Circuli erunt inter se ut diametrorum Quadrata.

COROLLARIUM.

409. Habent ergo Circuli rationem duplicatam diametrorum (§. 374): adeoque, cum radii sint ut diametri (§. 39 *Geom.* & §. 181 *Arithm.*), & radiorum (§. 260, 259 *Arithm.*).

THEOREMA LXXXV.

410. *Circulus æqualis est triangulo, cujus basis peripheriæ, altitudo radio æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 132. Concipiatur peripheria circuli in partes numero infinitas inter se æquales, adeoque infinite parvas divisa; arcus infinite exigui *ab* supra chordam cognominem excessus erit quovis dato minor, seu inassignabilis, adeoque revera nullus. Concipiantur porro ex centro *c* ad extrema arcus infinite parvi *ab* ducti radii *cb* & *ca*: erit angulus *acb* infinite parvus, adeoque *a* & *b* non different a recto (§. 240); consequenter si *ab* sumatur pro basi, radius *ac* erit trianguli *abc* altitudo (§. 228). Cum adeo area circuli resolvatur in istiusmodi triangula numero infinita, quorum altitudo communis est radius *ac*, bases vero junctim sumtæ sunt peripheriæ circuli æquales, *per demonstrata*; erit ille æqualis triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radius circuli (§. 401). *Q. e. d.*

SCHOLION.

411. *Hac demonstrandi methodo primus usus est* KEPLERUS (*a*). *Eam exemplo ejus excitatus sub nomine* Methodi indivisibilium *magis excoluit* CAVALERIUS (*b*). *Demonstrationem indirectam dedit* ARCHIMEDES (*c*) *non contemnendam, quoniam ipsius demonstrandi methodo principia methodi infinitesimalis rigidantur.*

COROLLARIUM I.

412. Sunt igitur circuli in ratione composita peripheriarum & radiorum (§. 388). Sed iidem sunt in ratione duplicata radiorum (§. 409). Quare peripheriæ sunt inter se ut radii (§. 159 *Arithm.*)

COROLLARIUM II.

413. Cum adeo sit, ut peripheria circuli unius ad suum radium, ita peripheria alterius cujuscunque ad suum (§. 173 *Arith.*): ratio peripheriæ ad radium seu diametrum (§. 39 *Geom.* & §. 181 *Arithm.*) in omnibus circulis eadem.

SCHOLION.

414. *Idem etiam hoc modo ostenditur. Cum omnes circuli inter se similes sint* (§. 134); *per quæ distingui possent, ea eadem sunt* (§. 24 Arithm.). *Quoniam itaque per rationem peripheriarum ad diametros distingui possent, siquidem ea in diversis circulis diversa foret* (§. 132 Arithm.); *ratio in omnibus eadem esse debet.* Q. e. d.

THEOREMA LXXXVI.

415. *Sector circuli* ACD *æqualis est triangulo, cujus basis arcus* AD, *altitudo radius* AC. Tab. VIII. Fig. 133.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Theorematis præcedentis (§. 410).

(*a*) *In Nova Stereometria doliorum vinariorum* Part. I. Theor. 2. f. B. 2.

(*b*) Vide præfat. ad *Geometriam indivisibilium continuorum nova ratione promotam.* p. b. 2.

(*c*) In libello *De circuli dimensione*, prop. 1.

THEOREMA LXXXVII.

416. *Polygonum inscriptum minus; circumscriptum majus est Circulo. Similiter illius perimeter minor; hujus autem perimeter major est peripheria Circuli.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 107. Latera AB, BC, CD &c. polygoni inscripti sunt chordæ arcus cognomines subtendentes (§. 342). Sed chordæ sunt arcubus minores (§. 191). Ergo singula polygoni latera AB, BC, CD &c. sunt singulis arcubus eisdem respondentibus minora; consequenter perimeter polygoni circulo inscripti est hujus peripheria minor (§. 90 *Arithm.*). Et quoniam chordæ totæ intra circulum cadunt: area polygoni parti circuli congruit (§. 9 *Arithm.* & §. 3 *Geom.*), adeoque ipsi æqualis est (§. 161); consequenter Polygonum inscriptum Circulo minus (§. 20 *Arithm.*). *Quod erat primum & secundum.*

Latera polygoni circumscripti *ab*, *bc*, *cd* &c. tangunt circulum (§. 355), adeoque totæ extra eum cadunt (§. 47); consequenter circulus parti polygoni congruit (§. 9 *Arithm.* & §. 3 *Geom.*). Hinc ipsi æqualis (§. 161), hoc est, Circulus Polygono circumscripto minor est (§. 20 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

Area polygoni circumscripti est ad aream circuli in ratione composita radii circuli & perimetrorum (§. 401, 410, 388); consequenter ut factum ex radio in perimetrum polygoni ad factum ex radio in peripheriam circuli (§. 159 *Arithm.*). Ergo illa ad hanc ut illius perimeter ad hujus peripheriam (§. 181 *Arithm.*). Sed polygonum majus circulo per demonstr. Ergo & ejus perimeter major peripheria hujus (§. 149 *Arith.*). *Quod erat quartum.*

THEOREMA LXXXVIII.

417. *In Triangulo rectangulo* ABC, *quadratum hypothenusæ* AC *æquale est quadratis laterum* AHIB *&* BCED *simul sumtis.*

DEMONSTRATIO.

Ducantur rectæ AE & BF (§. 121), itemque BK ipsi CF parallela (§. 258). Quoniam △ ACE cum quadrato CEDB super eadem basi & inter easdem parallelas (§. 336) existit; hujus dimidium est (§. 391). Ex eadem ratione △ BCF est dimidium parallelogrammi LCFK. Enimvero quia $x=o$ (§. 98, 145), adeoque $x+y=o+y$ (§. 88 *Arithm.*), BC = CE & AC = CF (§. 98); ideo △ ACE = △ BCF (§. 179); consequenter BCED = LCFK (§. 93 *Arithm.*). Eodem modo ostenditur, esse AHIB = ALKG. Quamobrem BCED + AHIB = LCFK + ALKG (§. 88 *Arithm.*) = ACFG (§. 86 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

418. *Hoc Theorema* PYTHAGORAS *invenit: unde* Pythagoricum *dicitur, Amplissimi per Mathesin universam est usus: ideo ab illius auditoribus Hecatombe, hoc est, centum boum sacrificio redemtum fertur.*

COROLLARIUM I.

419. Quadratum construitur duobus aut pluribus datis simul sumtis æquale, si 1°. latera duorum AC & AB jungantur ad angulos rectos (§. 249); 2°. super ducta hypothenusa BC erigatur latus tertii CD perpendiculariter (§. cit.), ducaturque hypothenusa BD &c. Est enim $BC^2 = AB^2 + AC^2$ & BD^2

$BD^2 = BC^2 + CD^2$ (§. 417). Ergo $BD^2 = AB^2 + AC^2 + CD^2$ &c.

COROLLARIUM II.

420. Quodsi AB fuerit $= 1$, & $AC = 1$; erit $CB = \sqrt{2}$. Si porro fiat $AD = CB = \sqrt{2}$; erit $DB = \sqrt{3}$. Si fiat $AE = 2$; erit $BE = \sqrt{5}$. Si fiat $AF = EB = \sqrt{5}$; erit $FB = \sqrt{6}$, & ita porro in infinitum. Omnes adeo radices quadratæ surdæ sunt ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam; consequenter numeri (§. 10 *Arithm.*) iique irrationales (§. 43, 295 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

421. Cum CB sit diagonalis quadrati (§. 111); erit ea ad latus AB ut $\sqrt{2}$ ad 1. Sed $\sqrt{2}$ est numerus irrationalis (§. 420), adeoque unitati incommensurabilis (§. 43 *Arithm.*); consequenter diagonalis quadrati est lateri incommensurabilis.

COROLLARIUM IV.

422. Dantur adeo quantitates incommensurabiles, hoc est, quarum nulla datur pars aliquota communis (§. 31 *Arithm.*); consequenter rationes irrationales (§. 164 *Arithm.*). Et hinc patet non repugnare, ut hæ numeris irrationalibus exprimantur (§. 419).

PROBLEMA LVII.

Tab. VIII. Fig. 133. 423. *Datis chorda* AB *& radio* AC, *invenire chordam arcus dimidii* AD.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam radius CD arcum AB bisecat in D, *per hypoth.* etiam chordam AB bisecat & ad eam perpendicularis est (§. 291); adeoque anguli ad E recti sunt (§. 78). Quare

1. A quadrato radii AC subtrahatur quadratum chordæ dimidiæ datæ AE: residuum est quadratum ipsius EC (§. 417).
2. Ex hoc residuo extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arithm.*), quæ erit EC. Tab. VIII. Fig. 133.
3. Hæc ex radio DC subducta relinquit DE.
4. Addantur quadrata AE & DE, summa est quadratum DA (§. 417).
5. Inde ergo si extrahatur radix (§. 269 *Arithm.*); habetur chorda arcus dimidii AD.

Ex. gr. Sit radius $AC = 10000$, & AB latus Hexagoni: erit AB itidem 10000 (§. 356), & $AE = 5000$.

Quare

$AC^2 = 100000000$	$AE^2 = 25000000$
$AE^2 = 25000000$	$ED^2 = 1795600$
$CE^2 = 75000000$	$DA^2 = 26795600$
	$DA = 5176$
$CE = 8660$	
$DC = 10000$	
$DE = 1340$	

PROBLEMA LVIII.

424. *Dato latere Polygoni regularis inscripti* AB, *invenire latus circumscripti* FG. Tab. VI. Fig. 134.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam FG parallela ipsi AB, & DC chordam AB bifariam dividit (§. 355); erit $AE = \frac{1}{2}$ AB & CE: EA = CD : DG (§. 268). Quare si ob angulum rectum ad E (§. 2[illegible]) EC investigetur ut in Problemate præcedente; reperietur DG (§. 302 *Arithm.*), cujus duplum est latus polygoni circumscripti FG. Est enim CE : CD=EA : DG, & CE : CD=EB:DF (§. 268). Cum adeo sit EA : DG=EB : DF (§. 167 *Arithm.*), & EA = EB, per demon-

Tab. VIII. Fig. 134. *demonstrata*: erit etiam DG=DF (§. 77 *Arithm.*); adeoque FG=2DG. *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. Sit CD = AB = 10000; erit AE = 5000 & EC = 8660 (§. 423); adeoque DG = 5773. Hinc FG = 11546.

PROBLEMA LIX.

425. *Invenire rationem diametri ad peripheriam.*

RESOLUTIO.

1. Quærantur per continuam bisectionem latera polygonorum inscriptorum (§. 423), donec perveniatur ad latus arcum quantumlibet exiguum subtendens.
2. Invento hoc latere, quæratur porro latus polygoni similis circumscripti (§. 424).
3. Multiplicetur utrumque per numerum laterum polygoni, ut habeatur perimeter polygoni, tam inscripti, quam circumscripti (§. 106).

Erit ratio diametri ad peripheriam circuli major quam ejusdem ad perimetrum polygoni circumscripti; minor vero, quam ejusdem ad perimetrum inscripti (§. 416 *Geom.* & §. 205 *Arithm.*). Differentia vero inter utramque perimetrum cognita, haud difficulter definitur ratio diametri ad peripheriam circuli in numeris prope veris.

Sit ex. gr. radius circuli 1, seu (ut latera Polygonorum per fractiones decimales exprimere liceat) 1.000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000; reperietur, continua a Quadrato bisectione, latus Polygoni 1, 073, 741, 824 laterum inscripti vero proxime minus 0. 000000000585167231700863871 22; circumscripti autem latus vero itidem proxime majus 0, 0000000005851 7231706863873784. Hinc perimeter circumscripta 6. 28318530717958649156537 vero proxime major; inscripta autem 6. 28318530717958645093 vero proxime minor. Cum ergo circuli peripheria intra hos limites contineatur; posita diametro 2. 000000000000000, erit peripheria minor quam 6. 2831853071795865, major vero quam 6. 2831853071795863. Unde ratio prope vera diametri ad peripheriam ut 1000000000000000 ad 31415926535897932. Compendia calculi tradit *Ludolphus* A CEULEN (*a*).

SCHOLION I.

426. *In quadrando Circulo ab omni ævo, quo Geometria exculta, desudarunt ingenia præstantissima: perfectam tamen quadraturam in numeris finitis nemo adhuc dedit, utut nostra præsertim ætate ars inveniendi egregie promota fuerit. Rationem tamen diametri ad peripheriam in numeris prope veris dederunt multi:* ARCHIMEDES (*b*) *ea fini excogitavit methodum quadrandi Circulum per Polygona regularia inscripta & circumscripta, & Polygonis 96 laterum usus invenit rationem diametri ad peripheriam esse ut 7 ad 22 fere. Nimirum si diameter 1, perimeter Polygoni inscripti reperitur* $3\frac{10}{71}$; *perimeter vero circumscripti* $3\frac{1}{7}$. *Ejus vestigiis insistentes posteri rationes propiores investigarunt. Nemo autem plus operæ impendit* Ludolpho A CEULEN (*c*), *qui tandem reperit, posita diametro 1, peripheriam esse minorem quam 3. 14159265358979323846264338327950, sed majorem quam idem numerus, cyphra ultima in unitatem mutata. Enimvero quoniam numeri adeo prolixi praxi parum respondent; in Geometria practica hodie a plerisque assumitur, diametrum esse ad peripheriam*

(*a*) In libro *De circulo & adscriptis*. Conf. *Fundamenta Arithmetica & Geometrica* lib. 6. probl. 1. p. m. 241. & seqq.

(*b*) In libello *De circuli dimensione* prop. 2.

(*c*) In *Zetematum Geometricorum Epilogismo*. Zetem. 2. p. 92.

pheriam ut 100 *ad* 314, *vel in circulis majoribus ut* 10000 *ad* 31415 : *in qua proportione*, PTOLEMÆUS, VIETA, HUGENIUS *cum* LUDOLPHO *consentiunt*. HUGENIUS (*a*) *compendiosiorem monstravit viam ; sed pluribus Theorematis nixam, quæ in hisce Elementis non demonstrantur.*

COROLLARIUM.

427. Si diameter fuerit 113; erit peripheria 113. 31415 : 10000 (§. 272 *Arith.*) hoc est 355 quam proxime.

SCHOLION II.

428. *Hæc proportio, quam* Adrianus METIUS *tradit* (*b*) *a parente suo inventam & demonstratam* (*c*), *inter omnes, quæ parvis numeris exprimuntur, accuratissima. Quodsi enim numerum* 355 *septem cyphris ad obtinendas fractiones decimales auctum per* 113 *dividas ; quotus cum proportione* Ludolphina *collatus ostendet eam ne quidem* $\frac{2}{10000000}$ *a vera differre.*

PROBLEMA LX.

429. *Data diametro Circuli, invenire peripheriam & aream ejus ; & data peripheria diametrum.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Cum detur ratio diametri ad peripheriam (§. 426, 427); una data, invenietur altera (§. 302 *Arithm.*)
2. Peripheria ducta in quartam diametri partem, habetur area circuli (§. 410, 392).

Ex. gr. Sit diameter 56 : erit

100 — 314 — 56	Periph. 175 84'''
56	¼ Diam. 1400
1884	7033600
1570	17584
Per. 17° 5' 8'' 4'''	Area 24° 61' 76'' 00'''

(*a*) In *Inventis de circuli magnitudine* prop. 10. p. 15. & prop. 20. p. 40.
(*b*) In *Geometria practica*, part. 1. c. 10. §. 3. p. m. 89.
(*c*) In libello adversus quadraturam circuli Simonis A QUERCU conscripto.

COROLLARIUM I.

430. Si diameter 100 ; peripheria 314 (§. 426), adeoque area circuli 7850 (§. 429). Est vero Quadratum diametri 10000 (§. 370) : ergo hoc ad aream Circuli ut 10000 ad 7850, hoc est, ut 1000 ad 785, (§. 181 *Arithm.*) quam proxime.

COROLLARIUM II.

431. Similiter si diameter 113, peripheria 355 (§. 427), adeoque area Circuli 10028¾ (§. 429). Est vero Quadratum diametri 12769 (§. 370). Ergo hoc ad illam ut 12769 ad 10028¾ hoc est, ut 51076 ad 40115 (§. 178 *Arithm.*) ; consequenter (dividendo per 113) ut 452 ad 355 (§. 181 *Arithm.*), quæ *Metiana* proportio priori accuratior.

COROLLARIUM III.

432. Area igitur Circuli etiam invenitur, si ad 1000, 785 & Quadratum diametri ; vel ad 452, 355 & Quadratum diametri numerus quartus proportionalis quæratur (§. 302 *Arithm.*).

Sit ex. gr. diameter 560'', erit quadratum ejus 31° 36' 00''. Quare

1000 — 31° 36' 00'' — 785
785
———
1568000
25088
21952
———
24° 61' 76'' Area Circuli.

COROLLARIUM IV.

433. Si area circuli minoris GEHF subtrahatur ex area majoris concentrici ADBC, relinquitur annulus ADBCGEHF. Tab. VIII. Fig. 125.

PROBLEMA LXI.

434. *Data area Circuli, invenire diametrum.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad 785, 1000 & aream circuli datam 246176 numerus

 quar-

quartus proportionalis 313600 (§. 302 *Arithm.*): qui eſt quadratum diametri (§. 430).

2. Inde extrahatur radix quadrata 560 (§ 269 *Arithm.*), quæ eſt diameter (§. 236 *Arithm. &* §. 370 *Geom.*)

PROBLEMA LXII.

Tab. VI. Fig. 133. 435. *Dato radio circuli* AC, *una cum ratione arcus* AB *ad peripheriam; invenire aream Sectoris* ACB.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad 100, 314 & radium AC numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*): qui eſt ſemiperipheria (§. 436 *Geom. &* §. 181 *Arithm.*).
2. Quæratur porro ad 180°, arcum datum AB, & ſemiperipheriam inventam numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*): ut habeatur arcus AB in eadem menſura, in qua radius AC datur.
3. Tandem arcus AB ducatur in ſemiradium.

Factum exprimet aream Sectoris (§. 415, 392).

Ex. gr. Sit radius 6′; arcus 60°.

100 — 314 — 600‴
6 00

Semiperiph. 1884|00
180 — 1884 — 60

60) 3 ——— 1
6 2 8‴ = AB
3 00 = ½AC.
Area 18′ 8 4″|00| = ACB

PROBLEMA LXIII.

Tab. VI. Fig. 133. 436. *Datis altitudine Segmenti* DE *& dimidia baſi* EA; *invenire aream ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur diameter (§. 328).
2. Deſcribatur circulus (§. 131), & in eo applicetur baſis ſegmenti AB.
3. Ducantur radii AC & BC, & ope Inſtrumenti tranſportatorii inveſtigetur numerus graduum arcus ADB.
4. Dato jam radio AC, una cum arcu ADB ad peripheriam ratione, inveſtigetur area ſectoris ACB, &
5. Ex chorda AB atque altitudinis ſegmenti DE complemento ad radium EC, area trianguli ACB (§. 392).
6. Hoc denique ex illo auferatur: reſiduum erit Segmentum ADBEA.

Ex. gr. Sit AB = 600‴, DE = 80‴; erit DF = 1205‴ (§. 328), arcus AB = 60° (§. 152). Ergo area ſectoris ADBC = 18′84″ (§. 435). Jam EC = 522½‴, AE = 300‴. Quare △ ACB = 156750‴; conſequenter ſegmentum AEBDA = 31650‴.

COROLLARIUM.

437. Quodſi Segmentum majus BFA quæratur; triangulum BCA ſectori BFACB addendum.

SCHOLION.

438. *Ne pro invenienda area Sectoris atque Segmenti, peripheriam inveſtigare opus ſit; arcuum gradus atque ſcrupula, tam prima quam ſecunda, iſtiuſmodi particulis expreſſa in Tabula ſubſequente exhibere placet, qualium diameter eſt* 100000. *Conſtructio Tabulæ intelligitur ex reſolutione Problematis* 61 (§. 435). *Uſus talis eſt. Sit ex. gr. ut in caſu Problematis citati, diameter* 1200‴, *arcus* 60°. *Cum* 60 *gradibus in Tabula reſpondeant* 52359 *particulæ diametri; inferatur:*

100000

$$100000 - 52359 - 1200\tfrac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r} 1200 \\ \hline 10471800 \\ 52359 \\ \hline 628|30800 \end{array}$$

Est ergo arcus 628''', *ut supra* (§. cit.) *eundem reperimus.*

Grad.	Part. per.	Min.	Part. per.
1	872	1	14
2	1745	2	29
3	2617	3	43
4	3490	4	58
5	4363	5	72
6	5235	6	87
7	6108	7	101
8	6981	8	116
9	7853	9	130
10	8726	10	145
20	17453	20	290
30	26179	30	436
40	34906	40	581
50	43633	50	727
60	52359	Sec.	Part. per.
70	61086	2	0
80	69813	3	$\frac{1}{2}$
90	78539	4	$\frac{1}{2}$
100	87266	5	1
110	95993	6	1
120	104719	7	$1\frac{1}{2}$
130	113446	8	$1\frac{1}{2}$
140	122173	9	2
150	130899	10	2
160	139626	20	4
170	148353	30	7
180	157079	40	9
360	314159	50	12

PROBLEMA LXIV.

439. *Parallelogrammum* ABEC *ex dato puncto* D *in duas partes æquales dividere.* Tab. VIII. Fig. 136.

RESOLUTIO.

Fiat EF=AD, & ducatur recta DF: erit ADFC=DBEF.

DEMONSTRATIO.

Ducatur diagonalis AE: erit $o = x$ (§. 156) &, ob parallelas AB & EC (§. 102), $y = u$ (§. 233). Sed AD=FE, *per const.* Ergo △ ADG = △ FGE (§. 252). Est vero △ ACE = △ AEB (§. 337). Quare ACFG = DBEG (§. 91 *Arithm.*); consequenter ADFC =DBEF (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA LXV.

440. *Parallelogrammum atque Triangulum in partes quotcunque æquales dividere.* Tab. VIII. Fig. 137. 138.

RESOLUTIO.

1. Dividatur basis CD in tot partes æquales, in quot figura dividenda (§. 274).
2. In Parallelogrammo ducantur rectæ 11, 22; in Triangulo A1, A2.

DEMONSTRATIO.

Quoniam parallelogramma A11C, 1221, 2BD2 inter easdem parallelas AB & CD existunt (§. 102); eandem altitudinem habent (§. 226, 227). Sunt itaque in basium ratione (§. 389); consequenter, ob C1=12 =2D, *per constr.* æquales. *Quod erat unum.*

Cum ex uno puncto A ad eandem rectam CD perpendicularis nonnisi unica duci possit (§. 213); triangula AC1, 1A2, 2AD eandem altitudinem (§.

(§. 228), adeoque basium rationem habent (§. 389). Sed bases æquales sunt, *per constr.* Ergo & Triangula. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA LXVI.

Tab. VIII. Fig. 441. *Figuram rectilineam quamcunque* ABCDE *in partes æquales dividere.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur area figuræ (§. 400), & dividatur in tot partes æquales, in quot figura dividi debet, ex. gr. in 3.
2. Area partis, in nostro casu tertiæ, ulterius dividatur bifariam.
3. Area trianguli AED subtrahatur a parte tertia, & residuum dividatur per $\frac{1}{2}$ AD; erit quotus altitudo trianguli AID priori AED addendum, ut AEDI sit pars tertia figuræ (§. 394).
4. Quare intervallo hujus altitudinis ducatur parallela ipsi AD (§. 258), quæ secabit latus AB in I: quo puncto dato, rectam DI ducere licet, tertiam partem figuræ AIDE abscindentem.
5. Pars tertia dimidia, sive sexta totius figuræ, dividatur per $\frac{1}{2}$DI, quotus erit altitudo trianguli IKD sextam figuræ partem constituentis (§. 394).
6. Intervallo igitur hujus altitudinis agatur ipsi ID parallela, ut habeatur punctum K (§. 258).
7. Dividatur quoque dimidia pars tertia figuræ per $\frac{1}{2}$ KD, ut habeatur altitudo trianguli KLD sextæ itidem parti figuræ æqualis (§. 394).
8. Quare hujus intervallo denuo agatur ipsi KD parallela (§. 258), ut punctum L determinetur ducaturque recta KL, quæ partem figuræ tertiam KIDL resecabit.
9. Si figura in plures quam tres partes resolvenda; eodem modo ulterius procedendum.

Ex. gr. Sit AD = 516″, AC = 580″, EI = 154″, DG = 315″, BF = 375″; erit AED = 39732″ ADC = 91350″ & ABC = 108750″ (§. 392); adeoque area figuræ 239832 (§. 400); ejus pars tertia 79944, pars sexta 39972.

```
     Pars III = 79944
         AED = 39732
         AID = 40212  (155 +, seu 156 fere = I
½ AD = 258) 258
             1441
             1290
              1512
              1290
               222
Pars VI = 39972  (151″ = KN.
½ DI = 264) 264
             1357
             1320
              372
              264
              108
Pars VI = 39972  (139″ = LO
½ DK = 287) 287
             1127
              861
             2662
             2583
               79
```

SCHOLION.

442. *Si* AED *majus tertia ex. gr. parte figuræ; ipsam ab illo subtrahi necesse est & residuum erit triangulum a triangulo* AED *auferendum, ut tertiæ parti figuræ æqualis evadat. Sæpe etiam consultum est, ut prima pars* AEDI *per duo triangula uti ceteræ determinetur.*

SCHOLION II.

443. *Ubi in charta divisio absoluta; in campo puncta* I, K, L *per quantitatem rectarum* AI, IK *&* DL *facile determinantur* (§. 126).

Finis Partis Prioris.

ELE

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS POSTERIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ SOLIDÆ PROPONIT.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Geometriæ solidæ.

DEFINITIO I.

444. Solidum, sive *Corpus*, est magnitudo tribus dimensionibus prædita, seu extensum in longitudinem, latitudinem, atque profunditatem.

DEFINITIO II.

445. *Angulus solidus* B est plurium quam duarum linearum BA, BC, BF in eodem puncto B concurrentium, nec in eodem plano constitutarum ad omnes inclinatio. Dicuntur autem *Anguli solidi æquales*, qui inter se invicem positi congruunt.

COROLLARIUM I.

446. Ergo angulus solidus B pluribus quam duobus planis in eodem plano non constitutis ABF, FBC, CBA continetur.

COROLLARIUM II.

447. Quoniam adeo tres minimum lineæ ad angulum solidum constituendum requiruntur (§. 445); tres minimum anguli plani ad solidum constituendum necessarii.

SCHOLION I.

448. *Unde etiam* Angulus solidus *definitur, quod sit is, qui pluribus quam d*[illegible] *planis angulis in eodem plano non consistentibus, ad idem tamen punctum constitutis, continetur.*

COROLLARIUM III.

449. Ut anguli solidi sint æquales, angulis planis & multitudine & magnitudine æqualibus ac eodem ordine dispositis contineri debent, ut scilicet plana[illegible] planos æquales continentia æqualiter ad se invicem inclinentur.

SCHOLION II.

450. *Bene nimirum* TAQUETUS *observat, de angulis solidis, qui ex planorum inclinatione oriuntur, eodem modo ratiocinandum esse, quo de planis, qui oriuntur ex linearum ad se invicem inclinatione.*

COROLLARIUM IV.

451. Cum anguli solidi distingui nequeant nisi per planos, quibus continentur (§. 445), ubi plani & numero, & magnitudine æquales, & planorum eos [illegible]tinentium ead[illegible] inclina[illegible], ea coincidunt per quæ a se invicem distingui debent. Sunt ergo similes (§. 24 *Arithm.*); consequenter anguli solidi similes [illegible]t æquales & contra (§. 449).

COROLLARIUM V.

452. Si anguli plani in eodem puncto concurrentes conficiant summam 360 graduum; planum circuli sternunt (§. 41, 57), adeoque solidum angulum non constituunt (§. 446). Quare summa eorum, qui ultra solidum non assurgunt, quatuor rectis seu 360° (§. 144) minor esse debet.

DEFINITIO III.

453. *Corpus regulare* est solidum planis regularibus & inter se æqualibus terminatum, totidem numero ad angulos constituendos concurrentibus. Reliqua corpora dicuntur *irregularia*.

SCHOLION.

454. *Corpora regularia dicuntur etiam* Platonica, *propterea quod* PLATO *in* Timæo *corpora, quæ statuit, simplicia, cœlum puta, ignem, aerem, aquam, atque terram cum iisdem comparat.*

COROLLARIUM.

455. Cum quilibet angulus corporis regularis angulis planis & numero, & magnitudine æqualibus contineatur (§. 453), omnes anguli corporis cujuslibet regularis æquales sunt (§. 449).

DEFINITIO IV.

Tab. VIII. Fig. 140. 456. Si figura rectilinea ACB juxta ductum lineæ rectæ AE motu sibi semper parallelo deorsum feratur, *Prisma* ABCDFEA describit: & quidem *rectum*, si linea directrix AE fuerit ad planum describens perpendicularis, seu in nullam partem inclinatur; *obliquum* vero, si ea ad idem fuerit obliqua. In specie *Prisma* dicitur *triangulare* sive *trig*[illegible] si p[illegible] describens fuerit triangulum; *quadrangulare*, si fuerit figura quadrilatera, & ita porro.

COROLLARIUM I.

457. Quodlibet adeo prisma habet duas bases oppositas ABC & EDF æquales, & circumcirca terminatur tot parallelogrammis, quot basis latera habet. Est enim AC ipsi ED parallela atque æqualis *per hypoth.* Ergo & AE parallela ipsi CD (§. 257); consequenter ACDE est parallelogrammum (§. 102). Et idem eodem modo de ceteris planis lateralibus ostenditur.

COROLLARIUM II.

458. Plana sectionum prismatis basi ACB parallele factarum sunt inter se æqualia. Æquantur enim plano describenti ACB (§. 456 *Geom. &* §. 81 *Arithm.*); ergo & inter se æqualia sunt (§. 87 *Arithm.*).

DEFINITIO V.

459. Si planum describens ABCD fuerit quadratum, & linea dirigens AE lateri ejus AB æqualis, atque angulus BAE & DAE rectus; *Cubus* describitur.

COROLLARIUM I.

460. Cubus terminatur sex quadratis inter se æqualibus: est enim ABCD = EFGH (§. 459 *Geom. &* §. 81 *Arithm.*). Cumque ex eadem ratione AB & EF sint inter se æquales atque parallelæ, & BA ad AE perpendicularis; erit etiam AE ad EF perpendicularis (§. 230); consequenter ABFE quadratum (§. 338) ipsi ABCD æquale (§. 374). Eodem modo ostenditur, reliqua plana terminantia esse quadrata ipsi ABCD æqualia.

COROLLARIUM II.

461. Plana sectionum basi parallele factarum sunt quadrata ipsi æqualia (§. 459 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); consequenter etiam æqualia inter se (§. 87 *Arithm.*).

DEFINITIO VI.

462. Si planum describens IKLM fuerit parallelogrammum; *Parallelepipedum* describitur.

COROLLARIUM I.

463. Plana sectionum basi parallele factarum sunt parallelogramma ipsi æqualia (§. 462

(§. 462 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); adeoque & æqualia inter se (§. 87 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

464. Cum LM & NO sint æquales & inter se parallelæ (§. 462 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); etiam MO & LN æquales sunt & parallelæ (§. 257); consequenter LMNO parallelogrammum (§. 102). Eodem modo ostenditur, plana terminantia reliqua esse parallelogramma. Terminatur adeo parallelepipedum sex parallelogrammis, quorum bina opposita inter se æqualia sunt.

DEFINITIO VII.

465. Si circulus AB juxta ductum rectæ AD, motu sibi semper parallelo, deorsum feratur, *Cylindrus* describitur; *rectus* quidem, si recta CF quam punctum C in descensu describit, centra basium C & F jungens, quæ *Axis* dicitur, fuerit ad diametrum DE perpendicularis; *scalenus* vero, si ad angulos obliquos eidem insistat. Quodsi parallelogrammum rectangulum CBEF circa latus unum CF gyretur; *Cylindrum* describit *rectum*.

COROLLARIUM.

466. Sunt ergo non modo bases cylindri AB & DE æquales; verum etiam sectiones basibus parallelæ sunt circuli iisdem & inter se æquales.

DEFINITIO VIII.

Tab. IX. Fig. 144. 467. Si recta quædam KM in peripheria circuli NM ita incedat, ut constanter inhæreat puncto fixo K; describetur *Conus* NKM. Recta ex puncto K, qui *vertex* coni dicitur, ad centrum basis L ducta dicitur *Axis Coni*: qui si ad circulum basim coni NM fuerit perpendicularis, *Conus rectus* est; si vero ad angulos obliquos eidem insistat, *scalenus*. Linea describens KM, seu recta ex vertice in peripheriam basis ducta, vocatur *Latus Coni*. Possumus quoque *Coni* genesin ita concipere, ut circellus infinite parvus, dum motu sibi semper parallelo ita deorsum fertur, ut centrum continuo sit in axe KL, radius PQ axi KP proportionaliter continuo augeatur. Quodsi triangulum rectangulum KLM circa rectam KL gyretur; *Conus* describitur *rectus*.

COROLLARIUM.

468. Quodsi PQ ipsi LM parallela, per ultimam coni genesin erit KL : KP = LM : PQ. Quare cum PQ & LM sint radii circulorum sibi invicem parallelorum; planum sectionis basi coni parallele factæ circulus est eadem minor.

SCHOLION.

469. *Ex genesi ultima coni apparet, in definitionibus geometricis geneticis tanquam entium imaginariorum admitti etiam posse miraculosa. Et quoniam in cono obliquo latus coni non ejusdem longitudinis in quovis peripheriæ puncto; patet lineam describentem* KM, *quæ altero sui extremo peripheriæ* NM *constanter adhæret, per punctum fixum* K *aliqua sui parte nunc deorsum, nunc sursum moveri debere.*

DEFINITIO IX.

Tab. IX. Fig. 145. 470. Si semicirculus K juxta diametrum AB gyretur; *Sphæra* describitur: diciturque diameter circuli AB etiam *Diameter* atque *Axis Sphæræ*, centrum C etiam *Centrum Sphæræ*.

COROLLARIUM.

471. Omnes ergo rectæ ex sphæræ superficie in centrum ductæ sunt inter se æquales (§. 40).

DEFINITIO X.

Tab. IX. Fig. 146. 472. *Pyramis* est solidum terminatum circumcirca tot triangulis ABC, CDB & BDA in uno puncto D coëun-

Tab. IX. Fig. 146. coëuntibus, quot basis ABC látera habet. Dicitur autem *triangularis*, *quadrangularis*, *quinquangularis* &c. si basis triangularis, quadrangularis, quinquangularis &c.

COROLLARIUM I.

Tab. XI. 473. Si *ac*, *cb*, *ba*, lateribus AC, CB, BA basis ACB parallelæ ducantur; erit DC: D*c* = CA: *ca* = CB : *cb* (§. 268); adeoque CA : *ca* = CB : *cb* (§. 167 *Arithm.*); consequenter cum eodem modo ostendi possit esse CA : *ca* = AB : *ab*, erit triangulum *acb* simile triangulo ACB (§. 207). Quare si pyramis triangularis ACDB secatur plano basi parallelo; planum istud huic simile erit.

COROLLARIUM II.

474. Quoniam pyramis multangularis in tot triangulares resolvi potest, quot sunt latera basis demtis duobus, nempe quadrangularis in duas, quinquangularis in tres, &c. si pyramis multangularis plano basi parallelo secetur, constabit id ex triangulis, quæ singula singulis similia sunt, in quæ resolvitur basis (§. 473); consequenter cum vi demonstrationis primæ Problematis 47 [illegible] pateat, similes esse figuras rectilineas quascunque, quæ ex triangulis similibus eodem ordine inter se junctis componuntur, in quavis pyramide planum sectionis basi parallelum est figura basi similis.

DEFINITIO XI.

475. *Tetraëdrum* est solidum quatuor; *Octaëdrum* est solidum octo; *Icosaëdrum* est solidum viginti triangulis æquilateris & æqualibus comprehensum; *Dodecaëdrum* vero solidum duodecim pentagonis regularibus & æqualibus contentum.

DEFINITIO XII.

476. *Inclinatio plani* KEGL *ad planum* ACDB est angulus HFI, quem efficiunt rectæ HF & FI in puncto F ad lineam sectionis EG perpendiculares.

DEFINITIO XIII.

477. *Mensura solidi* est cubus, cujus latus perticæ unius, diciturque *Pertica cubica*. Hæc dividitur in *Pedes*, *Digitos*, &c. *cubicos*, hoc est, in cubos, quorum latus pedem, digitum &c. adæquat.

CAPUT II.

De Sectione & Situ Planorum.

THEOREMA I.

Tab. XI. Fig. 175. 478. *Recta lineæ pars quædam* AB *non est in subjecto plano* DE, *pars vero* BC *in sublimi.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim, si fieri possit, pars lineæ rectæ AB in plano DE, pars vero altera BC in sublimi. Cum linea recta terminata utrinque produci possit (§. 21); producatur AB in F: erit ergo AB pars rectæ AF. Sed eadem AB est pars rectæ ABC, *per hypoth.* Punctum igitur rectam describens in B mutat directionem, cum & versus F, & versus C progredi valeat, ubi ad B pervenit: quod cum sit absurdum

furdum (*§.* 19), rectæ lineæ quædam pars AB non poteſt eſſe in ſubjecto plano DE, pars vero quædam BC in ſublimi. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

479. Duæ igitur rectæ ADEB & CDEF ſegmentum commune DE habere nequeunt (*§.* 478); conſequenter duæ rectæ AB & CF ſe mutuo non interſecant niſi in uno puncto D.

COROLLARIUM II.

480. Cumque pars rectæ AD eſſet in ſubjecto plano, pars vero BD in ſublimi, ſi trianguli ABC pars ADE eſſet in ſubjecto plano, pars vero DBCE in ſublimi; triangulum ABC erit in eodem plano.

COROLLARIUM III.

481. Et quoniam rectarum BE & DC ſe mutuo ſecantium in A partes AB & AC ſunt crura trianguli ABC; erunt eædem in eodem plano (*§.* 480). Sed in eodem plano eſt EA, in quo eſt AB, & AD in eodem eſt, in quo eſt AC (*§.* 478). Ergo lineæ ſe mutuo ſecantes EB & DC in eodem ſunt plano.

THEOREMA II.

482. *Si duo plana* ABCD *&* EFHG *ſe mutuo ſecent; erit communis ſectio recta* IK.

DEMONSTRATIO.

Quoniam rectæ AB & EF ſe mutuo non interſecant niſi in puncto I, nec rectæ DC & GH niſi in puncto K (§. 479); ſi communis planorum ſectio non eſt recta unica, ſed aliquod planum, termini illius plani in punctis I & K coire debent. Ducantur ergo in plano EFHG recta ILK & in plano ABCD recta IMK, quod fieri poſſe patet, ſi ſectio communis planorum ABCD & EFHG non eſt recta unica IK, utut planum ſectionis lineis curvis in punctis I & K coëuntibus terminari ſumas (§. 191). Duæ igitur rectæ ILK & IMK, cum earum extrema in I & K coincidant, totæ in punctis omnibus coincidere debent (§. 170); conſequenter communis ſectio eſſe nequit niſi recta jungens puncta I & K. *Q. e. d.* Tab. XI. *Fig.* 179.

THEOREMA III.

483. *Si duæ rectæ* AB *&* CD *fuerint in eodem plano; recta* EF *eas ſecans in* G *&* H *erit in eodem plano.* Tab. XI. *Fig.* 180.

DEMONSTRATIO.

Secet planum aliud planum datum, in quo poſitæ ſunt rectæ AB & CD, in punctis G & H; recta tranſiens per G & H eſt communis ſectio planorum (§. 482). Sed eadem eſt pars lineæ EF (§. 170), quæ duas AB & CD ſecat, *per hypoth.* Recta igitur EF eſt in eodem plano, in quo ponuntur duæ AB & CD. *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

484. *Si recta* IE *fuerit perpendicularis ad duas rectas* KL *&* MN *in plano* ABCD *ductas* S, *& ſe mutuo in puncto* E *ſecantes; erit ea perpendicularis ad rectam quamvis aliam* OP, *quæ per punctum* E *ducitur in eodem plano.* Tab. XI. *Fig.*

DEMONSTRATIO.

Fiat ME=EN & EL=EK. Quoniam MEL = KEN (§. 156), erit ML = KN, & angulus EMO = ENP (§. 179). Quare cum etiam ſit MEO =PEN (§. 156), erit MO=PN & EO =EP (§. 251). Quia IE perpendicularis ad MN, *per hypoth.* erit angulus IEM = IEN (*§.* 79); conſequenter, cum ſit ME = EN, *per conſtr.* & IE =IE; etiam IM=IN. Eodem modo oſten-

Tab. XI. Fig. 181. ostenditur esse IL=IK. Quoniam itaque ML=KN, *per demonstr.*; angulus KNP=IMO, adeoque, ob IN=IM & PN=OM, *per demonstr.*, IP=IO (§. 179). Est vero etiam EP=EO, *per demonstr.*, & IE=IE. Quamobrem angulus IEP=IEO (§. 204); consequenter IE ad OP perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

Tab. XI.

COROLLARIUM.

485. Recta igitur IE, ad duas rectas KL & MN in plano ABCD perpendicularis, omnibus rectis per punctum E in eodem plano ductis ad angulos rectos insistit (§. 78).

SCHOLION.

486. *Hinc* linea recta *IE* ad planum *ABCD* perpendicularis *definitur*, *quod ad rectas omnes lineas in plano ductas, a quibus illa tangitur, angulos rectos facit.*

THEOREMA V.

Tab. XI. Fig. 182. 487. *Si recta* IE *fuerit ad planum* ABCD *perpendicularis*, *& ex* E, *tanquam centro*, *in eodem plano descriptus sit circulus; erunt rectæ* IG, IF, *&c. ab* [illegible] *sublimi ad peripheriam ductæ inter se æquales.*

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex centro E ad puncta peripheriæ F, G, &c. radii EF, EG, &c. erit EF=EG (§. 40); cumque anguli FEI & GEI sint recti (§. 485), etiam FEI=GEI (§. 145). Quare cum porro sit EI=EI; erit FI=GI (§. 179). *Q. e. d.*

THEOREMA VI.

Tab. XI. Fig. 183. 488. *Ex eodem puncto* E *ad planum* ABCD *nonnisi* [illegible] *dicularis* EI *duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur, si fieri potest, adhuc alia EQ, & per punctum E transiens in plano recta OP sit cum rectis EI & EQ in eodem plano: erit cum EQ, tum EI ad eandem rectam OP perpendicularis (§. 486): quod cum sit absurdum (§. 213), ex eodem puncto E nonnisi unica perpendicularis ad planum EI erigi potest. *Q. e. d.*

THEOREMA VII.

489. *Ab eodem puncto* I *in sublimi dato ad idem planum* ABCD *perpendicularis nonnisi unica* IE *demitti potest.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur enim, si fieri potest, adhuc alia IG. Jungantur puncta E & G in plano recta EG; erit IEG triangulum in eodem plano (§. 480). Duo igitur in triangulo ad basin anguli E & G recti sunt (§. 486): quod cum sit absurdum (§. 218), a puncto I ad planum ABCD nonnisi unica perpendicularis demitti potest. *Q. e. d.*

THEOREMA VIII.

490. *Linea perpendicularis* IE *est brevissima*, *quæ a puncto extra planum dato ad idem duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim recta adhuc alia IG & jungantur puncta E & G in plano recta EG; erit triangulum IEG in eodem plano (§. 480), & angulus ad E rectus (§. 486). Est igitur IE $<$ IG (§. 220). *Q. e. d.*

THEOREMA IX.

491. *Si recta* LE *tribus rectis* FE, HE, IE, *vel etiam pluribus in eodem puncto* E *concurrentibus perpendiculariter insistat; erunt tres illæ rectæ* FE, HE *&* IE *vel etiam plures in eodem plano* ABCD.

DE-

DEMONSTRATIO.

Sit enim, si fieri poteſt, recta EF in plano LEGK, quod ſecat planum ABCD, in quo ſunt duæ reliquæ EH & EI, in recta EG (§. 482). Quoniam LE perpendiculariter inſiſtit duabus rectis EH & EI in plano ABCD, *per hypoth.* eadem quoque ad angulos rectos inſiſtit rectæ EG (§. 485). Sed cum LE etiam perpendicularis ſit ad EF, *per hypoth.* erit etiam angulus LEF rectus (§ 78); conſequenter angulus LEF ipſi LEG æqualis (§. 145), pars nempe toti (§. 9 *Arithm.*): quod cum ſit abſurdum (§. 84 *Arithm.*), rectæ FE, HE, & IE, quibus LE perpendiculariter inſiſtit, in eodem ſunt plano ABCD. *Quod erat unum.*

Quod ſi lineæ in puncto E concurrentes fuerint quatuor, quibus LE perpendiculariter inſiſtit, cum ſit tertia cum prima & ſecunda in eodem plano, *per demonſtrata*, erit etiam quarta cum ſecunda & tertia in eodem plano, & ita porro. *Quod erat alterum.*

THEOREMA X.

492. *Lineæ rectæ* GE *&* HF *eidem plano* ABCD *perpendiculares ſunt inter ſe parallelæ; & ſi una parallelarum* GE *&* HF *fuerit ad planum perpendicularis, etiam ad idem perpendicularis erit altera.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta EF & EL=EF. Cum GE perpendicularis ſit ad planum ABDC, *per hypoth.* inſiſtet ea rectis EF & EL in plano iſto ductis ad angulos rectos (§. 486). Moveatur GE juxta ductum rectæ EL, donec in L perveniat, ita ut ad planum ſemper ſit recta, deſcribet ea planum GELI, eritque LI, tum ad planum, tum ad EL perpendicularis; conſequenter ipſi GE parallela (§. 256). Moveatur planum GELI circa rectam quieſcentem GE, donec EL ipſi EF congruat (§. 168); cadet planum GELI in planum, in quo ſunt rectæ EG & EF: quoniam itaque tam HF, *per hypoth.*, quam LI ad planum ABCD in puncto F perpendicularis, *per demonſtr.*; ad idem vero punctum F nonniſi unica recta plano perpendicularis eſſe poteſt (§. 488); etiam recta LI cadet in FH; conſequenter FH erit parallela ipſi GE. *Quod erat unum.*

Sint jam GE & HF inter ſe parallelæ & GE ad planum perpendicularis. Quod ſi reliqua ponantur ut ante; dum planum GELI incidit in planum GEFH, rectæ EG parallela LI cadet in rectam eidem parallelam FH (§. 260); conſequenter cum LI ſit ad planum perpendicularis, etiam FH ad idem perpendicularis erit. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

493. Rectæ igitur omnes ad rectam EF in plano GEFH perpendiculares etiam ad planum ABDC perpendiculares ſunt.

SCHOLION.

494. *Hinc* EUCLIDES Planum *definit ad* planum rectum *ſive* perpendiculare, *cum omnes rectæ lineæ, quæ communi planorum ABDC & GEFH ſectioni EF perpendiculares ducuntur in planorum uno GEFH, rectæ ſunt alteri plano ABDC.*

THEOREMA XI.

495. *Rectæ* AB *&* EF, *quæ ſunt eidem rectæ* CD *parallelæ, non tamen in eodem cum ipſa plano, ſunt inter ſe parallelæ.* T. XI. F. 185.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. XI. Fig. 185. Ducatur in plano parallelarum AB & CD recta GH ad CD perpendicularis, & ex H perpendicularis HI ad CD in plano parallelarum CD & EF. Jungantur puncta G & I recta GI; erit triangulum GHI in eodem plano (§. 480). Quoniam CH ad planum GHI perpendicularis (§. 484); erunt etiam AG & EI ipsi CH parallelæ, *per hypoth.* ad idem planum perpendiculares (§. 492); consequenter inter se parallelæ (§. *cit.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

Tab. X. Fig. 167. 496. *Si duæ rectæ* AC *&* CB *fuerint parallelæ duabus rectis* DF *&* FE, *etiamsi non sint in eodem plano, anguli, quos comprehendunt, æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

Fiat CB=FE & CA=FD: quoniam CB parallela ipsi FE & CA parallela ipsi FD, *per hypothesin*; erit BE ipsi CF & AD eidem CF parallela & æqualis (§. 257); consequenter BE parallela (§. 495) & æqualis (§. 87 *Arithm.*) ipsi AD; ac ideo AB parallela & æqualis ipsi DE (§. 257). Est igitur angulus DFE = ACB (§. 204). *Q. e. d.*

THEOREMA XIII.

Tab. XI. Fig. 186. 497. *Si recta* IK *duobus planis* ABCD *&* EFGH *fuerit perpendicularis, erunt plana inter se parallela.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta IL in plano ABCD, & ponatur ML ad istud perpendicularis, quæ plano EFGH in M occurrit, cumque IK ad planum EG recta sit, *per hypoth.* ad IK parallela est (§. 492). Quamobrem si puncta M & K jungantur recta MK, erit angulus K perinde ac I rectus (§. 486), consequenter LM=IK (§. 238). Cum eodem modo demonstretur rectam ex quovis alio puncto plani ABCD ductam ipsi IK parallelam eidem æqualem esse; plana ABCD & EFGH ubivis a se invicem eodem intervallo distare (§. 490, 15) patet. Sunt igitur inter se parallela.

SCHOLION.

498. *Nimirum* Planum *ABCD* alteri *EFGH dicitur* parallelum, *perinde ac recta alteri rectæ parallela est* (§. 81), *si ubivis eandem ab eadem distantiam servat.*

THEOREMA XIV.

499. *Si planum* ADCB *secet duo plana parallela* EFGH *&* IKLM; *erunt sectiones* AD *&* BC *inter se parallelæ.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim sectiones AD & BC non esse inter se parallelas; ergo continuatæ alicubi concurrent (§. 81, 83). Cum igitur, si plana cum ipsis continuentur, totæ in iisdem sint (§. 478); ipsa quoque plana EFGH & IKLM concurrent. Parallela igitur non sunt (§. 498): quod cum sit absurdum, sectiones AD & BC planorum parallelorum EFGH & IKLM parallelæ sunt. *Q. e. d.*

THEOREMA XV.

500. *Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes* AC *&* AB *duabus aliis se mutuo tangentibus* EG *&* EF *fuerint parallelæ, etiam plana* ACDB *&* EGLF *per ipsas ducta erunt parallela.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Concipiatur AH ad planum EGLF recta, & ex H ducantur HK ac HI rectis EF atque EG parallelæ (§. 258); erunt eædem HK & HI etiam parallelæ rectis AB & AC (§. 495) & AH ad HK & HI perpendicularis (§. 486). Perpendicularis igitur AH etiam perpendicularis est ad AB & AC (§. 230) adeoque ad planum ABCD (§. 484, 486); consequenter planum ABCD parallelum plano EFLG (§. 497). *Q.e.d.*

THEOREMA XVI.

501. *Duæ lineæ rectæ* NR *&* OS *a planis parallelis* ABDC, EFHG, IKLM *proportionaliter secantur*; *ut nempe sit* PR : PN = TS : TO.

DEMONSTRATIO.

Jungantur puncta sectionum N & O, R & S, rectis NO & RS, ducaturque recta OR; erit triangulum NOR & similiter triangulum OSR in eodem plano (§. 480), & PQ parallela ipsi NO, QT vero parallela ipsi RS (§. 499.). Est igitur RQ : QO = RP : PN, & QR : QO = TS : TO (§. 268); consequenter RP : PN = TS : TO (§. 167 *Arithm.*). *Q.e.d.*

PROBLEMA I.

502. *Ad datum planum* ABDC *in dato puncto* E *erigere perpendicularem* EI.

RESOLUTIO.

Ducatur ex puncto E in dato plano ABDC intervallo quocunque EG circulus, & ex centro E erigatur recta EI ea lege, ut punctum I quodcunque a peripheriæ punctis quibuscunque F & G æqualiter distet, quod mechanice præstatur ope filorum æqualium ex dictis punctis extensorum: erit ea ad planum ABCD in dato puncto E perpendicularis (§. 487). Tab. XI. Fig. 182.

COROLLARIUM I.

503. Cum triangulum IEG & quodcunque eodem modo determinatum, veluti EIF, sit rectangulum; evidens est, si crus unum normæ ita ad EG vel EF applicetur ut vertex anguli recti, quem crura comprehendunt, sit in centro E, fore crus alterum ad planum ABCD in dato puncto E perpendiculare: ut adeo pateat normæ usus in erigendis perpendicularibus ad planum datum in puncto dato.

SCHOLION.

504. *Necesse est ut normæ crura non desinant in aciem tenuem, sed aliquam habeant latitudinem, ut norma ad rectam EG applicata sit ad planum recta, nec oculorum judicium fallat.*

COROLLARIUM II.

505. Quodsi punctum I extra planum detur, norma super plano erecta huc illucve promovenda, donec crus erectum idem attingat, si e puncto I perpendicularis IE demittenda. Quodsi crus normæ brevius sit, quam ut punctum I attingere possit, cum filo ex puncto I extenso idem coincidere debet. Tab. XI. Fig. 190.

THEOREMA XVII.

506. *Si recta* IK *sit ad planum* ABCD *perpendicularis; planum quodcunque, veluti* EHGF, *quod per eam ducitur, ad idem planum* ABCD *perpendiculare est.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur LM ad sectionem communem planorum HG perpendicularis. Cum etiam sit IK ad HG perpendicularis, (*per hypoth.* & §. 468) erit LM ipsi IK parallela (§. 256). Enimvero IK perpendicularis est ad planum ABCD, *per hypoth.* Ergo etiam LM (§. 492). Est-

est igitur planum EHGF ad planum ABCD rectum (§. 494). *Q. e. d.*

SCHOLION.

507. *Nemo non videt demonstrationem subsistere eandem, etiamsi in locum plani EFHG planum quodcunque aliud surrogetur, quod per IK ducitur.*

THEOREMA XVIII.

Tab. XI. Fig. 191. 508. *Sectio* NO *duorum planorum* EFGH *&* IKLM *ad idem tertium* ADCB *perpendicularium est ad idem planum perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam planum EFGH ad planum ADCB perpendiculare, *per hypoth.* ex puncto O duci poterit in plano EFGH recta ad planum ADCB perpendicularis (§. 502). Eodem modo patet, ex eodem puncto O duci posse rectam intra planum IKLM ad planum ADCB perpendicularem. Quare cum ad idem punctum O eidem plano ADCB nonnisi unica perpendicularis insistere possit (§. 488), communis autem planorum IKLM & EFGH sectio NO nonnisi unica recta sit (§. 482); sectio illa communis NO erit illa perpendicularis, quæ in utroque plano EFGH & IKLM ad planum ADCB duci potest. *Q. e. d.*

THEOREMA XIX.

509. *Plani* KLGE *ad planum* ABDC *in omnibus punctis* F, f *&c. inclinatio eadem.*

DEMONSTRATIO.

Erigantur ex punctis F & *f* perpendiculares FH & *fh* in plano ABDC & aliæ FI & *fi* in plano EKLG (§. 212); fiatque HF=*hf* & FI=*fi*, erunt HF & *hf*, itemque FI & *fi* parallelæ (§. 256); consequenter etiam H*h* & I*i* parallelæ ipsi F*f* & H*h* = F*f*, itemque I*i* = F*f* (§. 257), adeoque etiam H*h* parallela ipsi I*i* (§. 495) & H*h*=I*i* (§. 87 *Arithm.*). Quoniam itaque HI & *hi* inter se parallelæ atque æquales sunt (§. 257): erunt anguli F & *f* æquales (§. 204), atque adeo inclinatio plani ad idem planum in singulis punctis eadem (§. 476). *Q. e. d.*

CAPUT III.

De Solidorum Constructione.

PROBLEMA II.

Tab. VIII. Fig. 141, 142. 510. *Cubum* ADCBFEHG, *vel Parallelepipedum* IKMLNOPQ *in plano describere.*

RESOLUTIO.

1. Construatur pro cubo rhombus DABC (§. 340); pro parallelepipedo rhomboides IKLM (§. 341).

2. Construantur porro pro cubo quadratum AEFB & rhombus BCGF (§. 338, 340); pro parallelepipedo rectangulum LMON, cujus latus LN altitudini æquale & rhomboides MKOP (§. 339, 341).

Cum rhombi pro quadratis, & rhomboides pro rectangulis construantur; ut

ut plana lateralia FBCG & MKPO videri possint; erit solidum AG cubus (§. 459); solidum vero LP parallelepipedum (§. 462).

PROBLEMA III.

511. *Prisma* ACBFDE *in plano describere.*

RESOLUTIO.

1. Describatur basis, ex. gr. triangulum ACB, si prisma fuerit triangulare.
2. In A excitetur perpendicularis ad AB altitudini æqualis AE (§. 249).
3. Construantur parallelogramma ACED, BCDF (§. 341).

Erit ACBFDE prisma triangulare (§. 456, 457).

PROBLEMA IV.

512. *Pyramidem* DACB *in plano describere.*

RESOLUTIO.

1. Describatur basis, ex. gr. triangulum ACB, si triangularis fuerit; ita tamen ut latus AB, tanquam a facie aversum, non exprimatur.
2. Super AC & CB construantur triangula ADC & CDB in puncto D coëuntia: seu, assumto vel determinato puncto D, ducantur rectæ AD, CD, BD.

Erit ADBC pyramis triangularis (§. 472).

PROBLEMA V.

513. *Rete describere, ex quo Cubus construi possit.* Tab. IX. Fig. 152.

RESOLUTIO.

1. In rectam AB latus cubi quater transferatur.
2. In A erigatur perpendicularis AC lateri cubi AI æqualis (§. 249), & parallelogrammum ACBD compleatur (§. 339).
3. Intervallo lateris cubi determinentur quoque in CD puncta K, M, & O.
4. Denique ducantur rectæ IK, LM, & NO, producanturque IK & LM utrinque in E & F atque in G & H, donec fiat EI = IK = KF & GL = LM = MH, & agantur rectæ EG, FH.

DEMONSTRATIO.

CK & AI ad AC perpendiculares sunt, *per constr.* & AI=CK=AC, *per constr.* Ergo ACKI quadratum (§. 338). Non absimili modo ostenditur esse IKML, MLNO, &c. quadrata ipsi AK æqualia. Est itaque ADFG rete, ex quo cubus construi potest (§. 460). *Q. e. d.*

PROBLEMA VI.

514. *Rete describere, ex quo Parallelepipedum construi potest.* Tab. IX. Fig. 153.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. In rectam BD transferatur ex B in H latitudo, ex H in I longitudo, ex I in K iterum latitudo, & ex K in D longitudo parallelepipedi.
2. Super his lineis tanquam basibus construantur parallelogramma AH, EI, FK & GD, quorum communis altitudo AB altitudini parallelepipedi æqualis.
3. Super EF vero & HI construantur parallelogramma EM & HO, quorum altitudo EL & HN latitudini parallelepipedi æqualis (§. 33?).

Quoniam AEBH = GFIK, EHIF = GCKD, ELMF=HNOI (§. 383); ex hoc reti parallelepipedum construere licet (§. 463, 464). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA VII.

515. *Rete pro Prismate describere.*

RESOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 154. 1. Construatur basis prismatis, ex. gr. pro triangulari triangulum KBD.

2. Continuetur latus BD in A & E, donec fiat AB=BK & DE=DK.

3. Super AB, BD & DE construantur parallelogramma AG, BH, DF, quorum altitudo AC altitudini prismatis æqualis (§. 339).

4. Denique fiat super GH triangulum GIH, ipsi BKD æquale (§. 205).

Ex hoc reti prisma triangulare, nec absimili modo multangulare quodcunque construetur (§. 457).

THEOREMA XX.

Tab. IX. Fig. 155. 516. *Superficies Cylindri recti, seclusis basibus, æqualis est rectangulo sub peripheria & altitudine Cylindri.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur arcus EF adeo parvus ut pro recta haberi possit, ducanturque rectæ EG & FH inter se parallelæ & ad EF perpendiculares. Quoniam etiam EF ipsi GH parallelus (§. 465); erit EGHF rectangulum. Superficies itaque cylindri in innumera rectangula, ipsi EFHG æqualia, resolvitur, quorum communis altitudo est EG seu altitudo cylindri (§. 229), bases vero junctim sumtæ peripheriæ æquantur. Ergo eadem æqualis est rectangulo sub peripheria & altitudine cylindri (§. 389).

SCHOLION.

517. *Nimirum arculus in quolibet casu tam exiguus assumitur, ut, si ejus differentia multiplicari supponatur per numerum partium, in quas peripheria concipitur divisa, prodeat particula in dato casu inassignabilis, adeoque contemptibilis parvitatis: quod fieri posse patet, quod polygonum circulo inscriptum continuo appropinquat ad peripheriam. Et idem tenendum est in aliis casibus, ubi de infinite parvo sermo fuerit. Sed ex instituto ea de re dicimus in Philosophia prima.*

PROBLEMA VIII.

518. *Rete pro Cylindro describere.*

RESOLUTIO.

1. Eadem diametro describantur circuli AB & CD.

2. Inveniatur horum peripheria (§. 429).

3. Super BC altitudini cylindri æquali construatur rectangulum (§. 339), ita ut CD sit peripheriæ inventæ æqualis.

Ex hoc reti construi potest cylindrus (§. 516).

THEOREMA XXI.

519. *Superficies Coni recti seclusa basi, æqualis est triangulo, cujus basis peripheria, altitudo latus Coni.*

DEMONSTRATIO.

Si arcus LM infinite parvus adeoque a recta non differens; triangulum KLM pro rectilineo recte habetur: cumque angulus K sit infinite parvus; anguli L & M a rectis non differunt (§. 240), estque adeo KM ad LM perpendicularis (§. 78), consequenter trianguli KML altitudo (§. 228). Sed coni recti superficies in innumera istiusmodi triangula inter se æqualia resolvitur (§. 467, 251). Ergo integra coni recti superficies æqualis est triangulo, cujus altitudo lateri, basis peripheriæ coni æqualis (§. 389). *Q. e. d.*

COROL-

COROLLARIUM.

520. Superficies coni recti æquatur ſectori circuli latere coni tanquam radio deſcripti, cujus arcus peripheriæ coni æqualis (§. 415), adeoque ad ſuam peripheriam eam rationem habet, quam diameter baſis ad latus coni (§. 412 *Geom.* & §. 167 *Arithm.*).

PROBLEMA IX.

521. *Rete pro Pyramide deſcribere.*

RESOLUTIO.

Sit ex. gr. conſtruenda pyramis triangularis.

1. Radio AB deſcribatur arcus BE, & ei applicentur tres chordæ BC, CD & DE inter ſe æquales.
2. Super DC conſtruatur triangulum æquilaterum DFC, ducanturque rectæ AD & AC.

Ex hoc reti pyramis conſtrui poteſt (§. 472).

SCHOLION.

522. *Si latera baſis pyramidis DC, CF & DF inæqualia fuerint; evidens eſt fieri debere ED = DF & CB = CF. Nec adeo latet, quid factu opus ſit, ſi baſis fuerit polygonum, ſive regulare, ſive irregulare.*

PROBLEMA X.

523. *Rete pro Cono recto deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Diametro baſis AB deſcribatur circulus, & diameter producatur in C, donec AC lateri coni æqualis fiat.
2. Quæratur ad 2 AC & AB, in numeris determinatas, atque 360°, numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*).
3. Radio CA, ex centro C deſcribatur arcus DE, & ope Inſtrumenti transportatorii fiat angulus DCE, conſequenter arcus DE (§. 54) numero graduum invento æqualis.

Erit ſector CDE cum circulo AB rete pro cono recto (§. 520).

COROLLARIUM.

524. Quodſi ex A in F transferatur latus coni truncati & radio CF arcus GH deſcribatur, tandemque ad 360°, numerum graduum arcus GH, atque FC, numerus quartus proportionalis quæratur, & inde diameter circuli IF determinetur; habebitur rete pro cono truncato. Eſt enim CDBAE rete pro cono integro, CGFIH pro cono abſciſſo (§. 523): ergo DBEHIG pro truncato.

PROBLEMA XI.

525. *Rete pro Tetraëdro deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur triangulum æquilaterum DEF (§. 198).
2. Super ſingulis ejus lateribus conſtruantur adhuc alia itidem æquilatera DAE, EBF & FCD (§. *cit.*)

Ex hoc reti tetraëdrum conſtrui poteſt (§. 475).

COROLLARIUM.

526. Quodſi BC continuetur in H, donec fiat CH = FC, & ut in reſolutione Problematis conſtruantur triangula æquilatera CHI, CGH, HLI, DCI (§. 198); ex reti Octaëdrum conſtrui poteſt (§. 475).

PROBLEMA XII.

527. *Rete pro Icoſaëdro deſcribere.*

RESOLUTIO.

1. Conſtruatur triangulum æquilaterum ABC (§. 198).
2. In baſi AB continuata fiat AB = BF = FG = GH = HD.
3. Per C agatur ipſi AB parallela CE (§. 258), & fiat AB = CI = IK = KL = LM = ME.

4. Ducan-

Tab. X. Fig. 162.
4. Ducantur rectæ CS per C & B, NT per I & F, OV per K & G, &c.
5. Similiter ducantur aliæ rectæ YO per B & I, SP per F & K, TQ per G & L, &c.

Dico ex hoc reti construi posse icosaëdrum.

DEMONSTRATIO.

Demonstrandum est, viginti triangula ACB, ABY, CBI, CIN, BSF, BIF, IOK &c. æquilatera & inter se æqualia esse (§. 475): id quod sequenti ratione patescit. Quoniam CI parallela & æqualis ipsi AB, *per construct.* & AC æqualis & parallela ipsi BI (§. 257); erit $o = x$ & $m = n$ (§. 233); consequenter CAB = & ∽ CBI (§. 251). Eodem modo ostenditur esse CBI = & ∽ BIF = & ∽ FIK, &c. Porro quoniam CI & BF sunt inter se æquales atque parallelæ, *per constr.* erit NT parallela ipsi CS (§. 257), adeoque $y = u$ & $t = v$ (§. 233); consequenter CIN = & ∽ CBI (§. 251). Eodem modo ostenditur esse CBI = & ∽ IOK = & ∽ KPL, &c. = & ∽ ABY = & ∽ BSF = & ∽ FTG, &c. Sunt itaque omnia triangula inter se æqualia & æquilatera. *Q. e. d.*

PROBLEMA XIII.

528. *Rete pro Dodecaëdro describere.*

RESOLUTIO.

Tab. X. Fig. 163.
1. Describatur pentagonum regulare (§. 352).
2. Applicata regula ad A & D ducantur rectæ AG & DF ipsi AB æquales.
3. Eodem modo ducantur AI & CH, BL, & DK, BN & EM, &c.
4. Intervallo lateris pentagoni fiat intersectio in Q ex G & L, in R ex N & O, in S ex H & F, &c. ducanturque GQ & QL, NR & OR, HS & FS, &c.
5. Eodem modo construantur pentagona reliqua *a, b, c, d, e, f.*

DEMONSTRATIO.

Demonstrandum est pentagona omnia esse regularia ipsique ABCDE æqualia (§. 475). Nimirum AB = GA = BL = GQ = QL, *per constr.* Cumque anguli x mensura sit arcus dimidius ABCD (§. 324), anguli vero pentagoni E similiter sit mensura dimidius arcus ABCD (§. 314); erit angulus x angulo pentagoni E æqualis (§. 141). Et quoniam eodem modo ostenditur, esse quoque angulum u angulo pentagoni æqualem; erit ABLQG pentagonum regulare (§. 352), idque, ob latus commune AB, ipsi AEDCB æquale (§. 177, 161). Eadem demonstratio cum de reliquis pentagonis valeat; evidens est, omnia & regularia, & inter se æqualia esse. *Q. e. d.*

PROBLEMA XIV.

529. *Corpora geometrica construere.*

RESOLUTIO.

1. Delineentur retia in charta ex pluribus foliis compacta (§. 513, & seqq.).
2. Delineata exscindantur, resecta charta superflua juxta eorum perimetros.
3. Exscissa agglutinentur chartæ colоratæ.
4. Hujus superfluum ita resecetur, ut partibus perimetri alternis margines quidam relinquantur, quemadmodum in reti tetraëdri indicavimus.

5. Sin-

5. Singula retium intra perimetrum lineamenta, ex. gr. EF, FD & DE in reti tetraëdri, scalpello profundius imprimantur, ut commode complicari queant latera perimetri solidi.

6. Denique retia complicentur & marginum ope conglutinentur.

THEOREMA XXII.

530. *Cubus, Tetraëdrum, Octaëdrum, Dodecaëdrum, & Icosaëdrum sunt corpora regularia; nec præter hæc quinque aliud possibile.*

DEMONSTRATIO.

Cubus sex quadratis, tetraëdrum quatuor, octaëdrum octo, icosaëdrum viginti triangulis regularibus, dodecaëdrum denique duodecim pentagonis regularibus inter se æqualibus terminatur (§. 460, 475). Sunt igitur hæc corpora regularia (§. 453). *Quod erat unum.*

In tetraëdro tres, in octaëdro quatuor, in icosaëdro quinque anguli plani trianguli regularis ad solidum efficiendum concurrunt (§. 525, 526, 527). Quoniam vero summa sex istiusmodi angulorum est 360° (§. 243), triangulis regularibus nullum corpus, præter illa tria, contineri potest (§. 452). In cubo tres anguli quadrati solidum efficiunt (§. 513). Quare cum summa quatuor istiusmodi angulorum sit 360° (§. 98, 144); quadratis nullum corpus continetur nisi cubus. In dodecaëdro tres anguli pentagoni regularis solidum constituunt (§. 528). Quia vero summa quatuor est 432°, & summa trium in hexagono regulari 360°, atque in reliquis figuris regularibus 360° major (§. 345), ad angulum vero solidum constituendum minimum tres plani requiruntur (§. 447); pentagonis regularibus nonnisi dodecaëdrum, figuris vero plurium laterum nullum corpus terminari potest. Corpora igitur regularia nonnisi quinque sunt. *Quod erat alterum.*

CAPUT IV.

De Dimensione Solidorum.

PROBLEMA XV.

531. *Superficiem ac soliditatem Cubi determinare.*

RESOLUTIO.

I. Cum superficies cubi ex sex quadratis æqualibus componatur (§. 460); latus cubi in seipsum ducatur, & factum per 6 multiplicetur (§. 370).

II. Quodsi idem factum in latus ducatur: prodibit soliditas cubi.

Sit ex. gr. latus cubi AB 2° 7′ 4″. Fig. 164.

AB =	274	Basis =	75076
	274	AB =	274
	1096		300304
	1918		525532
	548		150152
ABDC =	75076	Solidit.	20° 5 7 0′ 8 2 4″
	6		
Superfic.	45° 0 4′ 5 6″		

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

T. X. Fig. 104. Cum menſuræ ſolidorum ſint cubi, quorum latera perticæ, pedi, digito &c. æqualia (§. 477); ſoliditatem cubi determinaturus invenire debet, quot perticæ, pedes, digiti &c. cubici in eo contineantur. Quodſi jam latus in partes quotcunque æquales diviſum concipiamus, tot erunt cuborum ordines quot in latere AB partes, & in quolibet ordine totidem exiſtent quot in baſi ACFE quadrata. Quare ſi baſin ACFE, hoc eſt, factum ex latere cubi in ſeipſum (§. 370), per latus cubi AB multiplices; prodibit numerus cuborum minorum, ex quibus major componitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

532. Si latus cubi fuerit 10, erit ſoliditas 1000: ſi illud 12, hæc 1728. Quare cum pertica Geometrarum ſit 10 pedum, pes 10 digitorum, &c. (§. 25); pertica cubica eſt 1000 pedum cubicorum, pes cubicus 1000 digitorum cubicorum &c. Hinc in exemplo noſtro ſoliditas cubi eſt 20° 570′824″. Similiter cum pertica *Rhenana* ſit 12 pedum, pes 12 digitorum; pertica cubica eſt 1728 pedum, pes cubicus 1728 digitorum. Quare ſi in noſtro exemplo 20570824 dividas per 1728, quotus erit 11904′ & 712″. Quodſi 11904′ porro dividas per 1728; quotus erit 6° & 1536, adeoque habebis 6°, 1536′ & 712″.

SCHOLION.

533. *Patet adeo, quantum diviſio menſuræ in 10 partes præſtet diviſione in 12.*

COROLLARIUM II.

534. Cubi ſunt in ratione triplicata laterum (§. 259 *Arithm.*), & æquales, ſi latera æqualia ſint.

THEOREMA XXIII.

535. *Parallelepipeda, Priſmata & Cylindri, quorum baſes & altitudines æquantur, æqualia ſunt.*

DEMONSTRATIO.

Concipiantur hæc corpora planis eorum baſibus parallelis ſecari in diſcos craſſitiei quantumlibet exiguæ. Quoniam altitudines æquantur, *per hypoth.* ex uno tot diſci prodibunt, quot ex altero. Cumque plana ſectionum baſi parallelarum eidem æqualia (§. 463, 458, 466); baſes vero illorum corporum inter ſe æquales ſunt, *per hypoth.* etiam diſci ſinguli unius corporis diſcis ſingulis alterius æquantur (§. 87 *Arithm.*); conſequenter cum diſci omnes ſimul ſumti cum corporibus idem ſint, corpora tota inter ſe æqualia ſunt (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVI.

536. *Metiri ſuperficiem ac ſoliditatem Parallelepipedi.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur area parallelogrammorum ILMK, LMON & OMKP (§. 375, 387).
2. Addantur in unam ſummam & hæc multiplicetur per 2. Erit factum ſuperficies parallelepipedi (§. 464).
3. Quodſi baſis ILMK multiplicetur per altitudinem; prodibit ſoliditas ejuſdem.

Sit ex. gr. LM = 36′, MK = 15′, MO = 12′ & parallelepipedum rectangulum.

LM = 36	LM = 36	MK = 15
MK = 15	MO = 12	MO = 12
180	72	30
36	36	15
LIKM 540	LMON 432	MOKP 180
MO = 12	LIKM 540	
1080	MOKP 180	
54	1152	
	2	
Solid. 6°480′	23°04′ Superficies.	

DEMONSTRATIO.

De parallelepipedo rectangulo eadem valet demonstratio, qua in Probl. 15 (§. 531) usi sumus. Cum vero obliquangulum æquetur rectangulo super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 535); ducta basi in altitudinem habetur quoque soliditas obliquanguli. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIV.

537. *Planum diagonale* AHFD *dividit Parallelepipedum* ABDCEFG *in duo Prismata* ADCEFH *&* ADBFGH *inter se æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Diagonalis AD dividit parallelogrammum CABD in duo triangula æqualia ACD & DBA (§. 337). Habent ergo prismata bases æquales. Quare cum DF perpendicularis ad planum ACDB (§. 462), sit etiam perpendicularis ad DA & DC, adeoque cum ad triangulum ADB, tum ad alterum ADC (§. 486); eadem quoque erit utriusque altitudo DF (§. 227), & ipsa itidem æqualia sunt (§. 535). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

538. Est ergo prisma triangulare dimidium parallelepipedi super dupla basi & ejusdem altitudinis.

PROBLEMA XVII.

539. *Metiri superficiem ac soliditatem Prismatis.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur basis (§. 392, 400, 402) & multiplicetur per 2.
2. Quærantur porro areæ parallelogrammorum prisma circumcirca terminantium, & earum summa addatur facto antecedenti.

Ita prodibit superficies integra prismatis (§. 457). Tab. VIII. Fig. 14.

3. Quodsi basis BAC per altitudinem CD multiplicetur; habebitur ejusdem soliditas.

Ex. gr. Sit BC = 4° 3′ 2″, AG = 3° 5′ 7″, CD = 8° 6′ 9″.

½BC = 2 1 6″	AC = 4 3 2″
AG = 3 5 7	CD = 8 6 9
1 5 1 2	3 8 8 8
1 0 8 0	2 5 9 2
6 4 8	3 4 5 6
Basis 7 7 1 1 2″	ACDE 3 7 5 4 0 8
	3
CD = 8 6 9	1 1 2 6 2 2 4
6 9 4 0 0 8	2 ABC 1 5 4 2 2 4
4 6 2 6 7 2	
6 1 6 8 9 6	Superfic. 128° 04′ 48″
67° 01 0′ 3 2 8″ Solidit.	

DEMONSTRATIO.

Prisma triangulare est dimidium parallelepipedi super dupla basi, sed ejusdem altitudinis (§. 539). Quodsi vero dupla basis, hoc est parallelogrammum multiplicetur per altitudinem, soliditas parallelepipedi prodit (§. 536). Ergo si simpla, hoc est, triangulum per eandem altitudinem multiplicetur; parallelepipedi dimidium, hoc est prismatis soliditas habetur. Omnia prismata reliqua cum in triangularia resolvi possint; eorum quoque soli-

liditas prodit, basi per altitudinem multiplicata. *Q. e. d.*

SCHOLION.

540. *In exemplo nostro assumsimus, prismatis basin esse triangulum regulare. Quodsi vero basis fuerit figura irregularis; parallelogramma lateralia inæqualia sunt, adeoque area uniuscujusque sigillatim invenienda.*

PROBLEMA XVIII.

Tab. VIII. Fig. 143. 541. *Data diametro* AB *& altitudine Cylindri* CF; *invenire superficiem ac soliditatem ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria baseos & basis ipsa (§. 429), hæcque multiplicetur per 2.
2. Peripheria ducatur in altitudinem; quod prodit est superficies, seclusis basibus (§. 516).
3. Quare si eidem addatur factum antecedens; habebitur superficies integra.
4. Ducatur quoque basis in altitudinem. Factum erit soliditas cylindri.

Ex. gr. Sit AB = 5° 6′, CF = 24° 6′; erit

peripheria = 1 7°5 8 4
CF = 24°6 0 0
1 0 5 5 0 4 0 0
7 0 3 3 6
3 5 1 6 8
Sup. absque Bas. 4 3 2°5 6′6 4″|00
Dupl. Bas. 4 9 2 3 5 2
Superfic. 4 8 1°8 0′1 6″
Basis = 2 4°6 1′7 6″
CF = 2 4 6 0
1 4 7 7 [illegible]
9 8 4 7 0 4
4 9 2 3 5 2
Solidit. 6 0 5°5 9 2′9 6 0″

DEMONSTRATIO.

Cum circulus æqualis sit triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radius (§. 410); cylindrus æqualis erit prismati triangulari eandem cum ipso altitudinem & basin æqualem habenti (§. 535). Ejus ergo soliditas habetur, ducta basi in altitudinem (§. 539). *Q. e. d.*

THEOREMA XXV.

542. *Pyramides & Coni super eadem basi & ejusdem altitudinis sunt æquales.*

DEMONSTRATIO.

Sit ACB unum e triangulis, quibus terminatur pyramis una; ABD vero unum e triangulis, quibus terminatur altera: ducta EL ipsi AB parallela (§. 258), erit IK=LM (§. 226); adeoque ob CK=DM, *per hypoth.* CI=DL (§ 91 *Arithm.*): EF vero & GH erunt latera planorum, quibus secantur pyramides basibus suis parallelorum. Jam cum sit $\triangle CEF \backsim \triangle CAB$, & $\triangle DGH \backsim \triangle DAB$ (§. 268); erit CI : CK = EF : AB, & DL : DM = GH : AB (§. 396). Sed CI = DL & CK = DM, *per demonstr.* Ergo EF : AB = GH : AB (§. 167 *Arithm.*); consequenter EF = GH (§. 177 *Arithm.*). Jam si pyramides secantur planis basi parallelis, plana sectionum basi similia sunt (§. 474); consequenter planum, cujus latus est EF, erit ad basin ut EF^2 ad AB^2, & planum, cujus latus est GH, erit ad eandem basin ut GH^2 ad AB^2 (§. 406). Quare cum $EF^2 = GH^2$, *per demonstr.* planum, cujus latus est EF & planum, cujus latus est GH, ad basin eandem rationem habent (§. 168 *Arithm.*); consequenter plana

plana ista inter se æqualia sunt (§. 177 *Arithm.*). Igitur & disci, quantumlibet exiguæ crassitiei, in eadem a basi distantia inter se æquantur. Quoniam itaque, ob æquales altitudines *per hypoth.* ex una pyramide tot disci secari possunt quot ex altera; pyramis una alteri æqualis sit, necesse est (§. 88 *Arithm.*) *Quod erat unum.*

Quodsi triangula ACB & ADB fuerint sectiones triangulares conorum; erunt EF & GH diametri circulorum basi communi parallelorum (§. 468). Cum adeo circuli isti æquales sint (§. 171); eodem quo ante modo demonstratur, conos æquales esse. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXVI.

543. *Prisma triangulare in tres Pyramides æquales dividi potest.*

DEMONSTRATIO.

Tab. X. Fig. 67. Quoniam planum ACB parallelum plano DFE (§. 456), pyramides ABCF & DFEA habent altitudinem eandem (§. 498), atque bases ACB & DFE æquales (§. 457). Sunt ergo æquales (§. 542). Similiter cum BEFC sit parallelogrammum (§. 457), △CFB =△BFE (§. 337). Habent adeo pyramides ACBF & BEFA æquales bases. Quoniam vero hæ bases in eodem sunt plano, quod per se patet, & verticem communem in A habent; ab eodem vero puncto sublimi A ad idem planum BEFC nonnisi unica perpendicularis duci potest (§. 489); pyramides istæ eandem quoque altitudinem habent; consequenter æquales sunt (§. 542). Quamobrem tres istæ pyramides inter se æquantur (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

544. *Si ex ligno paretur prisma & debita ratione secetur; demonstratio captui tyronum magis accommodatur. Immo ad bilancem æqualitas ponderum examinari & inde magnitudinis æqualitas colligi potest.*

COROLLARIUM I.

545. Pyramis triangularis est tertia pars prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis.

COROLLARIUM II.

546. Et quoniam multangulare quodvis in triangularia resolvi potest; quælibet pyramis est pars tertia prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 187 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

547. Quia Conus pro pyramide infinitangula haberi potest, & Cylindrus pro prismate infinitangulo; Conus pars tertia est Cylindri super æquali basi & ejusdem altitudinis.

PROBLEMA XIX.

548. *Metiri superficiem ac soliditatem Pyramidis & Coni.*

RESOLUTIO.

Quæratur soliditas prismatis vel cylindri eandem cum pyramide vel cono basin habentis (§. 539, 541), inventaque per 3 dividatur: quotus erit soliditas pyramidis vel coni (§. 546, 547).

Ex. gr. Si soliditas prismatis fuerit 67010328'', ut in Probl. 17 (§. 539); erit soliditas pyramidis 22336776''. Si soliditas cylindri fuerit 605592960'' ut in Probl. 18 (§. 541); erit soliditas coni 201864320''.

Superficies pyramidis habetur, si tam basis ABC, quam triangulorum lateralium ACD, CBD, BDA areæ investigentur (§. 392), atque in unam summam colligantur. Tab. IX. Fig.

Coni denique recti superficies prodit, peripheria basceos in latus ejus dimidium ducta (§. 519), & basi, qui circulus est, eidem addita.

5. Ex. gr. Sit diameter coni NM $= 56'$; erit peripheria $17584'''$, basis $246176''$ (*§.* Fig. 4. 429). Sit altitudo KL $= 246'$. Quoniam LM $= \frac{1}{2}$ NM $= 28'$ & KM^2 = KL^2 + LM^2 $= 60516 + 784 = 61300$ (§. 417); erit KM $= 2475''$ (*§. 269 Arithm.*), consequenter superficies coni, seclusa basi, $2176020''$ & hinc integra $2422196''$.

PROBLEMA XX.

549. *Metiri superficiem ac soliditatem Coni truncati: datis ejus altitudine* CH *& diametris basium* AB *&* CD.

Tab. X. Fig. 168. n. 1.

RESOLUTIO.

1. Datis diametris basium CD & AB inveniantur peripheriæ (§. 429).
2. Ad quadratum altitudinis CH addatur quadratum differentiæ radiorum AH, & ex aggregato extrahatur radix (§. 269 *Arithm.*), ut habeatur latus AC. (§. 417).
3. Semisumma peripheriarum multiplicetur per latus AC.

Productum erit superficies coni truncati.

Sit ex. gr. AB $= 8'$, CD $= 6'$, CH $= 10'$, erit AH $= 1'$.

$100 - 314 - 8'$
$\underline{\quad 8 \quad}$
$2512'''$ periph. maj.

CH^2 $= 100'$
AH^2 $= \quad 1$
AC^2 $= 101$
Ergo AC $= 1005'''$ fere,

$100 - 314 - 6'$
$\underline{\quad 6 \quad}$
$1884'''$ Periph. min.

2512 Periph. maj.
1884 min.
4396 Summa.
2198 Semisumma.
1005 AC
10990
219800
$202\,0'89''90'''$ Superfic. coni trunc.

DEMONSTRATIO.

Superficies coni truncati relinquitur, si superficies coni minoris ECD a superficie majoris AEB subtrahitur. Sed superficies minoris æquatur triangulo, cujus basis HI peripheria diametro CD descripta, altitudo MK, latus EC; superficies majoris vero triangulo, cujus basis NO peripheria diametro AB descripta, altitudo ML, latus AE (§. 519). Cum vero prior sit pars posterioris; illa ex hac subtracta, relinquitur pro superficie coni truncati trapezium parallelarum basium HION, cujus quidem bases HI & NO peripheriis diametris CD atque AB descriptis æquales sunt, altitudo KL vero latus AC existit. Habetur igitur superficies coni truncati semisumma dictarum peripheriarum in AC ducta (§. 400). *Q. e. d.*

II. Demissa ex C perpendiculari CH ad diametrum AB, cum etiam sit axis EF ad eandem in cono recto perpendicularis (*§.* 467), erunt CH & EF parallelæ (§. 492). Quamobrem cum triangulum EAF secet duo plana parallela CD & AB, *per hypoth.* erunt semidiametri CG & AF parallelæ (§. 499); conse-

consequenter CG=HF (§. 226), & CH=FG (§. 238). Soliditatem adeo coni truncati inventurus.

1. Inferat (§. 268): ut differentia semidiametrorum AH ad altitudinem coni truncati CH, ita semidiameter major AF ad altitudinem coni integri FE, per Probl. 33 Arithm. (§. 302 *Arithm.*) inveniendam.
2. Ex hac inventa subducat altitudinem coni truncati GF, ut relinquatur altitudo ablati EG.
3. Quærat soliditatem conorum CED & AEB (§. 548).
4. Denique illam ex hac auferat; residua erit soliditas coni truncati ACDB.

Ex. gr. Sint omnia, ut ante: erit FE= 40′, & hinc EG= 30′.

Periph. major	2512‴
$\frac{1}{4}$ AB	200
Basis maj.	502400
EF	4000
	2009600000
3	
Conus AEB	669866666$\frac{2}{3}$
Periph. min.	1884‴
$\frac{1}{4}$ CD	1$\frac{1}{2}$00
	94200
	1884
Baf. min.	282600
$\frac{1}{3}$ EG	1000
Con. CED	282600000
Con. AEB	669866666$\frac{2}{3}$
Con. trunc.	387266666$\frac{2}{3}$

THEOREMA XXVII.

550. *Sphæra æquatur pyramidi, cujus basis æqualis superficiei, altitudo autem radio sphæræ.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur superficies sphæræ in quadratula infinite exigua resoluta, quæ a planis non amplius diffident, & ex centro concipiantur ad eorum angulos ductæ rectæ. Evidens est sphæram constare ex innumeris pyramidibus quadratis in centro coëuntibus, quarum altitudines a radiis differunt quantitate inassignabili, hoc est, revera nulla, bases vero simul sumtæ superficiei sphæræ æquantur. Tota igitur sphæra recte habetur pro pyramide, cujus basis superficies, altitudo radius sphæræ. *Q. e. d.*

THEOREMA XXVIII.

551. *Sphæra est ad Cylindrum super æquali basi & ejusdem altitudinis ut 2 ad 3.* Tab. X. Fig. 269.

DEMONSTRATIO.

Si quadratum ABCD cum quadrante DBC & triangulo ADC inscripto circa latus DC gyretur, quadratum quidem cylindrum (§. 465), quadrans hemisphærium (§. 470), triangulum conum (§. 467) describit. Altitudo [illegible] corporum cum eadem sit nempe DC (§. 227); si ea in discos quantumlibet exiguæ crassitiei secentur, numerus eorum in omnibus idem erit. Sit jam EH semidiameter unius disci cylindri; erit EG semidiameter disci respondentis in hemisphærio, EF semidiameter disci in cono. Cum vero hi disci sint circuli, quod ex genesi patet (§. 131); erunt ipsi inter se ut quadrata rectarum EH, EG & EF (§. 408), hoc est, cum sit, ob parallelismum [illegible] CB, *per hypoth.* EH=CB (§. 238)=CG (§. 40), atque ob CD : DA=CE : EF (§. 268) & C[illegible] =DA (§. 98), EC=EF, ut quadrata recta-

rectarum CG, EG & EC. Quare si discum coni a disco cylindri subtrahas, relinquitur discus sphæræ (§ 417). Idem cum valeat de singulis discis ex reliquis divisionibus emergentibus, soliditas sphæræ relinquetur soliditate coni ex soliditate cylindri subducta. Est vero conus triens cylindri (§. 547). Ergo sphæra duas ejusdem partes tertias continet. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIX.

552. *Cubus diametri est ad Sphæram propemodum ut* 300 *ad* 157.

DEMONSTRATIO.

Si diameter sphæræ 100, cubus ejus 1000000 (§. 531) & cylindrus eandem cum sphæra basin & altitudinem habens 785000 (§. 541); consequenter sphæra 1570000 : 3. (§. 551). Est itaque cubus diametri ad sphæram ut 1000000 ad 1570000 : 3, hoc est, ut 300 ad 157 (§. 181, 178 *Arith.*). *Q.e.d.*

SCHOLION.

553. *Dico cubum diametri esse ad sphæram propemodum ut* 300 *ad* 157. *In Demonstratione enim assumitur ratio prope vera diametri ad peripheriam* 100 : 314 (§. 426.).

THEOREMA XXX.

554. *Superficies Sphæræ est quadrupla circuli radio Sphæræ descripti.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam sphæra æqualis est pyramidi, cujus basis est superficies, altitudo radius sphæræ (§. 550); superficies ejus habetur, si soliditas per tertiam semidiametri aut sextam diametri partem dividitur (§. 548). Est vero soliditas sphæræ factum ex $\frac{2}{3}$ circuli maximi in diametrum (§. 551, 541). Quare si hoc factum per $\frac{1}{6}$ diametri dividas, seu, quod perinde est, primum per diametrum, ut quotus sint $\frac{2}{3}$ circuli maximi, hoc est, circuli circa diametrum sphæræ descripti, (§. 210 *Arithm.*), & deinde per $\frac{1}{6}$ (§. 208, 210 *Arithm.*); erit quotus $\frac{12}{3}$ circuli maximi (§. 243 *Arithm.*), hoc est quadruplus circuli maximi (§. 223 *Arithm.*). Sed idem est superficies sphæræ, *per demonstrata.* Ergo sphæræ superficies circuli maximi quadrupla. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

555. Area circuli maximi est factum ex peripheria ejus in quartam diametri partem (§. 429). Ergo quadruplum hujus circuli est factum ex peripheria in diametrum. Superficies ergo sphæræ habetur, peripheria in diametrum ducta; consequenter rectangulo æqualis est, cujus basis peripheria circuli radio sphæræ descripti, altitudo diameter sphæræ (§. 375).

PROBLEMA XXI.

556. *Data diametro Sphæræ, invenire superficiem ac soliditatem ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria circuli radio sphæræ describendi (§. 429).
2. Inventa ducatur in diametrum. Factum est superficies sphæræ (§. 555).
3. Hoc si porro multiplicetur per sextam diametri partem; prodibit sphæræ soliditas (§. 550, 548).

Ex. gr. Sit diameter 5600''' ; erit

Periph. Circuli	17584''''
Diam.	5600
	10550400
	87920
Superf. sphær.	98470400'''

Superf.

Superf. Sphær. 984704″ | 00
Diamet. 560″

59082240
4923520

551434240

(91905706$\frac{2}{3}$ Sol. Sphær.

Aliter.

1. Quæratur cubus diametri 175616000‴ (§. 531).
2. Inveniatur porro ad 300, 157 & cubum inventum 175616000‴ numerus quartus proportionalis 91905706$\frac{2}{3}$ (§. 302 *Arithm.*), qui erit soliditas sphæræ (§. 552).

SCHOLION.

557. *Segmenta sphæræ ac sectores inferius in Analysi facilius invenire docemus quam hoc loco fieri poterat.*

PROBLEMA XXII.

558. *Metiri soliditatem ac superficiem quinque Corporum regularium.*

RESOLUTIO.

Cubi soliditas investigatur per Probl. 15 (§. 539). Tetraëdrum cum sit pyramis, & Octaëdrum pyramis geminata, Icosaëdrum vero ex viginti pyramidibus triangularibus, Dodecaëdrum ex duodecim quinquangularibus constet, quarum bases in superficie Icosaëdri & Dodecaëdri sunt, vertices in centro coëunt (§. 472, 475); horum corporum soliditas habetur per Probl. 19 (§. 548). Superficies eorundem prodit, si area figuræ unius ex terminantibus ipsa quæratur (§. 392 & 402) & inventa per numerum, a quo corpus denominatur, multiplicetur, nempe pro tetraëdro per 4, pro hexaëdro seu cubo per 6, pro octaëdro per 8, pro dodecaëdro per 12, pro icosaëdro per 20 (§. 475).

PROBLEMA XXIII.

559. *Corporis irregularis cujuscunque soliditatem invenire.* Tab. X. Fig. ...

RESOLUTIO.

1. Immittatur corpus parallelepipedo cavo, eique aqua aut arena superfundatur, & altitudo aquæ seu arenæ AB notetur.
2. Corpore extracto, observetur denuo aquæ aut arenæ complanatæ altitudo AC.
3. Subtrahatur AC ex AB, ut relinquatur BC.
4. Quoniam corpus irregulare æquatur parallelepipedo, cujus basis ECGF, altitudo BC; ejus soliditas invenietur per Probl. 16 (§. 536).

Sit ex. gr. AB 8′, AC 5′; erit BC 3′. Sit porro DB 12′, BE 4′ [illegible] ditas corporis 144′.

SCHOLION I.

560. *Quodsi corpus in aqualiculo istiusmodi commode deponi nequeat, ex. gr. si statuam certo loco affixam dimetiri jubeamur; prisma quadrangulare aut parallelepipedum circa ipsum construi debet ex asseribus. Reliqua peragenda sunt ut ante.*

COROLLARIUM.

561. Inveniri ergo potest, quot linearum cubicarum sit aliquod lignum, saxum, metallum, aut materia aliqua quæcunque pendens libram unam.

SCHOLION II.

562. *Hinc in usus futuros construi potest Tabula gravitatem diversorum corporum ostendens secundum libras, quas pendit [illegible] pes cubicus; id quod per praxes hydrostaticas aliis*

aliis adhuc modis fieri poteſt, uti ſuo loco oſtendetur.

PROBLEMA XXIV.

563. *Invenire ſoliditatem corporis cavi.*

RESOLUTIO.

Caſus I. Si corpus cavum in numero geometricorum non contineatur, reſolutio eadem, quæ Problematis præcedentis (§. 559).

Caſus II. Si corpus cavum fuerit parallelepipedum, priſma, cylindrus, ſphæra, pyramis, vel conus; ſoliditas primum totius corporis cavitate incluſa, dein cavitatis, quae eandem cum corpore figuram habere ſupponitur, per methodos ſupra traditas (§. 536, 539, 541, 548, 556) inveniatur: hac enim ex iſta ſubducta, relinquitur ſoliditas corporis cavi.

Sit ex. gr. ſoliditas cylindri cavi ABCD invenienda, ſitque diameter totius corporis AB 56″, longitudo AC 2° 4′ 6″, erit ſoliditas cylindri incluſa cavitate 605′ 592″ 960‴. Sit diameter cavitatis 500″; erit ſoliditas 482′ 775″ 000‴: quæ ex ſupra inventa ſubducta relinquit ſoliditatem corporis cavi 122′ 817″ 960‴.

CAPUT V.

De Similitudine ac Ratione Solidorum.

THEOREMA XXXI.

564. *Corpora ſimilia ſunt, quorum [illegible] plana terminantia & numero æqualia & ſimilia exiſtunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum corpora ex planorum terminantium concurſu gigni poſſe concipiamus; eodem modo determinantur, ſi plana terminantia & numero æqualia fuerint & ſimilia (§. 119). Sunt igitur & ipſa ſimilia (§. 120). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

565. Cum in planis ſimilibus anguli homologi ſint æquales (§. 175), anguli vero ſolidi homologi ex [illegible]ſu planorum homologorum (§. 446) & in corporibus ſimilibus multitudine æqualium oriantur (§. [illegible]); in corporibus ſimilibus anguli ſolidi homologi æquales ſunt (§. 449).

COROLLARIUM II.

566. Quoniam in planis ſimilibus latera homologa ſunt proportionalia (§. 175); ſi ex. gr. juxta parallelepipedum ABDCEHGF aliud ſimile *abdcehgf* (quod in Tabula non expreſſimus) poni imaginemur, erit AB : BD = *ab* : *bd*, & DB : BG = *db* : *bg*. Quamobrem ex æquo AB : BG = *ab* : *bg* (§. 194 *Arithm.*). Cum adeo ſit AB : *ab* = BD : *bd*, & AB : *ab* = BG : *bg* (§. 173 *Arithm.*); corporum ſimilium longitudines AB & *ab*, latitudines DB & *db*, itemque altitudines BG & *bg* in eadem ratione exiſtunt.

COROLLARIUM III.

567. Cubus ſex quadratis æqualibus terminatur (§. 460). Sunt vero quadrata omnia ſimilia (§. 98, 175). Ergo cubi omnes ſunt ſimiles (§. 564).

COROLLARIUM IV.

568. Quoniam corpora regularia planis regu-

regularibus, adeoque similibus (§. 106, 175) & ejusdem quidem speciei numero æqualibus (§. 475) terminantur; corpora quoque regularia ejusdem speciei similia sunt (§. 564).

COROLLARIUM V.

569. Omnia igitur Tetraëdra, omnia quoque Octaëdra, Dodecaëdra & Icosaëdra similia sunt (§. 475).

THEOREMA XXXII.

570. *Cylindrorum & Conorum similium altitudines sunt ut radii basium; axes sunt itidem ut radii basium & iis sub eodem angulo junguntur.*

DEMONSTRATIO.

Si coni & cylindri similes sunt, ea in iisdem eadem sunt, per quæ a se invicem discerni possunt (§. 24 *Arith.*). Patet vero conos & cylindros non posse distingui, nisi per rationem axis CF vel KL ad diametrum basis DE vel NM, atque angulum CFE vel KLM, quem efficit axis cum diametro (§. 465, 467). Axes igitur in conis & cylindris similibus ad diametros basium eandem rationem habent, & ad eas similiter inclinantur, seu ad eundem angulum insistunt. *Quod erat unum.*

Cum in figuris solidis, perinde ac in planis (§. 227), altitudo sit recta ex vertice in basin ad angulos rectos ducta; in conis & cylindris rectis axes sunt altitudines (§. 465, 467), adeoque patet *per demonstrata*, altitudines tum esse diametris basium proportionales. Et quoniam in ceteris altitudines in triangulis rectangulis subtendunt eosdem angulos obliquos, sub quibus nempe axes ad diametros inclinantur; ideo axibus (§. 267), consequenter etiam diametris basium (§. 167 *Arithm.*) proportionales sunt. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXXIII.

571. *Omnis Sphæra est alteri similis.*

DEMONSTRATIO.

Omnem semicirculum esse alteri similem, patet ex demonstratione Theorematis 1 Part. 1 (§. 135). Sed sphæra describitur semicirculo K circa diametrum AB gyrato (§. 470): omnes igitur sphæræ eodem modo determinantur (§. 119), adeoque similes sunt (§. 120). *Q. e. d.* Tab. IX. Fig. 145.

THEOREMA XXXIV.

572. *Omnia Prismata, Parallelepipeda, Cylindri, Pyramides & Coni sunt in ratione composita basium & altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim ut facta ex basibus in altitudines (§. 536, 539, 541, 548, *Geom.* & §. 178 *Arithm.*): ergo in ratione composita basium & altitudinum (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

573. Quare si bases fuerint æquales, altitudinum, si altitudines, basium rationem habent (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

574. Cylindrorum & conorum bases sunt circuli (§. 465, 467). Circuli sunt in ratione duplicata diametrorum (§. 40[illegible]). Ergo cylindri & coni quicunque sunt in ratione composita ex simplici altitudinum & duplicata diametrorum (§. 572); & si fuerint æque alti, sunt ut quadrata diametrorum (§. 573).

COROLLARIUM III.

575. Quare si in cylindris altitudo fuerit diametro basium æqualis; erunt in ratione triplicata diametrorum basium (§. 159 *Arithm.*).

PROBLEMA XXV.

576. *Invenire Cubum dato corpori, cujus soliditas inveniri potest, æqualem; vel qui sit ad hoc in data quacunque ratione, ex. gr. ut 3 ad 1, vel ut 1 ad 4.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur soliditas corporis per Problemata *Cap. præc.* tradita.
2. Ex ea, vel ejus multiplo aut submultiplo desiderato, ex. gr. triplo aut subquadruplo, extrahatur radix cubica (§. 282 *Arithm.*), quæ erit latus cubi desiderati (§. 531 *Geom.* & §. 248 *Arithm.*).

Ex.gr. Sit soliditas cylindri 107° 171′875″ reperietur latus cubi æqualis 4° 7′ 5″.

PROBLEMA XXVI.

577. *Dato corpore, cujus soliditas inveniri potest; invenire dimensiones alterius ipsi æqualis dati generis & altitudinis vel baseos data.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur soliditas corporis per Problemata *Cap. præc.* tradita.
2. Dividatur per basin datam: quotus erit altitudo in prismatis, parallelepipedis & cylindris (§. 536, 539, 541 *Geom.* & §. 210 *Arithm.*), tertia vero altitudinis pars in pyramidibus atque conis (§. 548 *Geom.* & §. *cit. Arithm.*).
3. Si altitudo detur, soliditas corporis inventa dividatur per eam, ut habeatur basis prismatum, parallelepipedorum & cylindrorum; per tertiam altitudinis partem, ut habeatur basis pyramidum & conorum (§§. *cit.*)
4. Pro parallelepipedis & prismatis triangularibus & quadrangularibus area baseos discerpatur in factores duos, ut habeatur longitudo & altitudo (§. 387, 392, 402, 456, 462), quorum alteruter pro basi triangularis prismatis per 2 multiplicanda (§. 392); & insuper pro multangularis basi alter per numerum laterum dividendus, ut prodeat latus figuræ polygonæ (§. 402).
5. Pro cylindro & cono ex basi inventa porro quærenda ejus diameter (§. 434).

Ex. gr. Sit soliditas alicujus corporis 3° 456′ 978″. Inveniri debet cylindrus, cujus altitudo 2° 4′ 6″. Reperietur basis 1° 40′ 53″ fere; diameter 134″.

THEOREMA XXXV.

578. *Corpora similia, Prismata, Parallelepipeda, Cylindri, Pyramides, atque Coni sunt in ratione triplicata homologorum laterum, itemque altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim in ratione composita basium & altitudinum (§. 572). Sed bases sunt in ratione duplicata homologorum laterum (§. 406, 409) & altitudines lateribus basium homologis proportionales sunt (§. 566). Ergo corpora ipsa in ratione triplicata laterum homologorum, itemque altitudinum, existunt (§. 159 *Arithm.*). *Q.e.d.*

THEOREMA XXXVI.

579. *Sphæræ ſunt ut Cubi diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Sit circulo DAEB quadratum GFIH circumſcriptum (§. 351). Quodſi ſemicirculus AEB cum quadrato dimidio AGHB circa axem communem AB in orbem moveatur, ille ſphæram, hoc cylindrum deſcribet, cujus altitudo AB diametro baſis IH æqualis (§. 470, 465). Quare ſi ponamus circulum adhuc alium cum quadrato ſimiliter circumſcripto; quoniam ex Theorematis 1 Part. 1. demonſtratione conſtat (§. 135), omnem ſemicirculum eſſe alteri ſimilem, & AB ad BH utrobique eſt ut 1 ad 2, adeoque rectangulum unum alteri ſimile (§. 175); inde generabitur ſphæra & cylindrus alteri ſimilis (§. 119, 120). Cum adeo ea utrobique coincidant, per quæ a ſe invicem diſtingui debebat, quod in utroque caſu gignitur (§. 24 *Arithm.*); erit cylindrus unus ad ſuam ſphæram ut alter ad ſuam ſphæram (§. 132 *Arithm.*); conſequenter ſphæræ ſunt inter ſe ut iſti cylindri (§. 173 *Arithm.*). Habent ergo rationem triplicatam diametrorum (§. 575), hoc eſt, ut cubi earundem exiſtunt (§. 259 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVII.

580. *Æqualia Parallelepipeda, Priſmata, Cylindri, Coni & Pyramides reciprocant baſes & altitudines.*

DEMONSTRATIO.

Si enim hæc corpora fuerint æqualia, facta ex baſibus in altitudines æqualia ſunt (§. 536, &c.). Quamobrem altitudo corporis A eſt ad altitudinem alterius B uti reciproce baſis ipſius B ad baſin ipſius A (§. 299 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVIII.

581. *Cylindrus, cujus altitudo æqualis eſt diametro baſeos, eſt ad Cubum diametri ut* 785 *ad* 1000. Tab. X. *Fig.* 172. n. 1.

DEMONSTRATIO.

Si diameter AB 100, erit baſis 7850 (§. 429). Et quoniam altitudo DC = AB, *per hypoth.* ſoliditas cylindri 785000 (§. 541). Sed cubus diametri AB = 1000000 (§. 531). Ergo cylindrus ad cubum diametri ut 785 ad 1000 (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

CAPUT VI.

De Stereometria Doliorum.

PROBLEMA XXVII.

582. *Virgulam construere, cujus ope haud difficulter invenitur numerus mensurarum fluidi alicujus, ex. gr. vini, cerevisiæ, &c. in vase cylindrico contenti.*

RESOLUTIO.

Tab. X. Fig. 172. n. 1. 2. 1. Diameter vasis cylindrici ABDE, uni mensuræ qua ad fluida mensuranda utimur æqualis, AB jungatur lineæ indefinitæ A 7 ad angulos rectos (§. 249).

2. Ex A transferatur in 1 recta A1 rectæ AB æqualis; erit B1 diameter vasis, quod duas mensuras capit, sed eandem cum vase priori altitudinem habet.

3. Fiat $A2 = B1$, erit B2 diameter vasis tres mensuras capientis, sed ejusdem denuo altitudinis cum vase, quod nonnisi unam capit. Eodem modo inveniuntur diametri vasorum capaciorum A3, A4, A5, A6, A7 &c.

4. In unum virgulæ latus transferantur divisiones inventæ A1, A2, A3, A4 &c. in alterum vero altitudo cylindri uni mensuræ æqualis, quoties fieri potest. Ita virgula constructa est.

La

Aliter.

Diametri A2, A3, A4, A5, A6, A7, &c. etiam per calculum inveniri in numeris & in particulis diametri AB per modum Scalæ geometricæ divisæ (§. 277) centesimis aut millesimis determinari possunt. Sit nempe diameter $AB = 1000$; erit ejus quadratum 1000000. Ex hujus duplo extracta radix quadrata (§. 269 *Arithm.*) erit A2. Si ex triplo, quadruplo, quintuplo &c. radix extrahatur; prodibunt diametri A3, A4, A5 &c. quem in usum constructa est Tabula sequens:

Mens.	Diam.	Mens.	Diam.	Mens.	Diam.
1	1.000	17	4.123	33	5.744
2	1.414	18	4.242	34	5.831
3	1.732	19	4.359	35	5.916
4	2.000	20	4.472	36	6.000
5	2.236	21	4.582	37	6.082
6	2.449	22	4.690	38	6.164
7	2.645	23	4.796	39	6.244
8	2.828	24	4.898	40	6.324
9	3.000	25	5.000	41	6.403
10	3.162	26	5.099	42	6.480
11	3.316	27	5.196	43	6.557
12	3.464	28	5.291	44	6.633
13	3.605	29	5.385	45	6.708
14	3.741	30	5.477	46	6.782
15	3.873	31	5.567	47	6.855
16	4.000	32	5.657	48	6.928

DE-

DEMONSTRATIO.

Cylindri eandem altitudinem habentes sunt inter se ut quadrata diametrorum (§. 574). Ergo quadratum diametri vasis duas, tres, quatuor &c. mensuras capientis est duplum, triplum, quadruplum &c. quadrati diametri vasis mensuram nonnisi unam capientis. Quare si inde radices extrahantur, habebuntur in resolutione altera diametri ipsæ (§. 246 *Arithm.*). Quoniam vero in prima AB=A1, erit ipsius B1 quadratum duplum, quadratum ipsius B2 triplum, quadratum ipsius B3 quadruplum &c. quadrati ipsius A1 (§. 417). Unde denuo patet esse rectas A2, A3, A4 &c. diametros vasorum quæsitas. Quodsi itaque has divisiones ad diametrum vasis cylindrici applices; illico constabit, quot mensuras capiat vas cylindricum eandem cum isto basin, sed altitudinem illius habens, quod unam mensuram capit. Quare si porro, ope alterius divisionis in virgula factæ, investiges quoties altitudo unius mensuræ in altitudine vasis dati contineatur, & per hunc numerum diametrum modo inventam multiplices; prodibit numerus mensurarum cavitatem vasis dati adimplentium. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

583. *Ex. gr. Sit diameter vasis cylindrici 8, altitudo 12; erit numerus mensurarum, quas capit 96.*

SCHOLION II.

584. *Altitudo cylindri mensuram unam capientis quo minor assumitur, eo diameter basis fit major. Unde tam ipsa, quam diametri cylindrorum plures mensuras capientium postea facilius in suas minutias subdividuntur.* BAYERUS (a) *suadet, ut altitudo non... unius digiti assumatur.*

SCHOLION III.

585. *Inveniuntur autem diametri vasorum unam vel plures partes decimas mensuræ capientium, si decima vel plures decimæ partes vasis unam mensuram capientis, dividantur per hujus altitudinem, ut habeatur basis cylindri circularis (§. 541): etenim hac data diameter habetur per Probl. 58 (§. 434). Eodem modo inveniuntur diametri pro scrupulis vasorum duas & plures mensuras capientium.*

SCHOLION IV.

586. *Quodsi altitudo vasis constanter eadem retineatur, diametri pro mensuris integris earumque partibus decimalibus hac ratione inveniuntur. Sit ex. gr. diameter unius mensuræ 1 seu 1000 partium decimalium; erit ejus quadratum 1000000: cujus pars decima 100000. Inde extracta radix quadrata 316 continet partes decimales diametri unius mensuræ, quæ conveniunt diametro cylindri decimam mensuræ partem continentis, ejusdem tamen cum cylindro integram mensuram capiente altitudinis. Si ex duplo hujus decimæ, nempe 200000, radix extrahatur; prodit diameter basis duas decimas unius mensuræ capientis 447, & ita porro. Quodsi quadrato diametri unius mensuræ 1000000 adjicias partem decimam 100000 & ex summa extrahas radicem quadratam 1.049; erit ea diameter vasis, quæ capit $1\frac{1}{10}$ mensuræ. Ratio patet per Demonstrationem Problematis præsentis. Atque sic patet, quomodo Virgula pithometrica accuratius construi possit, ut intervalla inter mensuras integras subdividantur in partes decimales.*

(a) *In der vollkommenen Visier-Kunst, c. 25. p. 12*

Dia-

Diametri pro mensuris integris & earum partibus decimalibus.

		3.0	1.732	6.0	2.449	9.0	3.000
0.1	316	1	1.761	1	2.469	1	3.016
2	447	2	1.788	2	2.489	2	3.033
3	548	3	1.816	3	2.509	3	3.049
4	632	4	1.844	4	2.529	4	3.066
5	707	5	1.871	5	2.549	5	3.082
6	775	6	1.897	6	2.569	6	3.098
7	837	7	1.923	7	2.588	7	3.114
8	894	8	1.949	8	2.607	8	3.130
9	949	9	1.975	9	2.626	9	3.146
1.0	1.000	4.0	2.000	7.0	2.645	10.0	3.162
1	1.049	1	2.025	1	2.664	1	3.178
2	1.095	2	2.049	2	2.683	2	3.194
3	1.140	3	2.073	3	2.702	3	3.210
4	1.183	4	2.097	4	2.720	4	3.226
5	1.225	5	2.121	5	2.738	5	3.241
6	1.265	6	2.145	6	2.756	6	3.256
7	1.304	7	2.168	7	2.774	7	3.271
8	1.342	8	2.191	8	2.792	8	3.286
9	1.378	9	2.214	9	2.810	9	3.301
2.0	1.414	5.0	2.236	8.0	2.828	11.0	3.316
1	1.449	1	2.258	1	2.846	1	3.331
2	1.483	2	2.280	2	2.864	2	3.346
3	[illegible]	[illegible]	2.302	3	2.881	3	3.361
4	1.549	4	2.324	4	2.898	4	3.371
[illegible]	1.581	5	2.345	5	2.915	5	3.391
6	1.612	6	2.366	6	2.932	6	3.406
7	1.643	7	2.387	7	2.949	7	3.421
8	1.673	8	2.408	8	2.966	8	3.436
9	1.703	9	2.429	9	2.983	9	3.451

SCHOLION V.

587. *Ceterum me non monente patet, cylindrorum mensuram hic constitui cylindrum, quemadmodum supra solidorum omnium mensura assumtus est cubus. Unde & Virgula pithometrica sic constru[illegible]* Virga cylindrica *appellatur. Similiter hic circulorum mensura constituitur circulus, sicuti supra omnium sup[illegible]cierum mensura quadratum.*

PROBLEMA XXVIII.

588. *Invenire soliditatem Dolii, hoc est, determinare numerum mensurarum, quas capit.*

RESOLUTIO.

1. Virga pithometrica vi Probl. præc. (§. 582) decenter applicata, exploretur tam longitudo Dolii AC, quam utraque diameter GH & AB.
2. Cum, experientia non invita, rigore licet geometrico repugnante, Dolium pro cylindro habeatur, cujus basis inter fundum & ventrem Dolii media æquidifferens; inter AB & GH quæratur numerus medius æquidifferens (§. 330 *Arithm.*), qui *Diameter æquata* dici solet.
3. Numerus inventus multiplicetur per longitudinem Dolii AC, erit factum, *vi demonstrationis Problem. præced.* (§. 582) numerus mensurarum, quas capit Dolium.

Sit ex. gr. $AB = 8$	$AC = 15$
$GH = 12$	$\frac{1}{2}(AB + GH) = 10$
erit $AB + GH = 20$	capac. dolii 150 mens.
$\frac{1}{2}(AB + GH) = 10.$	

SCHOLION I.

589. *Quodsi contingat, fundum non esse perfecte circularem, sed unam diametrum esse altera longiorem; utramque diametrum metiri & earum semisummam pro diametro circuli fundo Dolii æqualis assumere solent.*

SCHOLION II.

590. *Tabulæ, ex quibus inter se coassatis Dolia construi solent, ultra fundum prominent. Pro longitudine igitur Dolii non assumenda est recta FE, sed AC, quæ habetur, si quantitas prominentiæ tabularum,* una

una cum ejus dimidio cui fundi craſſities æqualis ſupponitur, a recta FE utrinque ſubtrahitur. Solent autem quantitates ſubtrahendas creta notare utrinque in ipſa ſuperficie Dolii, ex. gr. in K, ſi quantitas ſubtrahenda fuerit IK. Eum in finem peculiarem Virgulam parant, in partes minutas æquales diviſam.

SCHOLION III.

591. *Alios decepturi ex tabulis in medio gracilibus, circa extrema craſſis & orbibus ligneis pariter craſſis Dolium conſtruunt: quæ fraus non facile detegitur.*

SCHOLION IV.

592. *Poſſemus equidem ſoliditatem cavitatis Dolii eodem modo explorare, quo ſupra corpora cava metiri docuimus (§. 563): ſi enim per ſoliditatem unius menſuræ divideretur, prodiret Dolii capacitas. Enimvero prolixitas calculi obſtat, quo minus ea methodo utantur.*

SCHOLION V.

593. *Proſtat etiam methodus, qua ſine ullo calculo capacitas Dolii invenitur. Utuntur ea in* Batavia *& variis* Germaniæ *locis. Sed cum ſupponat, omnia Dolia eſſe inter ſe ſimilia & longitudinem duplam diametri æquatæ, hoc eſt, ſemiſummæ diametrorum AB & GH; non tuto ubique adhibetur.* KEPLERUS (*a*) *illam omnibus reliquis præfert, quia omnes cautelas menſorum in ſe continet.* Virga enim, *inquit*, introrſum immiſſa eliminat craſſitiem tabularum, circulorum qui vincula ſunt, viminumque quibus circuli lignei ſtringuntur. Eliminat exceſſum marginum, quorum in crenis hærent orbes. Hoc autem ratio alia menſurandi una eademque opera præſtare nulla poteſt. *Unde ad privatorum ſecuritatem fraudeſque eliminandas ſuadet*, ut lex illa Dolii conſtruendi, quæ tertia parte longitudinis tabularum jubet deſcribere circulum orbium ligneorum, magiſtratuum autoritate diligentiaque conſervetur, pœniſque & proſcriptione vaſorum, quæ hanc figuram non habent, vindicetur. *Ea nimirum proportio in Doliis* Auſtriacis *obſervatur.*

(*a*) In *Stereometria doliorum vinariorum*, Part. 3. art. 3. f. n. 3.

SCHOLION VI.

594. *Sunt, qui aſſumunt, Dolium ex duobus conis truncatis componi, & ejus ſoliditatem per Probl. 20 (§. 549) quærunt. Alii cum aliis corporibus geometricis id comparant.* CLAVIUS (*b*) *alia pro duobus conis truncatis, alia pro fruſto ſphæroidis* Archimedeæ *habet, quoad prius conſentiente, quoad poſterius vero contradicente* KEPLERO (*c*). CLAVIO *tamen aſſentitur* OUGHTREDUS, *eumque in finem regulam a ſe inventam propoſuit (d).* WALLISIUS *pro fruſto fuſi parabolici habet (e). Enimvero cum methodus propoſita praxi ſatis reſpondeat, reliquæ vero quæ ab* Anglis *potiſſimum proponuntur (f), utut ex profundiori Geometria derivatæ, moleſtiores ſint, nec ex Elementis Geometriæ demonſtrari poſſint; illa contenti eſſe poſſumus. Pauca attamen adhuc dicemus de Virgæ menſoriæ a* KEPLERO *tantopere deprædicatæ fabrica.*

PROBLEMA XXIX.

595. *Conſtruere Virgulam pithometricam, qua ſine calculo capacitatem Dolii explorare licet.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Cum vaſa pro quibus Virga hæc paratur, eſſe debeant cylindri, quorum altitudo DC æqualis diametro AB, ſi fiat ut 785 ad 1000 ita ſoliditas unius menſuræ ad numerum quartum proportionalem, per Probl. 33 (§. 302 *Arithm.*) inveniendum; reperietur cubus diametri cylindri unam menſuram capientis (§. 581). Tab. X. *Fig.* 172. n. 1.

2. In-

(*b*) *Geom. pract.* lib. 5. c. 10. Tom. II. Oper. f. 145.
(*c*) In *Stereometria* part. 2. fol. H. 3.
(*d*) In *Clave mathematica* c. 19. p. m. 103.
(*e*) In *Algebra* c. 81. Vol. II. Oper. f.
(*f*) Vid. *The general Gauger* by Mr. DOUGHARTY p. 141 & ſeqq.

2. Inde ergo si extrahitur radix cubica (§. 282 *Arithm.*); prodibit diameter vasis cylindrici mensuram unam capientis.

3. Jam cum vas illud habeat altitudinem AE vel CD diametro AB æqualem, & diagonalis BE assumatur pro indice capacitatis, *per hypoth.* si ex duplo quadrati diametri modo inventæ AB extrahatur radix (§. 269 *Arith.*); prodibit index vasis BE mensuram unam capientis (§. 417).

4. Ut porro inveniantur diagonales similium vasorum, quæ capiunt mensuras duas, tres. quatuor &c. tenendum est, ea esse ut cubos diametrorum (§. 578), consequenter etiam, ob similitudinem triangulorum, quale ABE (§. 183), ut cubos diagonalium (*§. cit. & §.* 260 *Arithm.*). Quare si diagonalis vasis unam mensuram capientis concipiatur in 1000 partes divisa, & ex cubi 1000000000 duplo 2000000000, triplo 3000000000, quadruplo 4000000000, &c. extrahantur radices cubicæ (§. 282 *Arithm.*); prodibunt diagonales vasorum, quæ duas, tres, quatuor, &c. mensuras capiunt.

5. Denique longitudo diagonalis primæ transferatur in Virgulam, & una dividatur in 1000 partes æquales (§. 277): ita enim ex parata hac Scala particulas millesimas diagonalibus reliquis competentes in Virgulam transferre licet.

Quoniam itaque Dolium in præsente usu habetur pro cylindro gemino, cujus altitudo æqualis est semisummæ diametrorum orbis AB & ventris GH, estque $FB = \frac{1}{2}(AB + GH)$, adeoque GB diagonalis in cylindro, cujus diameter semisumma diametrorum AB & GH; capacitas ejus statim innotescit, si per orificium G virgula usque ad B detrudatur. *Q. e. i. & d.*

SCHOLION I.

596. *Constructioni Virgulæ itaque inservit Tabula sequens.*

Mens.	Diag.	Mens.	Diag.	Mens.	Diag.	Mens.	Diag.
1	1000	16	2519	31	3141	46	3583
2	1259	17	2571	32	3174	47	3608
3	1442	18	2620	33	3207	48	3634
4	1587	19	2668	34	3239	49	3659
5	1709	20	2714	35	3271	50	3683
6	1817	21	2758	36	3301	51	3708
7	1912	22	2802	37	3332	52	3732
8	2000	23	2843	38	3361	53	3756
9	2080	24	2884	39	3391	54	3779
10	2154	25	2924	40	3419	55	3802
11	2223	26	2962	41	3448	56	3825
12	2289	27	3000	42	3476	57	3848
13	2351	28	3036	43	3503	58	3870
14	2410	29	3072	44	3530	59	3892
15	2466	30	3107	45	3556	60	3914

SCHOLION II.

597. Virgula *hæc* cubica *appellari solet, quemadmodum præcedens* cylindrica. *Et facile ad alia Dolia similia construitur, in quibus longitudo dimidia GF fuerit ad diametrum æquatam FB in quacunque ratione, modo in cylindro unam mensuram capiente altitudo AE ad diametrum AB in eadem fuerit.*

PRO-

PROBLEMA XXX.

598. *Virgam pithometricam construe ad determinandam quantitatem fluidi in Dolio non pleno.*

RESOLUTIO.

1. Assumatur Dolium aqua plenum, cujus capacitas jam cognita, & numerus mensurarum ex. gr. per 20 aut numerum alium minorem vel majorem dividatur, prout Dolii capacitatem in partes majores vel minores dividi commodum visum fuerit.
2. Dolio beneficio libellæ Q ita collocato, ut axis ejus sit horizonti parallelus, Virga per orificium ventris intrudatur, donec fundum Dolii attingat.
3. Ea quantitate fluidi ex Dolio emissa, quæ numero mensuratum per divisionem paulo ante n. 1. invento respondet, in Virgula notetur decrementum altitudinis in fluido, quod exprimit totius capacitatis partem vigesimam.
4. Eodem modo notabis decrementum altitudinis, reliquis particulis vigesimis quantitatis fluidi in Dolio contenti respondens.
5. Horum decrementorum intervallis in una Virgulæ facie notatis; altera dividitur in partes quotcunque minutas inter se æquales, ultra vigesimarum intervalla inæqualia continuandas, ex. gr. in 200 aut plures.

Ita Virga pro Dolio non pleno metiendo constructa est.

SCHOLION.

599. *Quodsi in usum domesticum pro eodem Dolio istiusmodi Virgulam parare volueris, sufficit decrementorum intervalla in una ejus facie notari, nec opus est faciei alterius in partes æquales divisione. Decrementa quoque altitudinis fluidi notantur numeris, qui quantitati ex Dolio emissæ respondent, ex. gr. si integrum Dolium capiat* 64 *mensuras & una effluxerit, in fine decrementi altitudinis scribitur* 63.

PROBLEMA XXXI.

600. *Determinare quantitatem fluidi in Dolio non pleno.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur capacitas totius Dolii *per Probl.* 28 (§. 588). Tab. X. *Fig.* 173.
2. Dolio libellæ beneficio ita collocato, ut axis ejus sit horizonti parallelus, ne scilicet fluidum in una Dolii parte altius sit, quam in altera, Virga per Problema præcedens (§. 598) parata per orificium Dolii G intrudatur, donec fundum in H attingat.
3. Ea rursus extracta, notetur quot partes in facie æqualium vino madidæ sint.
4. Hinc inferatur: ut numerus partium æqualium in altera Virgulæ facie profunditati totius Dolii GH respondentium ad numerum similium partium altitudini fluidi LH convenientium, ita numerus earundem partium, quæ intervallo scrupulorum vigesimorum congruunt, ad numerum quartum proportionalem *per Probl.* 33 *Arithm.* (§. 302) inveniendum.

Tab. X. Fig. 173. 5. Capiatur circino intervallum tot partium æqualium in Virga, quot numerus inventus exprimit, & transferatur in Scalam ſcrupulorum vigeſimorum, noteturque eorum numerus, quæ ipſi congruunt.

6. Per hunc dividatur numerus menſurarum, quas Dolium integrum capit: quotus erit numerus menſurarum, quas fluidum in Dolio contentum replere poteſt. *Q. e. i.*

Ex. gr. ſit GH 160, HL 58, numerus partium æqualium, quæ integro ſcrupulorum vigeſimorum intervallo congruunt, 120, capacitas denique Dolii 128 menſurarum.

Fiat : 160 —— 58 —— 120 ~~1~~2
40) 4 3 3 ~~174~~ $(43\frac{1}{4}$
174 ~~44~~

Ponamus partibus $43\frac{1}{2}$ æqualibus reſpondere in Scala inæqualium $\frac{4}{20}$ ſive $\frac{1}{5}$. Quodſi itaque 128 per 5 dividas, quotus $25\frac{3}{5}$ n[umerum] menſurarum indicabit, quas flu[i]dum in Dolio contentum replere poteſt.

S C H O L I O N.

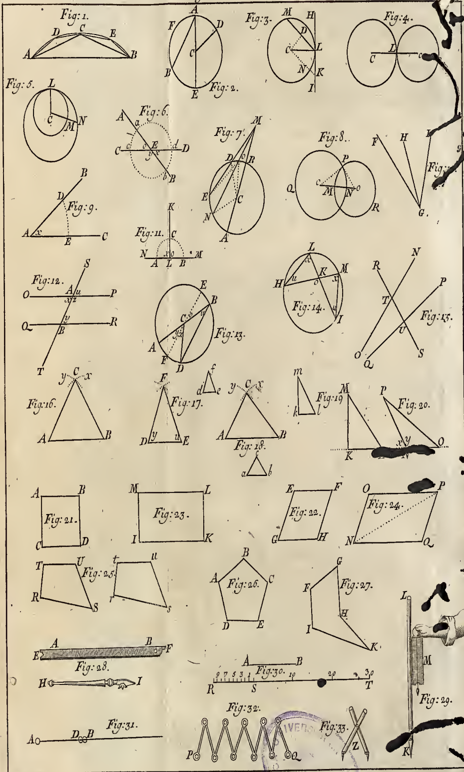
601. *Si Dolia omnia eſſent ſimilia per me*[-]*thodum propoſitam ſatis accurate inveniret*[ur] *quantitas fluidi in Dolio non pleno : ſed in di*[ſ]*ſimilibus eadem exacte reperiri hac ratione n*[e]*quit. Nondum autem inventa eſt method*[us] *& rigori geometrico ſatisfaciens & praxi re*[ſ]*pondens. Quam enim* KEPLERUS *dedit* (a), *e*[a] *nec demonſtrativa, nec praxi adaptata. Und*[e] *neque ipſi ſatisfacit. Et quamvis aliam poſte*[a] *eidem ſubſtituerit* (b) *: ſatis tamen intricat*[a] *eſt. Intricatiores adhuc ſunt, quas* BAYERUS (c) *&* DOUGHARTY (d) *tradunt.*

(a) In *Stereometria Doliorum*, f. O. 2. b.
(b) *In dem Auszuge der uhralten Meſſe-Kun*[ſt] ARCHIMEDIS §. 88. f. 95.
(c) In *Conometria Mauritiana* c. 9. p. 10[…] & ſeqq.
(d *The General Gauger* p. 164. & ſeqq.

Finis Elementorum Geometriæ.

ELEMENTA

Fig: Geom: Tab: I.



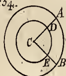


Fig:34.

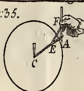


Fig:35.

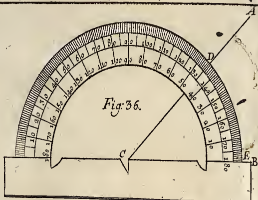


Fig:36.

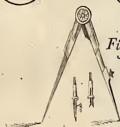


Fig:37.

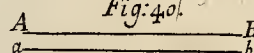


Fig:40.

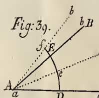


Fig:39.

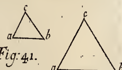


Fig:41.

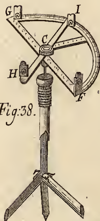


Fig:38.

Fig:45.

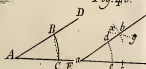


Fig:46.

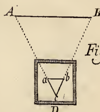


Fig:43.

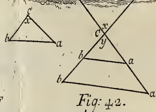


Fig: 42.

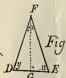


Fig:44.

Fig:47.

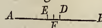


Fig:51.

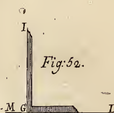


Fig:52.

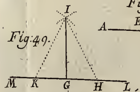


Fig:49.

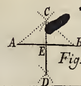


Fig:50.

Fig. Geom. Tab. III.

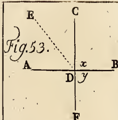


Fig. 53.

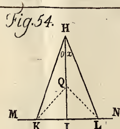


Fig. 54.

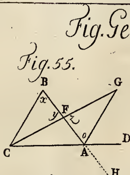


Fig. 55.

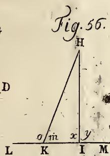


Fig. 56.

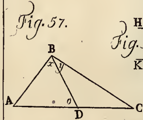


Fig. 57.

Fig. 58.

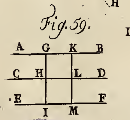


Fig. 59.

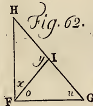


Fig. 62.

Fig. 60.

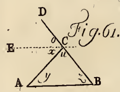


Fig. 61.

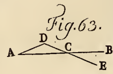


Fig. 63.

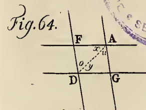


Fig. 64.

Fig. 65.

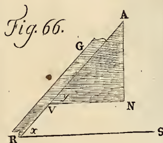


Fig. 66.

Fig. 67.

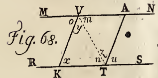


Fig. 68.

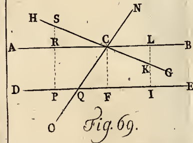


Fig. 69.

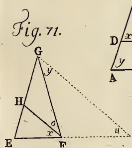


Fig. 71.

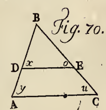


Fig. 70.

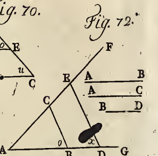
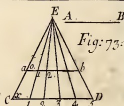
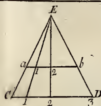
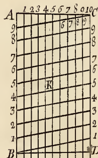


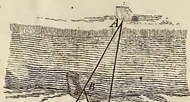
Fig. 72.

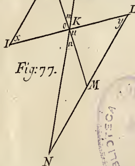

E A B
a o b
1 2
C x D
1 2 3 4 5
Fig: 73.


E
a 1 2 b
C D
1 2 3
Fig: 74.

A
o B


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
A C
9 8 7 6 5 4 3 2 1
K
B D


A
B


L
m K
o u y
I x
n
Fig: 77.
M
N

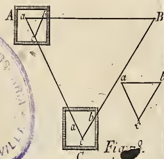

A a B
a b
C
Fig: 78.

Fig: 75.
E I
F L

A B

Fig: 81.
Q

Fig: 79.
a b
c d
C D

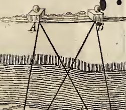

A B
y u
c d
C x z D
Fig: 80.

Fig: 76.

Fig: 82.
Fig: 83.

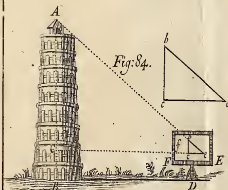


Fig: 84.

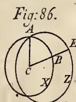


Fig: 86.

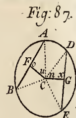


Fig: 87.

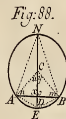


Fig: 88.

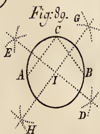


Fig: 89.

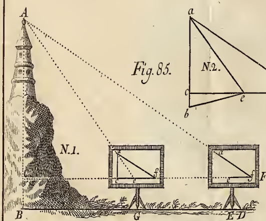
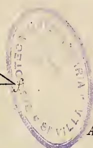


Fig. 85.
N.2.
N.1.



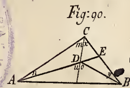


Fig: 90.

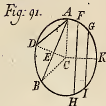


Fig: 91.

Fig: 92.

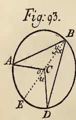


Fig: 93.

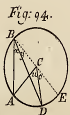


Fig: 94.

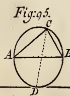
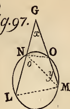
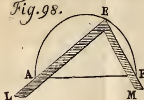


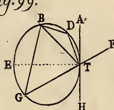
Fig: 95.

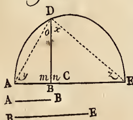
Fig: 96.

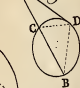
Fig. Geom. Tab. VI

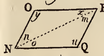


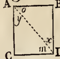


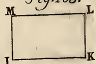


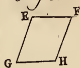


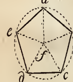


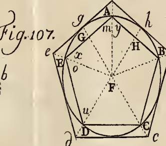


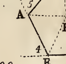


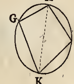


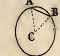


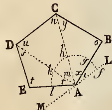


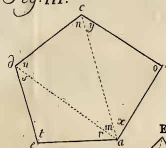


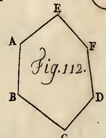


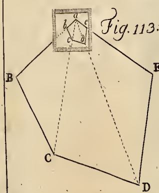


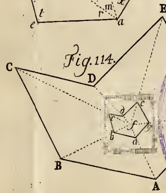


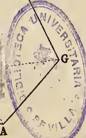


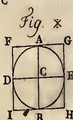












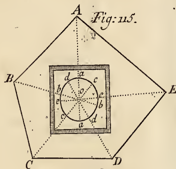


Fig: 115.
A
B
E
C
D

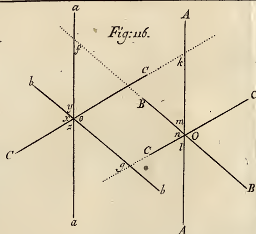


Fig: 116.

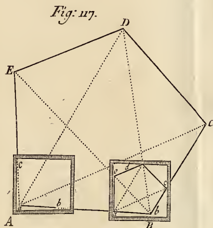
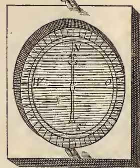


Fig: 117.


Pyxis magnetica.

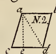


Fig: 122.
N.2.

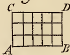


Fig: 120.

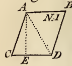


Fig: 122.
N.1

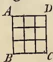


Fig: 119.

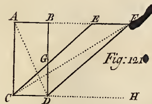


Fig: 121.

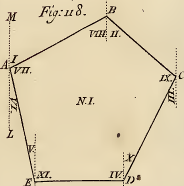


Fig: 118.
N.I.

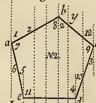


Fig: 118.
N.2.

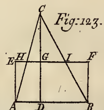
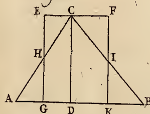
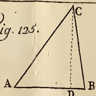
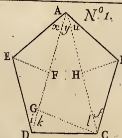
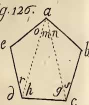


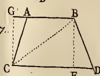
Fig: 123.

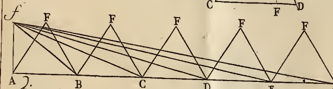


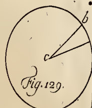


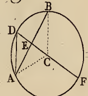


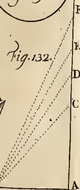


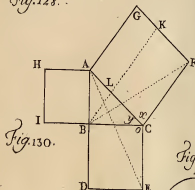


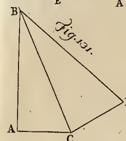


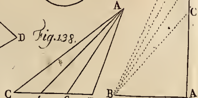


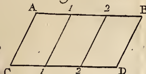


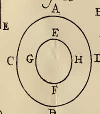


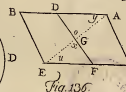


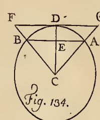


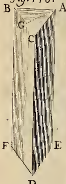


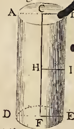


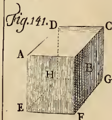












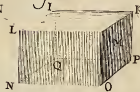
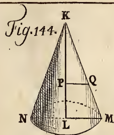
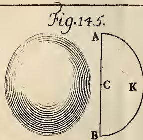
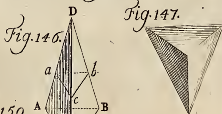


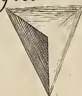
Fig. Geom. Tab. VIII.

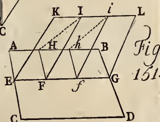
Fig. Geom. Tab. IX.

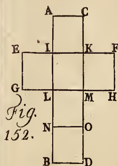


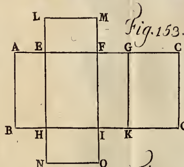


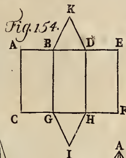


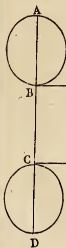


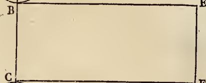


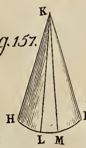


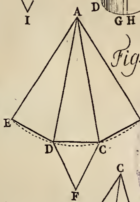


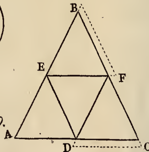


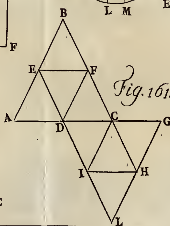












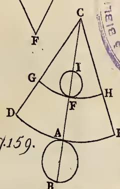
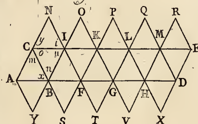
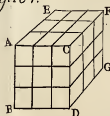
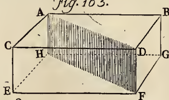
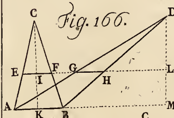


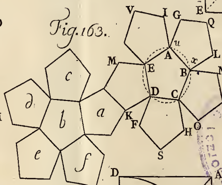
Fig. Geom. Tab. X

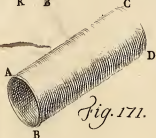


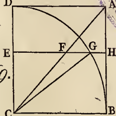


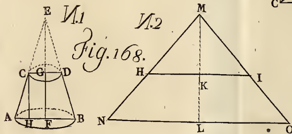


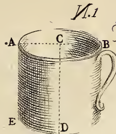


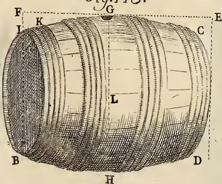












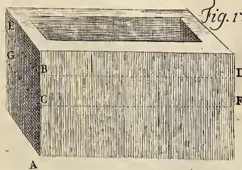
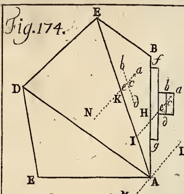
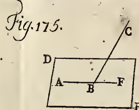
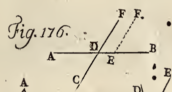
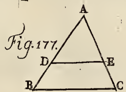


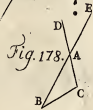
Fig. Geom. Tab. XI.

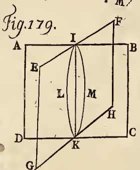


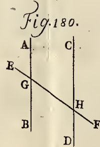


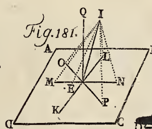


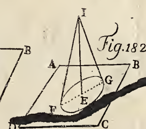


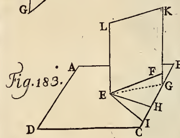


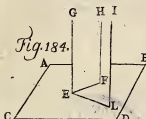


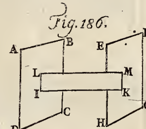


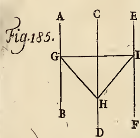


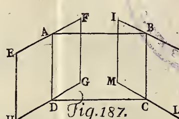


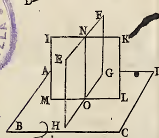


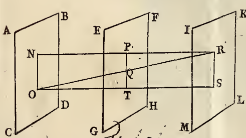


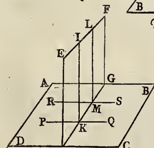


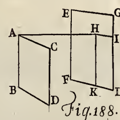










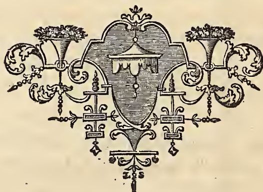


ELEMENTA
TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

PRÆFATIO.

OMENTI perquam exigui tyronibus videtur Trigonometria, utilitatis prorſus nullius. Enimvero rerum mathematicarum periti ore unanimi confitentur, quod, ſublata Trigonometria, maxima eorum pars pereat, quæ in Matheſi admiramur. Certe Stellarum magnitudinem, diſtantiam a Terra, motum, Eclipſium tam ſolarium quam lunarium computum, magnitudinem Globi terraquei, & innumera alia prorſus ignoraremus, ſi nobiliſſimæ hujus ſcientiæ auxilio deſtitueremur. Trigonometria igitur pro arte haberi debet, qua maxime abſcondita & a cognitione hominum remota in apricum producuntur. Eam qui neſcit, non magnos in Matheſi mixta ſentiet progreſſus: ſæpius ipſi in Philoſophia naturali hærebit aqua, ex. gr. Iridis phænomena ad rationes ſuas revocaturo aliaque meteora emphatica explicaturo. Studium igitur Trigonometriæ addiſcendæ afferatur indefeſſum, nec impatiens ſit mora, donec in partibus Matheſeos ſubſequentibus ineffabilis ejuſdem

usus ex his ipsis etiam Elementis patescat. Fides oculata impediet, quo minus in posterum judicia de rerum usu (quod vulgo plerumque fieri solet) præcipitemus. Paucis Problematibus comprehendi, quæ alias per casus plures distribuuntur: In Elementis enim præter necessitatem multiplicanda non sunt, quæ spinosa videntur tyronibus; nec culpatur brevitas, quæ perspicuitati non officit, memoriæ levamen certissimum exsistit. Cumque Trigonometria etiam in Geometria practica usum habeat, quam cum Theoretica conjungi consultum duximus; ideo hunc usum sub finem annectere placuit.



ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Conſtructione Canonis Sinuum, Tangentium, atque Secantium, tam naturalium, quam artificialium.

DEFINITIO I.

Tab. I. Fig. 1. 1. *Trigonometria plana* eſt Scientia ex tribus trianguli rectilinei partibus inveniendi reliquas.

Ex. gr. Ex duobus lateribus AB & AC atque angulo B inveniuntur anguli reliqui A & C cum latere tertio BC.

DEFINITIO II.

Tab. I. Fig. 2. 2. *Sinus rectus* AD arcus AE vel AI eſt chordæ AB arcus dupli AEB vel AIB dimidium. *Sinus totus* eſt radius HC, ſeu ſinus quadrantis HE. *Sinus verſus* eſt pars radii ED inter ſinum rectum AD & arcum AE intercepta.

COROLLARIUM I.

3. Sinus ergo AD ad radium EC perpendicularis (§. 291 *Geom.*): conſequenter ſinus omnes eidem radio inſiſtentes inter ſe paralleli (§. 256 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

4. Quoniam arcus AE eſt menſura anguli ACE, & AI ejus contigui ACI (§. 57 *Geom.*); quadrans vero HE menſura anguli recti (§. 143 *Geom.*): AD etiam ſinus rectus & ED ſinus ver[ſus eſt] angulorum ACE & A[CI], ſinus vero totus eſt ſinus anguli recti. Tab. I. *Fig.* 2.

COROLLARIUM III.

5. Duo igitur anguli, qui ſunt deinceps, eundem habent ſinum.

COROLLARIUM IV.

6. Angulorum adeo obtuſorum ſinus iidem ſunt, quos habent eorum complementa ad duos rectos (§. 147 *Geom.*).

DEFINITIO III.

7. *Tangens* arcus EA eſt portio rectæ tangentis circulum EF inter rectas ex centro C per extrema arcus E & A ductas interceptæ. Recta FC dicitur *Secans* ejuſdem arcus.

COROLLARIUM I.

8. Tangens EF ad radium EC perpendicularis eſt (§. 308 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

9. Eſt etiam FE tangens, & FC ſecans anguli ACE, itemque ACI (§. 57 *Geom.*).

COROLLARIUM III.

10. Duo igitur anguli, qui sunt deinceps, eandem habent tangentem atque secantem.

DEFINITIO IV.

Tab. I. Fig. 2. 11. *Cosinus* est sinus, *Cotangens* tangens, *Cosecans* secans arcus AH, qui est alterius AE complementum ad quadrantem. Ita ex. gr. AG sinus arcus AH dicitur cosinus arcus AE. Vocantur etiam *Sinus, Tangentes,* atque *Secantes complementi.*

THEOREMA I.

12. *Sinus arcuum similium ad radios suos eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Chordæ enim arcuum similium ad radios eandem rationem habent (§. 290 *Geom.*). Sed sinus sunt chordarum dimidia (§. 2). Ergo & hi ad radios rationem eandem habent (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

HYPOTHESIS.

13. *Sumatur radius pro unitate; & per ejus fractiones decimales determinetur quantitas sinuum, tangentium, atque secantium.*

SCHOLION.

14. *Ex* PTOLEMÆI Almagesto *discimus, Veteres radium in 60 partes, quas gradus vocabant, divisisse, & inde chordas per minuta prima, secunda, tertia &c. hoc est, fractiones radii sexagesimales determinasse, quibus in analysi triangulorum utebantur. Dimidiis chordis seu sinibus primum usi sunt, quantum constat,* Saraceni. Johannes REGIOMONTANUS *primum radio cum Veteribus tribuit 60 gradus, & sinus singulorum graduum per ejus fractiones decimales determinavit. Enimvero postea animadvertit, commodius fore, si radius sumatur pro unitate ac ideo hypothesin præsentem in Trigonometriam introduxit. In Tabulis sinuum & tangentium ordinariis radius concipitur in 10000000 partes divisus, & ultra has fractiones in determinanda sinuum & tangentium quantitate non descenditur. Qui tamen Tabulas istas construxerunt, ad fractiones multo minores descenderunt, ne error irreperet in scrupulis primis assignabilis. Secantibus hodie opus non habemus, cum omnia Trigonometriæ Problemata absque illarum ope solvi possint.*

COROLLARIUM.

15. Cum latus Hexagoni regularis sextam circuli partem subtendat (§. 104, 342 *Geom.*) atque radio æquale sit (§. 356 *Geom.*); sinus graduum triginta est 5000000 (§. 2 *Trigon.* & §. 41 *Geom.*).

PROBLEMA I.

16. *Dato sinu* AD; *invenire cosinum* AG. Tab. I. Fig. 2.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam EC sinus ipsius EH (§. 2) ad HC, & AG sinus arcus AH (§. 2) perpendicularis ad eandem HC (§. 3); erit AG parallela ipsi DC (§. 256 *Geom.*) & ad G angulus rectus (§. 78 *Geom.*), adeoque $\triangle$ AGC rectangulum (§. 91 *Geom.*). Quare cum AD & HC sint ad EC perpendiculares (§. 3); erit GC = AD (§. 226 *Geom.*). Si ergo

1. Ex quadrato radii AC subtrahatur quadratum sinus AD vel GC; relinquetur quadratum cosinus AG (§. 417 *Geom.*). Unde si
2. Radix quadrata extrahatur (§. 269 *Arithm.*); prodibit cosinus AG.

Ex. gr. Sit AC 10000000, AD 5000000: reperitur AG 8660254, sinus 60°.

PRO-

PROBLEMA II.

17. *Dato ſinu* AD *arcus* AE; *invenire ſinum arcus dimidii* $\frac{1}{2}$ AE.

RESOLUTIO.

Inveniatur chorda arcus AE (§.423 *Geom.*). Hujus enim dimidium eſt ejus ſinus (§. 2).

Ex. gr. Sint AC & AD ut in Probl. præc. reperietur ſinus arcus $\frac{1}{2}$ AE, ſeu ſinus $15° = 2588190$.

PROBLEMA III.

18. *Dato ſinu* DG *arcus* DF; *invenire ſinum* DE *arcus dupli* DB.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad E & G recti ſint (§. 3) & angulus B utrique triangulo BCG & BDE communis; erit BC : CG = BD : DE (§. 267 *Geom.*). Quare cum CG inveniri poſſit, dato ſinu DG (§. 16), & BD ſit duplum ipſius DG (§. 2): invenietur quoque DE (§.302 *Arithm.*). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA IV.

19. *Datis ſinibus* FG & DE *arcuum* FA & DA, *quorum differentia* DF 45′ *major non eſt; invenire ſinum quemcunque intermedium* IL.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad differentiam FD arcuum quorum ſinus dantur, differentiam IF arcus AI cujus ſinus quæritur atque arcus AF ſinui dato minori reſpondentis, & differentiam ſinuum datorum DH quartus numerus proportionalis (§.302 *Arithm.*).
2. Is addatur ſinui dato minori FG. Erit aggregatum ſinus quæſitus IL.

DEMONSTRATIO.

Cum arcus DF & FI paucorum ſint minutorum, *per hypoth.* pro lineis rectis citra errorem ſenſibilem haberi poterunt. Porro FG, IL & DE parallelæ ſunt (§. 3). Quare ſi ex F ad DE perpendicularis demittatur FH (§. 216 *Geom.*); erit HE = FG (§.226 *Geom.*); adeoque DH differentia ſinuum datorum FG & DE (§. 64 *Arithm.*) Unde ob parallelas IK & DH, *per demonſtrata*; FD : FI = DH : IK (§. 268 *Geom.*). *Q. e. d.*

Tab. [illegible] Fig. 4.

PROBLEMA V.

20. *Datis ſinibus* BD & FE *duorum arcuum quorumcunque* AB & A[illegible] *invenire ſinum arcu*[illegible] *eorundem* $\frac{1}{2}$ BF.

Tab. [illegible] Fig. 5.

RESOLUTIO.

1. Sinus minor BD ſubtrahatur a majore FE, relinquetur differentia FK.
2. Ex datis ſinibus BD & FE inveniantur coſinus BI & FH (§. 16).
3. Coſinus minor FH ſubtrahatur e majore BI, erit BK differentia.
4. Ex ſumma quadratorum differentiarum BK & FK extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arithm.*); prodibit chorda arcus differentiæ BF, cujus dimidium eſt ſinus quæſitus (§. 2). *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

BD, FE & GC, tum AC, BI & FH inter ſe parallelæ, & illæ ad AC, hæ ad GC perpendiculares (§. 3), conſequenter FH = KI & BD = EK (§. 226 *Geom.*) & angulus BKF rectus (§.230, 78 *Geom.*) Quamobrem FK differentia ſinuum

Tab.I. ſinuum BD & FE, BK vero differen-
Fig.5. tia coſinuum FH & BI, atque FKB triangulum rectangulum (§.91 *Geom.*). Ergo cum ſit $BF^2 = BK^2 + FK^2$ (§.417 *Geom.*); reperietur chorda BF, ſi ex ſumma quadratorum differentiæ ſinuum FK & coſinuum BK radix quadrata extrahitur (§.246 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA VI.

21. *Invenire ſinum* 45 *graduum.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Tab.I. Sit HI circuli quadrans; erit HCI
Fig.2. angulus rectus (§.143 *Geom.*), adeoque △ cognomine rectangulum (§.91 *Geom.*), conſequenter $HI^2 = HC^2 + CI^2$ (§.417 *Geom.*) $= 2\,HC^2$ (§.40, 37 *Geom.*). Quare cum HC ſinus totus (§.2) ſit 10000000 (§.14); ſi ex $2HC^2$ quadrato 200000000000000 extrahatur radix 14142136 (§.269 *Arithm.*); prodibit chorda HI (§.246 *Arithm.*), cujus dimidium 7071068 ſinus 45° deſideratus. *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

22. *Inferius in Analyſi docebimus, quomodo ex dato radio latus Pentagoni regularis, hoc eſt, chorda* 72° (§.342 Geom.), *conſequenter ſinus* 36° (§.2) *inveniatur.*

PROBLEMA VII.

Tab.I. 23. *Dato ſinu unius minuti ſeu* 60″
Fig.4. FG; *invenire ſinum unius vel aliquot ſecundorum* MN.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AM & AF ſunt admodum exigui, AMF pro linea recta haberi poteſt citra errorem in fractionibus radii decimalibus, quibus ſinus exprimimus, aſſignabilem, hoc eſt, arcus AM & AF ſinibus eorum proportionales numere licet. Quare cum MN ſit ipſi FG parallela (§.3) erit AF : FG = AM : MN (§.268 *Geom.*). Datis ergo AF, FG & AM, *per hypoth.* invenitur MN (§.302 *Arithm.*). *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

24. *Eadem ratione, ſi opus foret, inveniri poſſet ſinus aliquot ſcrupulorum tertiorum.*

PROBLEMA VIII.

25. *Datis ſinibus* 30 (§.15), 15 (§.17), 45 (§.21) & 36 *graduum* (§.22); *Canonem omnium Sinuum conſtruere, nonniſi unico minuto, aut denis ſecundis, immo unico ſecundo inter ſe differentibus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex ſinu 36 graduum inveniatur ſinus 18°, 9°, 4° 30′, 2° 15′ (§.17); ſinus 54°, 72°, 81°, 85° 30′, 87° 45′ (§.16): porro ſinus 27°, 13° 30′, 6° 45′; 40° 30′, 20° 15′; 42° 45′ (§.17): inde ſinus 63°, 76° 30′, 83° 15′, 49° 30′, 69° 45′, 47° 15′ (§.16): ulterius ſinus 31° 30′, 15° 45′; 38° 15′; 24° 45′ (§.17): hinc ſinus 58° 30′, 74° 15′, 51° 45′, 65° 15′; (§.16): denique ſinus 29° 15′ (§.17) & ejus coſinus 60° 45′ (§.16).
2. Ex ſinu 45° inveniantur ſinus 22° 30′ & 11° 15′ (§.17), ſinus 67° 30′ & 78° 45′ (§.16), ſinus denique 33° 45′ (§.17) & 56° 15′ (§.16).
3. Ex ſinu 30° & ſinu 54° inveniatur ſinus 12° (§.20).
4. Ex ſinu 12° inveniantur ſinus 6°, 3°, 1° 30′, 45′ (§.17), ſinus 78°, 84°, 87°, 88° 30′, 89° 15′ (§.16)

por-

porro sinus 39°, 19° 30′, 9° 45′; 42°, 21°, 10° 30′, 5° 15′; 43° 30′, 21° 45′; 44° 15′ (§. 17): ulterius sinus 51°, 70° 30′, 80° 15′, 48°, 69°, 79° 30′, 84° 45′, 46° 30′, 68° 15′, 45° 45′, (§. 16): inde sinus 25° 30′, 12° 45; 35° 15′; 24°; 34° 30′, 17° 15′; 39° 45′; 23° 15′ (§. 17): hinc sinus 64° 30′, 77° 15′, 54° 45′, 66°, 55° 30′, 72° 45′, 50° 15′, 66° 45′ (§. 16): hinc porro sinus 32° 15′; 33°, 16° 30′, 8° 15′; 27° 45′ (§. 17): inde ulterius sinus 57° 45′, 57°, 73° 30′, 81° 45′, 62° 15′ (§. 16): porro sinus 28° 30′, 14° 15′; 36° 45′ (§. 17) & horum cosinus 61° 30′, 75° 45′, 53° 45′ (§. 16): denique sinus 30° 45′ (§. 17) & ejus cosinus 59° 15′ (§. 16).

5. Ex sinu 15° inveniantur sinus 7° 30′ & 3° 45′ (§. 17): hinc sinus 75°, 82° 30′, 86° 15′ (§. 16): inde 37° 30′, 18° 45′, 41° 15′ (§. 17) & horum cosinus 52° 30′, 71° 15′, 48° 45′ (§. 16): denique sinus 26° 15′ (§. 17) & ejus cosinus 63° 45′ (§. 16).

6. Quodsi sinus hac ratione inventi in ordinem redigantur, numero 120, & differentiam inter duos immediate sibi mutuo succedentes 45′ deprehendes: quemadmodum ex Tabula, quam eum in finem hic apponimus, primo intuitu apparet.

1	0°45′	21	15°45′	41	30°45′	61	45°45′	81	60°45′	101	75°45′
2	1·30	22	16·30	42	31·30	62	46·30	82	61·30	102	76·30
3	2·15	23	17·15	43	32·15	63	47·15	83	62·15	103	77·15
4	3·0	24	18·0	44	33·0	64	48·0	84	63·0	104	78·0
5	3·45	25	18·45	45	33·45	65	48·45	85	63·45	105	78·45
6	4·30	26	19·30	46	34·30	66	49·30	86	64·30	106	79·30
7	5·15	27	20·15	47	35·15	67	50·15	87	65·15	107	80·15
8	6·0	28	21·0	48	36·0	68	51·0	88	66·0	108	81·0
9	6·45	29	21·45	49	36·45	69	51·45	89	66·45	109	81·45
10	7·30	30	22·30	50	37·30	70	52·30	90	67·30	110	82·30
11	8·15	31	23·15	51	38·15	71	53·15	91	68·15	111	83·15
12	9·0	32	24·0	52	39·0	72	54·0	92	69·0	112	84·0
13	9·45	33	24·45	53	39·45	73	54·45	93	69·45	113	84·45
14	10·30	34	25·30	54	40·30	74	55·30	94	70·30	114	85·30
15	11·15	35	26·15	55	41·15	75	56·15	95	71·15	115	86·15
16	12·0	36	27·0	56	42·0	76	57·0	96	72·0	116	87·0
17	12·45	37	27·45	57	42·45	77	57·45	97	72·45	117	87·45
18	13·30	38	28·30	58	43·30	78	58·30	98	73·30	118	88·30
19	14·15	39	29·15	59	44·15	79	59·15	99	74·15	119	89·15
20	15·0	40	30·0	60	45·0	80	60·0	100	75·0	120	90·0

Inveniantur ergo sinus intermedii per Probl. 4. (§.19).

7. Denique sinus scrupulorum secundorum ab 1 usque ad 60 inveniantur per Probl. præc. (§.23).

Ita Canon sinuum erit constructus. *Q. e. f.*

PROBLEMA IX.

Tab.I. Fig.2. 26. *Dato sinu* AD *arcus* AE, *invenire tangentem* EF *& secantem* FC *ejusdem arcus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quia sinus AD & tangens EF ad radium EC perpendicularis (§.3,8); erit ille huic parallelus (§. 256 *Geom.*). [illegible] ut cosinus DC ad sinum AD, ita sinus totus ad tangentem EF: item ut cosinus DC ad sinum totum AC, ita sinus totus EC ad secantem CF (§.268 *Geom.*). Invenietur adeo per illationem primam tangens EF; per alteram secans FC (§.302 *Arithm.*) *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

27. *Constructo igitur Canone sinuum* (§.25), *haud difficilis est constructio Canonis tangentium atque secantium. Uterque junctim sumtus Canon triangulorum naturalis dici solet, quia triangulorum analysi inservit. Equidem passim apud Autores Theoremata non inelegantia occurrunt, quibus multi sinus facilius inveniuntur, quam exposita hactenus methodo.* URSINUS (a) *præsertim docet, quomodo ex sinu Canonis omnium primi, e. gr. unius secundi, per solam quasi additionem & subtractionem totus Canon derivetur. Enimvero cum ab aliis dudum constructus sit; sufficit utcunque ostendisse, quomodo construi potuerit.*

(a) *Trigon.* lib. 2. c. 5. p. 164.

PROBLEMA X.

28. *Invenire sinus cujuscunque dati logarithmum.*

RESOLUTIO.

Ut logarithmi eo accuratiores inveniantur, assumendi sunt sinus ad radium 1000000000 constructi. Mulctantur nempe sinus in Canone PITISCI majore 4 ultimis notis. Cum adeo sinus sint numeri 10 ut plurimum notis constantes, in canone autem logarithmorum qui prostat maximo, numeri naturales ultra 5 notas non ascendunt; logarithmi eorum inveniuntur *per Probl.* 37 *Arithm.* (§.349). Utendum vero est Canone logarithmorum majore.

E. gr. Sit inveniendus logarithmus sinus 23°, qui apud PITISCUM 3907311284. Resectis versus sinistram quinque notis 39073, ipsis respondens logarithmus est 4. 5918768, consequenter logarithmus numeri 3907300000 est 9. 5918768. Differentia tabularis est 111. Quare infertur: ut 100000 ad 111 ita notæ residuæ sinus dati 11284 ad numerum quartum proportionalem 12: qui si addatur logarithmo 9. 5918768, prodit logarithmus quæsitus 9. 5918780, qualis in Canone triangulorum artificiali reperitur.

PROBLEMA XI.

29. *Invenire logarithmum tangentis, dato logarithmo sinus & cosinus.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus sinus addatur logarithmo sinus totius.
2. A summa subtrahatur logarithmus cosinus. Residuum est logarithmus tangentis (§. 26 *Trigon.* & §. 359 *Arithm.*).

Ex. gr.

Ex. gr. Inveniri debet logarithmus tangentis 23°.

Addantur	Log. ſin. 23° =	9.5918780
	Log. ſin. tot. =	1 00000000
	a ſumma =	195918780
ſubtrahatur	Log. coſ. =	99640261
relinquitur	Log. tang. =	96278519

PROBLEMA XII.

30. *Invenire logarithmum ſecantis arcus cujuſcunque; dato ſinu complementi ejuſdem.*

1. Logarithmus ſinus totius multiplicetur per 2.
2. Ab ejus duplo ſubtrahatur ſinus complementi datus. Reſiduus fiet logarithmus ſecantis (§. 26 *Trigon.* & 359 *Arithm.*).

Ex. gr. Quærendus eſt logarithmus ſecantis arcum 23°. Calculi typus talis eſt:

Log. ſin. tot. =	100000000
Ejus duplum =	200000000
Log. ſin. compl. =	99640261
Log. ſecant. 23° =	10.0359739

SCHOLION.

31. Johannes NEPERUS, *qui primus logarithmos in Trigonometriam introduxit, ſinus totius logarithmum facit* 0. *Hinc creſcunt logarithmi ſinuum, ſinibus decreſcentibus, & tangentium atque ſecantium ſinu toto majorum logarithmi ſunt defectivi, ſeu nihilo mi-res.* NEPERUS *logarithmos coſinuum* Antilogarithmos, *logarithmos vero tangentium* differentiales, KEPLERUS *etiam* Meſologarithmos *vocat. Dicuntur quoque hi lo-rithmi* Sinus & tanger[illegible]

CAPUT II.

De Analyſi Triangulorum.

THEOREMA II.

32. *Tangens* 45° EF *æquatur radio* EC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AE 45°. *per hypoth.* erit quoque angulus ACE 45° (§. 59 *Geom.*); conſequenter angulus F 45° (§. 241 *Geom.*). Quare EF = CE (§. 253 *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA III.

33. *In omni triangulo* ABC *latera ſunt ut ſinus oppoſitorum angulorum.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim omne triangulum circulo inſcriptibile ſit (§. 297 *Geom.*); Tab. I. Fig. 1. erunt latera AC, CB & AB chordæ arcuum cognominum (§. 38 *Geom.*); conſequenter latera dimidia ſinus arcuum dimidiorum (§. 2). Sed arcus dimidii ſunt menſuræ angulorum oppoſitorum B, A & C (§. 314 *Geom.*). Ergo ut latus AC ad ſinum anguli ſibi oppoſiti B; ita latus BC ad ſinum anguli ſibi oppoſiti A, ita etiam AB ad ſinum anguli ſibi oppoſiti C. *Q. e. d.*

SCHOLION.

34. *Ut vero evidentius appareat, in triangulo obtusangulo pro sinu anguli obtusi utendum esse sinu anguli acuti, qui eidem deinceps ponitur, & quem esse etiam sinum anguli obtusi supra annotavimus (§. 6), sequens addere lubet theorema.*

THEOREMA IV.

Tab.I. Fig.8. 35. *In triangulo obtusangulo* AGC *est ut latus angulo obtuso* G *oppositum* AC *ad sinum anguli acuti* AGE *eidem deinceps positi, ita latus angulo obtuso adjacens* GA *ad sinum anguli eidem oppositi* C.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex A in basin continuatam GC perpendicularis AE; erunt A..E & AEC triangula rectangula (§.78, 91 *Geom.*). Cum itaque sit ut sinus totus ad AC ita sinus anguli C ad AE & ut AG ad sinum totum ita AE ad sinum anguli AGE (§. 33); erit etiam ut AG ad AC ita sinus anguli C ad sinum anguli AGE (§. 201 *Arithm.*); consequenter latus angulo obtuso adjacens GA est ad sinum anguli eidem oppositi C, sicuti latus angulo obtuso oppositum AC ad sinum anguli acuti eidem deinceps positi AGE (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XIII.

Tab.I. Fig.1. 36. *Datis duobus angulis* A & C, *una cum latere uni eorum* C *opposito* AB; *invenire latus alteri* A *oppositum* BC.

RESOLUTIO.

Inferatur (§. 33):
ut sinus anguli C
ad latus sibi oppositum datum AB;
Ita sinus anguli alterius A
ad latus quaesitum BC.

Invenietur adeo Logarithmorum ope BC, *per Probl.* 42 *Arithm.* (§. 359).

Ex. gr. Sit C = 48° 35′, A = 57° 28′, AB = 74′. Calculus talis erit:

Log. sin. C	9.8750142
Log. AB	1.8692317
Log. sin. A	9.9258681
Sum. log. AB & sin. A	11.7950998
Log. BC	1.9200856

cui in Canone logarithmorum pro numeris vulgaribus respondent 83′. Cum vero logarithmus in Tabulis non exactus reperiatur; inveniri possunt numeri inventi 83′ fractiones decimales, hoc est, in casu nostro digiti, si sub characteristica 2 post 830″ denuo logarithmus ipsius BC evolvatur: cui proxime respondet numerus 831″. Quodsi præter digitos etiam lineas desideres; eundem logarithmum quære post 8310‴, & ei quam proxime respondere deprehendes 8319‴. Immo si Canon major ad manus sit, ipsa scrupula quarta expiscari licet, si logarithmus inventus post 83190⁗ evolvatur: ubi eidem quam proxime respondet logarithmus numeri 83192. Est ergo BC 8° 3′ 1″ 9‴ 2⁗ (*§.355 Arithm.*).

SCHOLION.

37. *Quid factu opus sit, si logarithmi characteristica fuerit 3, in Arithmetica loco citato docuimus.*

PROBLEMA XIV.

38. *Datis duobus lateribus* AB & BC, *una cum angulo* C *uni eorum opposito; invenire angulos reliquos* A & B.

RESOLUTIO.

I. Inferatur (§. 33):
ut latus unum AB
ad sinum anguli dati sibi oppositi C;

Ita

Ita latus alterum BC
ad ſinum anguli quæſiti ſibi oppoſiti A.

Invenietur adeo logarithmus ſinus anguli A utendo logarithmis *per Probl.* 42 *Arithm.* (§. 359.)

II. Quodſi latus AG vel AB dato angulo C oppoſitum fuerit minus latere AC, quod opponitur angulo quæſito, quæſitus angulus & obtuſus eſſe poteſt G, & acutus B (§.234 *Geom.*); adeoque conſtare debet, utrum triangulum datum ſit obtuſangulum, an acutangulum. In caſu poſteriori ſatisfacit numerus graduum, qui ſinui reperto reſpondet; in priori pro angulo obtuſo ſumitur ejus complementum ad 180° (§.35).

III. Quodſi angulus datus G in triangulo GAC fuerit obtuſus, & datis præterea cruribus AG & AC quæratur acutus, in ſolutione pro ſinu obtuſi anguli AGC ſumitur deinceps poſiti acuti AGE ſinus (§.35).

Tab.I. Ex. gr. Sit AB = 94′, BC = 69′, C = 72° 15′.

Log. AB	1. 9731279
Log. ſin. C	9. 9788175
Log. BC	1. 8388491
Sum. Log. ſin. C & BC	11. 8176666
Log. ſin. A.	9. 8445387,

cui in Canone proxime reſpondent 44° 21′. Quodſi Canon major non fuerit ad manus, & præter ſcrupula prima etiam ſecunda deſiderentur, *vi Probl.* 4 (§. 19) hunc in modum inveniuntur.

Tab.I. Fig.1.

A logarith. invento 98445387 ſubtrahe
Tabul. prox. min. 98445018

& notetur Differ. I. 369
Simil. ex prox. maj. 98446310 ſubduc
prox. min. 98445018

& notetur Diff. II. 1292
Inferatur, 1292 : 60 = 369
2) 646 : 30 30

646) 11070 (17
646
4610
4522
88

Eſt ergo angulus A = 44° 21′ 17″
Sed C = 72 15 0

Quare A + C = 116 36 17
Quon. A + C + B = 17[illegible]

erit B = 63° 23′ 43″

Similiter dentur in triangulo rectangulo, præter rectum A, hypothenuſa BC & cathetus AC pro angulo B. Sit nempe BC 49′ AC 36′. Calculus talis erit: (Tab.I. Fig.6.)

Log. BC	1. 6901961
Log. ſin. tot.	10. 0000000
Log. AC	1. 5563025
Log. ſin. B	9. 8661064,

cui in Canone proxime reſpondent 47° 16′.
Ergo C = 42° 44′ (§. 241 *Geom.*).

Quodſi AG = 349″, AC = 382″, angulus A = 57° 25′; erit (Tab.I. Fig.8.)

Log. AG	2. 5428254
Log. ſin. C	9. 9256261
Log. AC	2. 5820634
Sum. Log. ſin. C & AC	12. 5071689 5
Log. ſin. G	9. 9648641,

cui in Canone proxime reſpondent 67° 15′. Eſt igitur angulus acutus G in triangulo AEG 67° 15′: quem ſi ſubtraxeris ex 180°, relinquetur pro obtuſo AGC 112° 45′.

Tab.I. Fig.8. Detur denique in triangulo obtusangulo AGC angulus obtusus G 165° 17′, una cum cruribus AG= 179″ & AC 223″: Pro acuto C inferatur (§. 35).

Log. AC	2. 3483049
Log. sin. AGE	9. 4049009
Log. AG	2. 2528530
Sum. Log. sin. G & AG	11. 6577539
Log. sin. C	9. 3094490

cui in Canone respondent quam proxime 11° 46′.

LEMMA.

39. *Si a semisumma duarum quantitatum subtrahatur semidifferentia, relinquitur quantitas minor: Si vero illi hæc addatur, prodit major.*

DEMONSTRATIO.

Numerus major componitur ex minore & differentia (§. 64 *Arithm.*): ergo summa ex minore bis sumta & differentia, consequenter semisumma ex minore & semidifferentia. Quare si a semisumma semidifferentia subtrahatur, minor quantitas relinquitur (§. *cit. Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quod si vero semisummæ semidifferentia addatur, aggregatum erit compositum ex quantitate minore & differentia (§. 61 *Arithm.*), adeoque numerus major, *per demonstr. Quod erat alterum.*

PROBLEMA XV.

Tab.I. Fig.6. 40. *Datis duobus lateribus* BA *&* AC, *cum angulo intercepto* A; *invenire angulos reliquos.*

RESOLUTIO.

I. Si triangulum ABC fuerit rectangulum; assumto crure uno circa rectum AB pro radio, erit alterum CA tangens anguli oppositi B (§. 7, 8) Inferatur ergo:

ut crus unum AB
ad alterum AC;
Ita sinus totus
ad tangentem anguli B.

Ex. gr. Sit BA 79′, AC 54′: erit

Log. BA	1. 8976271
Log. AC	1. 7323938
Log. sin. tot.	10. 0000000
Log. tang. B,	9. 8347667, cui in

Canone respondent quam proxime 34° 21′. Ergo angulus C 55° 39′ (§. 241 *Geom.*).

II. Si angulus A fuerit obliquus;

1. Inferatur:
ut summa laterum datorum AB & AC
ad differentiam eorundem;
Ita tangens semisummæ angulorum quæsitorum C & B
ad tangentem semidifferentiæ eorundem.

2. Addatur semidifferentia ad semisummam; aggregatum erit angulus major C. Eadem a semisumma subtrahatur, residuus fiet angulus minor B.

Ex. gr. Sit AB 75′, AC 58′, A 108° 24′, erit

AB 75	AB 75	A + B + C 179° 60′
AC 58	AC 58	A 108 24
Sum. 133	Diff. 17	B + C 71 36
		½(B + C) 35 48

Log. (AB + AC) - - -	2. 1238516
Log. (AB − AC) - - -	1. 2304489
Log. tang. ½ (B + C)	9. 8580694
Summa Logg.	11. 0885183

Log. Tang. ½ (C − B), 8. 9646667, cui in Tabulis proxime respondent 5° 16′.

½ (B + C) = 35° 48′	½ (B + C) = 35° 48′
½ (C − B) = 5 16	½ (C − B) = 5 16
C = 41° 4′	B = 30° 32

DE-

DEMONSTRATIO.

Crure majore dato AB, ex vertice anguli dati A defcribatur circulus (§. 131 *Geom.*), & crus minus AC utrinque continuetur (§. 21 *Geom.*), donec circulo in E & D occurrat. Erit, ob AE = AB = AD (§. 40 *Geom.*), CE fumma laterum datorum, CD differentia eorundem. Quoniam DE diameter (§. 39 *Geom.*); erit EBD femicirculus (§. 135 *Geom.*); confequenter angulus EBD rectus (§. 317 *Geom.*), adeoque EB ad BD perpendicularis (§. 78 *Geom.*). Quare fi BD fumatur pro finu toto; erit EB tangens anguli EDB (§. 7, 8). Eft vero $o = x + y$ (§. 239 *Geom.*), & inde ob $u = \frac{1}{2}o$ (§. 313 *Geom.*), $u = \frac{1}{2}(x + y)$. Ergo EB tangens femifummæ angulorum quæfitorum x & y. Quoniam $x = u + n$ (§. 239 *Geom.*); erit n femidifferentia angulorum x & y (§. 39). Sumto itaque DB denuo pro radio, fi defcribatur arcus DG (§. 131 *Geom.*) & in D excitetur perpendicularis DF (§. 249 *Geom.*); erit DF tangens anguli n (§. 7, 8), hoc eft, femidifferentiæ angulorum quæfitorum x & y, *per demonftr.* Jam cum anguli EBD & FDB fint recti, *per demonftr.* & hinc FD & EB parallelæ (§. 256 *Geom.*), adeoque BED & FDE æquales (§. 233 *Geom.*), item verticales ad C æquales (§. 156 *Geom.*): erit CE : EB = CD : DF (§. 267 *Geom.*), confequenter & CE : CD = EB : DF (§. 173 *Arithm.*). Data itaque per tangentem DF angulorum quæfitorum femidifferentia, reliqua in refolutione manifefta funt, per Lemma præcedens (§. 39). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVI.

41. *Datis tribus lateribus* AB, BC, *&* CA; *invenire angulos* A, B *&* C. Tab. Fig. 8.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex vertice anguli A, latere minimo AB, defcribatur circulus (§. 131 *Geom.*); erit ob AD = AB (§. 40 *Geom.*) CD fumma crurum AC & AB; CF vero differentia eorundem. Et ideo inferre licet (§. 333 *Geom.*);
 ut bafis BC
 ad fummam crurum CD;
 Ita differentia crurum CF
 ad fegmentum bafis CG.
2. Inventum adeo fegmentum CG (§. 302 *Arithm.*) fi fubtrahatur a bafi CB; relinquitur chorda GB.
3. Demittatur ex A perpendicularis AE ad chordam GB (§. 216 *Geom.*), erit BE = EG = $\frac{1}{2}$GB (§. 291 *Geom.*). Datis adeo, in triangulo rectangulo AEB, lateribus AB & BE, & in altero ACE lateribus AC & CE; inveniuntur anguli B atque A (§. 38). *Q. e. f. & d.*

E. gr. Sit AB = 36', AB = 45', BC = 40':

erit AC = 45'	AC = 45'
AB = 36	AB = 36
AC + AB = 81	FC = 9

Log. BC	= 1.6020600
Log. AC + AB	= 1.9084850
Log. FC	= 0.9542425
Logg. fumma	= 2.8627275
Log. CG	= 1.2606675

cui

cui in Tabulis quam proxime respondent 18′ 2″ 3‴ (*§. 355 Arithm.*).

BC = 4000‴	EG = 1089‴
CG = 1822	CG = 1822
BG = 2178	CE = 2911
BE = 1089	

Log. AB	= 3.5563025
Log. sin. tot.	= 10.0000000
Log. EB	= 3.0370279
Log. sin. EAB	= 9.4807254,

cui in Tabulis quam proxime responden 17° 36′, adeoque angulus ABE 72° 2 (*§. 241 Geom.*).

Log. AC	= 3.6532125
Log. sin. tot.	= 10.0000000
Log. CE	= 3.4640422
Log. sin. EAC	= 9.8108297, cui i

Tabulis quam proxime respondent 40° 18 Ergo ACE 49° 42′ (§.241 *Geom.*), & CA 57° 54′ (*§. 86 Arithm.*).

CAPUT III.

De usu Trigonometriæ planæ in Geometria practica.

PROBLEMA XVII.

42. *Construere Instrumentum transportatorium rectilineum; hoc est Scalam secundum eam proportionem divisam, quam habent subtensæ arcuum ad radium.*

RESOLUTIO.

1. Ex communi Canone sinuum excerpantur sinus arcuum 2° 30′, 5°, 7° 30′, 10°, 12° 30′ &c. nempe in progressione arithmetica progredientium, in qua terminorum differentia est $2\frac{1}{2}$ gr. Eos multiplica per 2; erunt facta chordæ arcuum 5, 10, 15, 20, 25 &c. (§. 2): ut hic in Tabella factum vides.

Gr.	Chor. dimid.	Chor. integ.	Gr.	Chor. dimid.	Chor. integ.
5	43.6	87	50	422.6	845
10	87.1	174	55	461.7	923
15	130.5	261	60	500.0	1000
20	173.6	347	65	537.2	1074
25	216.4	433	70	573.5	1147
30	258.8	517	75	608.7	1217
35	300.7	601	80	642.7	1285
40	342.0	684	85	675.5	1351
45	382.6	765	90	707.1	1414

2. Ducatur recta AD & ad eam erigatur perpendicularis AB (§. 249 *Geom.*) pro arbitrio in quinque, decem, viginti, &c. partes æquales dividenda, prout vel solos gradus, vel gradus dimidios, vel par-

partes quartas &c. indicare debent ſubtenſæ.

3. Per ſingula diviſionum puncta agantur rectæ ipſi AD parallelæ (§.258 *Geom.*).

4. In lineam AD, incipiendo ſemper a puncto A, transfer particulas chordarum integrarum gradibus 5°, 15°, 25°, 35°, &c. reſpondentes ex Scala geometrica in particulas minutiſſimas diviſa (§. 277 *Geom.*): in linea vero ſuperiori BC eodem modo deſignentur particulæ chordarum reſpondentes gradibus 10, 20, 30, 40, 50 &c. Quodſi Scala geometrica non continet particulas adeo minutas, quales deſiderantur; utendum eſt chordis dimidiis: quod perinde ac ſi particulæ in Scala bifariam dividerentur. Negligenda autem eſt nota puncto a reliquis ſeparata, vel ſi major fuerit, ejus loco addenda eſt unitas ultimæ earum, quæ retinentur; ex. gr. loco 258. 8 aſſume 259. Ultimas nimirum notas ideo adjecimus, ut appareret, quomodo earum dupla pro chordis computata fuerint.

5 Ducantur transverſæ ex B in 5, ex 5 in 10, ex 10 in 15, ex 15 in 20, ex 20 in 25, &c.

Cum enim A 5, B 10 &c. ſint chordæ 5, 10 &c. graduum, & chordæ a quinis ad quinos gradus fere arcubus proportionaliter creſcant; erit *c* 1 ſubtenſa arcus 1°, *d*2 ſubtenſa 2 &c. graduum (§. 268 *Geom.*).

COROLLARIUM I.

43. Quia ſubtenſa 60° eſt radius (§. 356 *Geom.*); anguli quantitatem inveſtigaturus intervallo B 60 deſcribat ex vertice anguli intra crura ejus arcum, qui eſt menſura ipſius (§. 57 *Geom.*), & [...] chordam ad Scalam applicet, quæ, ſi ex. gr. ex *d* in 42 pertingat, oſtendit angulum eſſe 42°. Tab.I. *Fig.* 9.

COROLLARIUM II.

44. Angulus datæ quantitatis conſtruetur, ſi radio B60 deſcribatur, ex centro B, arcus CF, & ſubtenſa gradus dati, ex. gr. 23, in Scala reperta transferatur ex C in D. Erit enim DC menſura anguli B (§. 57 *Geom.*); adeoque tot graduum, quot arcus continet (§. 59 *Geom.*). Tab.I. *Fig.* 10.

SCHOLION.

45. *Hujus Inſtrumenti beneficio quantitatem angulorum etiam in ſcrupulis ſatis accurate explorari experientia loquitur.*

PROBLEMA XVIII.

46. *Circulo Polygonum regulare inſcribere & circumſcribere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Aſſumto radio 10000 partium, quales in Canone triangulorum habere ſupponitur, inde excerpatur ſinus ejus arcus, qui prodit peripheria integra 360° per duplum numerum laterum polygoni, aut (quod perinde eſt) ſemiperipheria, hoc eſt 180°, per numerum laterum polygoni diviſa. Illius enim duplum eſt chorda arcus dupli (§. 2), adeoque latus AB polygoni circulo inſcribendi (§. 342 *Geom.*). Tab.I. *Fig.* 11.

2. Quodſi radius circuli, cui ex. gr. pentagonum inſcribendum, detur juxta certam aliquam menſuram, ex. gr. 345''; latus polygoni in eadem men-

menfura invenitur per regulam trium (§. 302 *Arithm.*), inferendo nempe

10000 — 1176 — 3450'''

```
      3450
   -------
     58800
     4704
    3528
   -------------
   4057|200 (4° 0' 5'' 7''' lat.
   1   ø|000    Pentag.
```

3. Dato radio, defcribatur circulus, & in eo applicetur latus polygoni, quoties fieri poteft (§. 342 *Geom.*).
4. Polygono regulari circulo infcripto fimile circumfcribetur (§. 355 *Geom.*).

SCHOLION.

47. *Ne moleſta ſit rationis lateris Polygoni ad radium ex Canone ſinuum inveſtigatio, in Tabula hic exhibemus latera Polygonorum iſtiusmodi particulis expreſſa, qualium radius habet* 10000000. *In praxi tot notæ verſus dextram reſecantur, quot per circumſtantias ſingulares ſuperfluæ judicabuntur.*

Num. Later.	Quantitas Lateris	Num. Later.	Quantitas Lateris
III	17320508	VIII	7653668
IV	14142135	IX	6840402
V	11755705	X	6180339
VI	10000000	XI	5634651
VII	8677674	XII	5176380

PROBLEMA XIX.

Tab. I. Fig. 11. 48. *Super data recta* AB *Polygonum regulare deſcribere: & dato Polygono regulari* ABCDE *Circulum circumſcribere.*

RESOLUTIO.

Non alia re opus eft, quam ut ratione lateris ad radium ex Tabula præcedente affumta quæratur radius in ea menfura, in qua datur latus AB (§. 302 *Arithm.*): dato enim latere AB & radio AL, Polygonum defcribi poteft (§. 342 *Geom.*). Si vero intervallo radii, ex A & B fuper latere Polygoni uno fiat interfectio in L; habebitur centrum L circumfcribendi circuli (§. 37 *Geom.*).

PROBLEMA XX.

49. *Datis ſinu verſo* AB *& ſinu* BC, *in menſura communi, non in particulis radii decimalibus; invenire arcum* FAC *in gradibus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Quæratur ex his datis femidiameter AD (§. 328 *Geom.*).
2. Datis jam in triangulo DBC, præter rectum B (§. 3), lateribus BC & DC; invenitur angulus ADC (§. 38): qui indicat numerum graduum in arcu AC (§. 59 *Geom.*), cujus duplus eft arcus FC (§. 291 *Geom.*). *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

50. *Hujus Problematis uſus eſt in inveniendo ſegmento circuli* (§. 436 Geom.).

PROBLEMA XXI.

51. *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus* AB, BC, CD, DE, EA, *& angulis* o *&* y; *invenire diagonales.*

RESOLUTIO.

1. In △ ABE, datis duobus lateribus AB & AE, una cum angulo *o*; invenitur primum angulus A (§. 38); dein diagonalis BE (§. 36).

2. Eo-

2. Eodem modo resoluto triangulo BCD invenitur diagonalis BD. *Q. e. f.*

Tab.I. Fig.13.

PROBLEMA XXII.

52. *Datis in figura rectilinea quacunque duobus lateribus* AB *&* BC, *una cum diagonalibus* BE *&* BD, *atque angulis* o, x *&* y; *invenire latera reliqua* CD, DE *&* EA.

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABE duobus lateribus AB & BE, cum angulo intercepto o, invenitur primum angulus u (§. 40), & deinde porro AE (§. 36).
2. Eodem prorsus modo in triangulis reliquis BED & BCD investigantur latera ED & DC. *Q. e. f.*

PROBLEMA XXIII.

53. *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus* AB, BC, CD, DE, EA, *& tot angulis quot sunt latera demtis tribus*, C *&* D; *invenire diagonales* BD *&* BE.

RESOLUTIO.

1. In triangulo BCD, datis lateribus BC & CD, cum angulo intercepto C, investigetur angulus m (§. 40), quo ex angulo D subducto relinquitur angulus n, atque porro diagonalis BD (§. 36).
2. Datis jam in triangulo BDE lateribus BD & DE, cum angulo intercepto n; eodem prorsus, quo ante, modo reperitur diagonalis BE. *Q. e. f.*

PROBLEMA XXIV.

54. *Datis in figura rectilinea quacunque latere* AB, *una cum angulis* o, x, y, e, u *&* n; *invenire diagonales* AC, AD, BD *&* BE, *una cum lateribus* BC *&* AE. Tab.II. Fig.22.

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABC angulis o & B $(=e+u+n)$, una cum latere AB, inveniuntur latus BC & diagonalis AC (§. 36).
2. Similiter datis in triangulo ABD angulis $o+x$ & $e+u$, una cum latere AB, inveniuntur diagonales BD & AD (§. *cit.*).
3. Denique datis in triangulo ABE angulis A $(=o+x+y)$ & e, una cum latere AB, inveniuntur latus AE & diagonalis BE. *Q. e. f.*

SCHOLION.

55. *Cum Ichnographiæ arearum optime perficiantur, datis omnibus lateribus itemque diagonalibus* (§. 363 Geom.); *horum Problematum in Planimetria usus est non contemnendus. Qui tamen praxi operam dant molestias calculi fugiunt; lucro magis quam accurationi intenti.*

PROBLEMA XXV.

56. *Metiri distantiam duorum locorum* BC, *ex eodem tertio* A *accesso-rum.* Tab.I. Fig.14.

RESOLUTIO.

1. Investigetur quantitas anguli A, puncto A ad arbitrium assumpto (§. 152 *Geom.*), nec non rectarum AB & AC (§. 126 *Geom.*).
2. Datis in $\triangle$ BAC duobus lateribus AB & AC, cum angulo intercepto A, inveniatur primum angulus B (§. 40), & hinc porro distantia BC (§. 36). *Q. e. f.*

SCHOLION.

Tab.I. Fig. 14. 57. *Exempla non addimus, cum Problemata, quibus triangula in hac Trigonometriæ applicatione ſolvuntur, jam in ſuperioribus fuerint exemplis illuſtrata. Ut tamen de commoda ſtationis electione A judicari poſſit, quædam adhuc addenda ſunt. Nimirum lineas AB & AC, quæ ſunt latera trianguli reſolvendi BAC ſatis accurate in campo metiri licet (§.126* Geom.)*: ſed in metiendo angulo facile aliquot ſcrupulis primis vel in exceſſu, vel in defectu peccamus: cum tamen hoc angulo erroneo in calculo utamur tanquam vero, fieri omnino non poteſt quin diſtantia erronea obtineatur. Quamobrem de quantitate erroris admittendi hic nobis diſpiciendum.*

THEOREMA V.

Tab.II. Fig. 58. *Si error aliquot ſcrupulorum in quantitate anguli* A *admittatur, laterum vero* BA & AC *magnitudo fuerit accurata; erit arculi* CD *errorem* CAD *metientis quantitas, ad* DE *differentiam diſtantiæ veræ* BC *ab erronea per calculum producta* BD; *ut ſinus totus, ad ſinum anguli* BCA, *qui lateri* AB *opponitur.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ſi in angulo BAC metiendo peccetur, ut prodeat tantillo major BAD, ob rectarum AC & AD æqualitatem, *per hypoth.* triangulum BAC degenerat in alterum BAD. Deſcribatur ex A, intervallo AC tanquam radio, arcus CD, qui per punctum D, ob AC=AD (§.40 *Geom.*), neceſſario tranſit. Quoniam angulus CAD nonniſi aliquot ſcrupulorum eſt, arcus exiguus CD, qui eum metitur (§.57 *Geom.*), pro recta haberi, &, ſi ejus ad peripheriam detur ratio, in eadem menſura determinari poteſt, in qua datur latus AC (§.435 *Geom.*). Deſcribatur ſimiliter ex centro B, intervallo BC, arcus CE, qui ex eadem ratione pro recta haberi poterit, eritque, ob BC=BE (§.40 *Geom.*), ED differentia inter diſtantiam veram BC & erroneam BD: anguli vero ACD, BCE & CED ſunt recti (§.309 *Geom.*); conſequenter BCE=ACD (§.145 *Geom.*), atque adeo BCA=ECD (§.91 *Arithm.*). Eſt vero ut ſinus totus ad CD, ita ſinus anguli ECD ſive BCA, *per demonſtr.* ad ED (§.33): ergo etiam ut ſinus totus ad ſinum anguli BCA, ita CD ad ED (§.173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

59. Eodem ergo manente errore CD in Angulo A metiendo admiſſo, error in diſtantia admiſſus ED major eſt, ſi angulus BCA major fuerit; minor autem, ſi hic quoque minor fuerit (§.205, 206 *Arith.*).

COROLLARIUM II.

60. Statio itaque in A ea eligenda, quæ acutum valde efficit angulum BCA (§.59): quod obtinetur, ſi angulus A fuerit major recto (§.240 *Geom.*) & latus AC > AB (§.189 *Geom.*).

COROLLARIUM III.

61. Cum angulus BAD major ſit angulo BMD (§.188 *Geom.*); præſtat eligi ſtationem A viciniorem, quam remotiorem (§.59).

SCHOLION.

62. *Supponimus hic parti lateris AB congruere ſemidiametrum Inſtrumenti goniometrici, dum angulum metimur, lateri vero AC reſpondere regulam mobilem (§.152* Geom.*).*

COROLLARIUM IV.

63. Quoniam error ED in diſtantia definienda admiſſus major eſt, ſi quantitas arcus CD major fuerit (§.58), quantitas autem

autem arcus CD major prodeat, eodem errore CAD admisso, latus AC longius, quam si brevius fuerit, ideo hinc quoque patet, stationem viciniorem præstare remotiori.

SCHOLION.

64. *Ceterum hinc apparet, praxes accuratissimas esse, quæ solis lineis in campo mensuratis nituntur, ubi in earum positione ob errorem in angulorum quantitate commissum aberrari nequit. Dedimus hic specimen aliquod eorum, quæ circa praxin Geometriæ accuratam expendi merentur, ut ostenderemus, theoriam accuratam parere praxin accuratam, & ad theoriam perfecte addiscendam excitemus, qui olim praxi operam daturi. Falluntur enim, qui sibi persuadent, per theoriam addisci non posse certas praxium accuratarum circumstantias, tum demum observandas, ubi manum praxi admoveris. Etenim plerumque tantum confuse observantur; per theoriam vero accurate determinantur.*

PROBLEMA XXVI.

65. *Invenire distantiam duorum locorum* AC, *quorum unus* A *tantum accessibilis.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur quantitas angulorum A & B, statione in B electa (§. 152 *Geom.*), itemque rectæ AB (§. 126 *Geom.*).
2. Inveniatur AC (§. 36). *Q. e. f.*

THEOREMA VI.

66. *Si in distantia* AB *ex duobus angulis* A & ACB, *una cum latere* AC, *investiganda, nonnisi in angulo uno* ACB *metiendo aberretur; arcus* BE, *qui errorem in angulo* BCD *admisso metitur, erit ad* BD *differentiam inter distantiam veram* AB & *erroneam* AD, *ut sinus anguli tertii* o *distantiæ stationum* AC *oppositi ad sinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Illud per se patet in hoc casu distantiam erroneam calculo productam AD continuo in directum jacere veræ AB; consequenter latus CD terminans angulum erroneum ACD secare distantiam veram in præsente casu productam in D. Describatur ergo, ex centro C, radio CB, arcus BE, qui est mensura erroris BCD (§. 57 *Geom.*), cumque nonnisi paucorum minutorum sit, *ex hypothesi*, pro recta haberi potest. Quamobrem cum anguli BED & CBE sint recti (§. 309 *Geom.*), erunt anguli o & u (§. 147 *Geom.*), itemque u & x æquales recto (§. 241 *Geom.*); consequenter $o+u=x+u$ (§. 145 *Geom.*), atque adeo $o=x$ (§. 91 *Arithm.*). Est vero ut sinus anguli x (sive o, *per demonstr.*) ad arcum BE; ita sinus totus ad BD (§. 33). Ergo BE est ad BD ut sinus anguli o ad sinum totum (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Tab. II. Fig. 23.

COROLLARIUM I.

67. Cum sinus anguli o majorem habeat ad sinum totum rationem, si major, quam ubi minor fuerit (§. 203 *Arithm.*); eodem errore in metiendo angulo ACB admisso, hoc est, arcu BE existente eodem, minor erit error in distantia determinanda admissus BD, ubi angulus o major, quam ubi minor fuerit (§. 206 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

68. Unde consequitur, talem hoc in casu fieri debere stationum A & C electionem, ut anguli A & C sint admodum obliqui, angulus vero o evadat recto proximus: id quod obtinetur si anguli A & C junctim sumti tantillo excedant rectum (§. 240 *Geom.*).

 COROL-

COROLLARIUM III.

Tab.II. Fig.23. 69. Anguli obtusi eundem sinum habent cum acutis, qui ipsis deinceps ponuntur (§. 5). Quamobrem si recto fuerint multo majores, perinde est in præsenti casu, ac si angulus *o* esset valde acutus. Quodsi autem angulum *o* in electione stationum obtusum desideres, tantillo rectum excedere debet, consequenter anguli A & C simul a recto tantillo deficiant necesse est.

COROLLARIUM IV.

70. Si angulus *o* fuerit rectus, arcus BE cum ipsa BD coincidit, atque adeo errori in distantia admisso æqualis reperitur, ubi in eadem mensura determinatur, in qua datur distantia stationum AC ex radio nempe CB (§. 435 *Geom.*).

COROLLARIUM V.

[redacted] Errore adeo in angulo C existente eodem, qui in distantia admittitur minimus omnium est, ubi angulus *o* fuerit rectus.

THEOREMA VII.

72. *Si in dimetienda distantia locorum* AB, *ex duobus angulis* A *&* C *& uno latere* AC, *error etiam in altero angulo metiendo* A *admittatur, præter eum qui in angulo* C *committitur; erit errorem in angulo* A *commissum metiens arcus* DI, *distantia uno errore implicita* AD *tanquam radio descriptus, ad errorem inde in distantia productum* IH, *ut sinus anguli tertii* o *quantitate erroris primi* m *diminuti ad ejus cosinum.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si AH fuerit recta positione data, in quam ob errorem in angulo A metiendo admissum promovetur distantia AB, recta errorem primum *m* terminans CD continuanda, donec illi in H occurrat, eritque AH distantia ex duplici errore *m* & *k* admisso. Jam, distantia uno errore implicita AD tanquam radio, describatur arcus DI mensura erroris *k* (§.57 *Geom.*); erit is tum ad AD, tum ad AI perpendicularis (§. 308 *Geom.*); consequenter anguli DIH & ADI recti (§.78 *Geom.*), cumque arcus DI sit paucorum minutorum (§. 59 *Geom.*) pro recta haberi potest. Hinc porro ut in Demonstratione præcedente colligitur esse $y = x = o - m$ (§. 239 *Geom.*). Est vero ut sinus anguli *y* ad DI, ita sinus anguli *z* ad IH (§. 33). Ergo DI ad IH ut sinus anguli *y* ad sinum anguli *z* (§.173 *Arithm.*), sive cosinum anguli *y* (§. 241 *Geom.* & §. 11. *Trig.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

73. *Si in dimetiendo angulo peccetur in defectu, error in distantia admissus eodem modo determinatur, nisi quod tum fiat subtractivus, atque adeo unus alterum imminuere, immo prorsus compensare possit, ubi alter additivus, alter subtractivus fuerit. Sed plura non addimus, ob rationem paulo ante dictam.*

PROBLEMA XXVII.

74. *Invenire distantiam duorum locorum inaccessorum* AB.

RESOLUTIO.

1. Statione commoda in C electa investigetur quantitas anguli ACB, itemque angulorum D & E atque BCE (§.152 *Geom.*), punctis D & E cum C in eadem linea designatis (§. 125 *Geom.*).
2. Investigetur etiam quantitas rectarum DC & CE (§.126 *Geom.*).

3. Sum-

3. Summa angulorum ACB & BCE, itemque BCE & E subtrahatur ex 180°, ut relinquantur anguli ACD (§. 148 *Geom.*) & CBE (§. 245 *Geom.*): eodemque modo inveniatur angulus DAC.
4. Datis jam in triangulis DAC & CBE angulis cum latere uno, nempe DC in primo, CE in altero, inveniuntur AC & CB (§. 36), & hinc porro angulus CAB (§. 40), tandemque AB (§. 36).

PROBLEMA XXVIII.

75. *Invenire altitudinem accessibilem* AB.

RESOLUTIO.

1. Statione in E electa, Instrumentoque (§. 284 *Geom.*) rite collocato, investigetur quantitas anguli ADC (§. 152 *Geom.*).
2. Quæratur porro distantia stationis ab altitudine DC (§. 126 *Geom.*), quæ erit ad AC perpendicularis (§. 227 *Geom.*).
3. Cum adeo C sit rectus (§. 78 *Geom.*), in triangulo ACD invenietur AC (§. 36).
4. Huic si addatur BC; prodibit altitudo integra AB. *Q. e. i.*

THEOREMA VIII.

76. *Si in quantitate anguli* A *investiganda aberretur, erit altitudo vera* BD *ad falsam* BC, *ut tangens anguli veri* DAB *ad tangentem anguli erronei* CAB.

DEMONSTRATIO.

Assumto AB pro sinu toto, erit DB tangens anguli DAB; CB autem tangens anguli CAB (§. 7). Sunt itaque altitudines BD & BC ut tangentes angulorum DAB & BAC. *Quod erat unum.*

Eodem modo se habet Demonstratio, si angulus erroneus sit minor vero.

COROLLARIUM I.

77. Quoniam, posita eadem quantitate anguli veri atque erronei, eadem est ratio altitudinis veræ ad erroneam (§. 76); error plurium pedum committitur in altitudine majore quam in minore.

COROLLARIUM II.

78. Quia tangentes arcuum majorum & valde exiguorum, seu recto vel minuto proximorum, minorem rationem inter se habent quam tangentes mediocrium seu semirecto vicinorum, minore nempe ad majorem relata, Canone tangentium [illegible], si idem error committitur in angulo majore aut valde exiguo, & mediocri; error in altitudine admissus major erit in casu priore, quam in posteriore.

SCHOLION.

79. *Sit ex. gr. angulus verus BAD 30°, AB 67′: erit altitudo vera 3° 8′ 6″. Ponamus assumi angulum erroneum BAC 31°: is producet altitudinem erroneam BC 4° 0′ 2″ (§. 36). Sit in distantia minore BE angulus DEB recto proximus 86°, & assumatur per errorem angulus 87°: reperietur altitudo erronea 5° 1′ 6″, quæ erroneam supra inventam excedit 1° 1′ 4″.*

COROLLARIUM III.

80. Quoniam itaque in distantia minore EB angulus E major est quam DAB in majore AB (§. 188 *Geom.*), in distantia autem valde remota difficulter anguli admodum exigui quantitas exacte determinatur: in metiendis altitudinibus distantia stationis ab altitudine assumenda est mediocris, ita ut angulus DEB non multum abeat a semirecto.

THEO-

THEOREMA IX.

Tab.II. Fig.20. 81. *Si Instrumentum in* A *non fuerit horizontaliter collocatum, sed vel quantitate anguli* BAD *versus horizontem inclinatum, vel quantitate anguli* EAB *ab eodem reclinatum; erit altitudo vera ad falsam ut tangens anguli veri* CAB *ad tangentem erronei* CAD *vel* CAE.

DEMONSTRATIO.

Sumto enim AB pro radio, CB est tangens anguli veri CAB (§.7). Inferendum ergo: ut sinus totus ad tangentem CAB, ita AB ad altitudinem veram. Infertur autem per errorem: ut sinus totus ad tangentem CAD, ita AB ad altitudinem erroneam. Quamobrem ut tangens CAB ad tangentem CAD ita altitudo vera ad erroneam (§.196 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

Idem eodem modo ostenditur, si instrumentum quantitate anguli EAB a situ horizontali reclinetur. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

82. *Eadem ergo hic locum habent Corollaria, quæ modo Theorematì præcedenti subjecimus. Cæterum patet altitudines exactas non inveniri ob duplicem errorem, ex vitioso nempe situ tam lineæ AC, quam AB commissum.*

PROBLEMA XXIX.

83. *Metiri altitudinem inaccessam* AB.

RESOLUTIO.

1. Eligantur duæ stationes G & E cum altitudine AB in eadem recta (§. 284 *Geom.*), tanto intervallo DF distantes, ut angulus FAD non sit nimis exiguus, nec altera statio G nimis vicina altitudini AB (§. 78, 80).
2. Investigetur quantitas angulorum ADC, AFC & CFB (§. 152 *Geom.*), itemque distantiæ FD longitudo (§. 126 *Geom.*).
3. Inveniatur primum in triangulo AFD, ex datis angulo D, *per observationem*, & angulo AFD (§.239 *Geom.*) & latere FD, latus AF (§. 36); dein, ex notis in triangulo ACF, præter rectum C, angulo F & latere AF, latus AC, itemque CF (§.36); tandem, ex cognitis in triangulo FCB, præter rectum C, angulo CFB & latere CF, latus CB (§. 36).
4. Addantur AC & CB. Ita prodit altitudo quæsita AB (§.86 *Arithm.*).

Finis Trigonometriæ planæ.

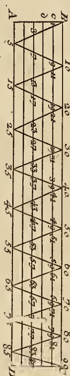



Fig: 9.

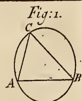


Fig: 1.

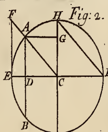


Fig: 2.

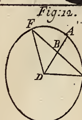


Fig: 12.

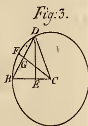


Fig: 3.

Fig: 4.

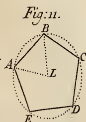


Fig: 11.

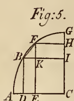


Fig: 5.

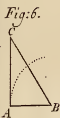


Fig: 6.

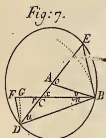


Fig: 7.

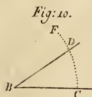


Fig: 10.

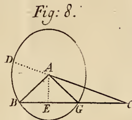


Fig: 8.

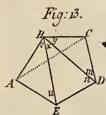


Fig: 13.

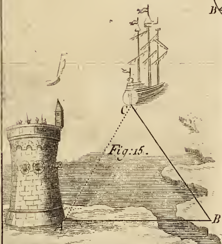


Fig: 15.

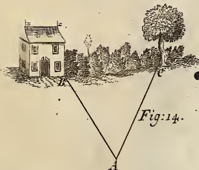
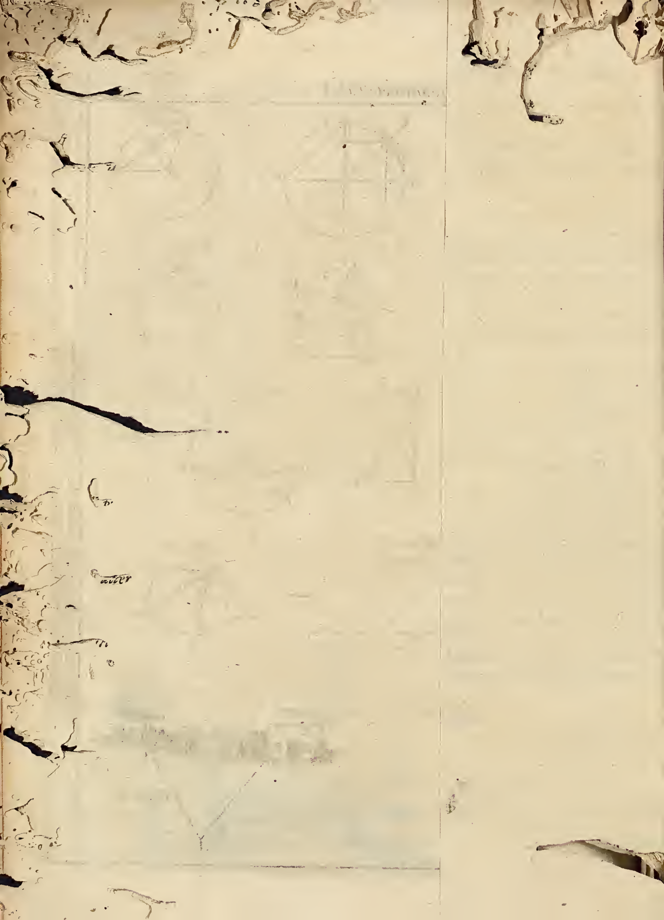


Fig: 14.



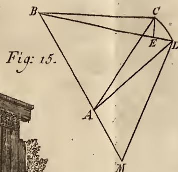


Fig: 15.

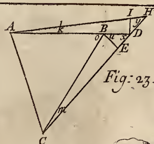
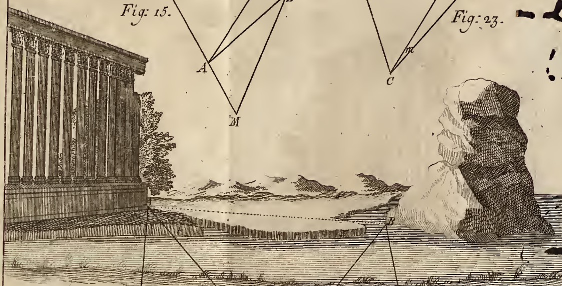


Fig: 23.



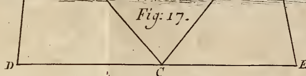


Fig: 17.

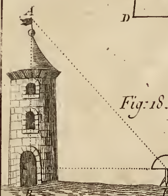


Fig: 18.

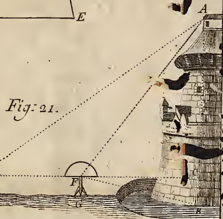


Fig: 21.

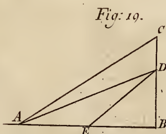


Fig: 19.

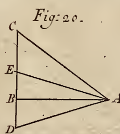


Fig: 20.

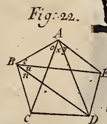


Fig: 22.

ELEMENTA
ANALYSEOS MATHEMATICÆ
TAM FINITORUM QUAM INFINITORUM.

PRÆFATIO.

APICEM totius Eruditionis humanæ conſcendimus Analyſin tradituri: eſt enim Ars, per calculum quantitatum generalem, proprio marte inveniendi veritates in Matheſi non minus pura, quam applicata. Elementis Arithmeticæ communis atque Geometriæ hactenus expoſitis inſtructus, & Analyſi adjutus, multa inveniet, quæ ex aliorum ſcriptis non ſine tædio alias haurire deberet; immo omnibus adhuc ignorata deteget. Ea vero perfectiſſima eſt ſtudiorum noſtrorum ratio, quæ paucis memoriæ mandatis aptos reddit ad inveniendum quodlibet, eo maxime tempore, quo ejus cognitione opus. Nec major intellectus perfectio concipitur promptitudine ex datis quibusdam alia incognita eliciendi. Accedit, in moderna Analyſi, Artis ratiocinandi perfectiſſima occurrere exempla. Notiones enim ſignis expreſſæ imaginationi præſentia ſiſtunt, quæ alias ultra ejus ſphæram aſcenderent: longa ratiociniorum ſeries, quibus non ſine multa attentione ac circumſpectione notionum nexus detegitur, in Artem ſignorum combinatoriam convertitur, conſtanter eandem & principiis paucis ac manifeſtis ſuperſtructam. Illud autem prorſus mirabile exiſtit, ope Analyſeos unica ſæpius linea tot veritates exprimi, quas juxta communem methodum exponendas ac demonſtrandas volumina integra non caperent. Hinc, unius lineæ intuitu, integras fere diſciplinas, paucorum

minutorum ſpatio, addiſcere licet, quibus, juxta communem methodum comprehendendis, anni complures vix ſufficerent. Solidam ergo in Matheſi eruditionem conſecuturus Analyſi ſtudeat opus eſt. Ne autem, non tam difficultate (ea enim revera nulla eſt), quam novitate rei deterritus a præſtantiſſimo ſtudiorum genere arceatur; Arithmeticam ſpecioſam familiarem ſibi reddat, neglectis ſub initium regularum rationibus, ſicubi difficultatem faceſſant, & exemplis numericis in locum earundem ſubſtitutis. Ubi ad exempla algebraïca pervenerit, non inutile judicamus, ut Tyrones data per numeros variis modis explicent, & idem Problema in caſibus ſpecialibus aliquoties ſolvant: ita enim futurum, ut calculo facilius adſueſcant & ejus rationes ſimplices perſpiciant. Neque vero putandum eſt, integram Analyſin jamdum eſſe inventam; quin potius tenendum, plurima adhuc ſubſidia deeſſe poſterorum induſtria detegenda. Certe quæ in Elementis Geometriæ docuimus, per modernam Analyſin non omnia eruuntur, inprimis ſi a linearum & ſuperficierum ſitu pendent. Quamobrem LEIBNITIUS, Vir in omni eruditione ſummus, pro ea, quæ ipſi eſt, ingenii perſpicacitate novam quandam *Analyſin ſitus* excogitavit, peculiari calculi generi (quem *calculum ſitus* appellat) ſuperſtructam, a calculo magnitudinum, quibus in noſtra Analyſi utimur, toto cœlo differentis. Immo, qui hactenus reperta animo comprehenderit & ad ſolvenda Problemata cum cura adhibuerit, pluribus regulis inveniendi artem ipſe locupletabit. Ceterum, quæ vel in Arithmetica, vel in Geometria elementari, ſtudio prætermiſſa, ea per Analyſin eruimus, ex Geometria quoque ſublimiori inveſtigantes, quæ præ reliquis ſcitu neceſſaria.

ELEMEN-

ELEMENTA ANALYSEOS MATHEMATICÆ.

PARS PRIMA,

ELEMENTA ANALYSEOS FINITORUM TRADIT.

SECTIO PRIMA,

DE ARITHMETICA SPECIOSA.

CAPUT PRIMUM.

De Arithmetica Rationalium.

DEFINITIO I.

1. ANALYSIS *mathematica* eſt Methodus reſolvendi Problemata mathematica.

DEFINITIO II.

2. *Arithmetica ſpecioſa* eſt, quæ computum quantitatum ſeu numerorum indeterminatorum docet. Vocatur etiam *Logiſtica ſpecioſa*.

HYPOTHESIS I.

3. *Quantitatum datarum ſigna ſint literæ alphabeti priores*, a, b, c, d &c. *quæſitarum poſtremæ* z, y, x &c. *Quantitates æquales eadem litera indigitentur.*

SCHOLION I.

4. *Nempe cum quantitates datæ ac quæſitæ tanquam diſtinctæ intellectui repræſententur per diverſas notiones; eædem quoque tanquam diſtinctæ repræſentandæ ſunt imaginationi per ſigna diverſa.*

SCHOLION II.

5. *Nos* CARTESIUM *ſequimur in* Geometria. *Angli nonnulli, exemplo* HARRIOTI *in* Artis Analyticæ praxi, *incognitas quantitates vocalibus; cognitas conſonantibus deſignant.* VIETA *hujus Logiſticæ inventor uſus eſt literis majoribus; qui eam primus perfecit* HARRIOTUS *& ipſum ſecutus* CARTESIUS *literas minores ſubſtituerunt.*

HYPOTHESIS II.

6. *Si quantitatum denominandarum quædam relationes mutuæ dantur, aut aliunde tanquam cognitæ ſupponi poſſunt; eas quoque in denominatione exprimi conſultum eſt.*

Ex. gr. Si fuerint duæ quantitates quæſitæ, quarum una alterius tripla, & una vocetur x, major rectius dicetur $3x$, quam y. Similiter cum quantitas major ſit aggregatum ex ſemiſumma duarum quantitatum & earundem ſemidifferentia, minor vero differentia inter ſemiſummam & ſemidifferentiam earundem quantitatum (§. 39 *Trigonom.*); conſultum ſæpius eſt, ut ſemiſumma dicatur x & ſemidifferentia y, atque hinc quantitas major $x + y$, minor $x - y$, quam ut ipſa major x & minor y vocetur.

SCHOLION.

7. *Quinam fructus ex commoda quantitatum denominatione expectandi, ex ſubſequentibus patebit. Breviatur calculus, idemque facilitatur; reſolutiones Problematum ſæpe magis genuinæ inveniuntur. Alii ſuo loco ſeſe offerent. Plura circa denominationem moneri poſſent, niſi conſultius judicaremus ea per exemplum, quam per præcepta doceri.*

HYPOTHESIS III.

8. *Signa operationum arithmeticarum retineantur, quæ in* Arithmetica communi *tradidimus* (§. 63, 65, 68, 71, 254, 295); *niſi quod quantitates ſe mutuo dividentes, ubi commodum fuerit, inſtar fractionum ſcribantur.*

Ex. gr. $\frac{a}{b} = a : b$; $\frac{3}{4} = 3 : 4$.

SCHOLION.

9. *Vulgo multiplicationis ſignum eſt* ×. *Ex. gr.* ab *ſcribitur* a×b. *Sed cum hoc ſignum facile cum litera x a typothetis confundatur, uſus ejus merito improbatur.*

HYPOTHESIS IV.

10. *Si vel unus, vel ambo factores ex pluribus literis componuntur; compoſiti parentheſi ( ) includuntur.*

Ex. gr. factum ex $a + b - c$ in d ita ſcribitur: $(a + b - c)\, d$. Similiter factum ex $a + b - c$ in $d - g$ hunc in modum effertur, $(a + b - c)\,(d - g)$.

SCHOLION.

11. *Vulgo hæc facta ita ſcribunt:* $d \times \overline{a + b - c}$ & $\overline{a + b - c} \times \overline{d - g}$. *Sed cum hæc ſcriptio typothetis moleſtias creet, inprimis ſi ex alio capite linearum ſupra literas ducendarum numerus multiplicatur, ſignis* Leibnitianis *utendum eſſe judicamus, quæ non inutiliter in* Actis Eruditorum Lipſienſibus *uſurpantur & ab admodum* R. P. Guidone GRANDO (*a*) *in Italia primum introducta.*

HYPOTHESIS V.

12. *Si quantitatum ſe mutuo dividentium una, vel ambæ ex literis pluribus componuntur; ſigno parentheſeos ( ) ſimiliter utimur, niſi circumſtantiæ ſingulares ſuadeant, eas fractionum inſtar ſcribi.*

Ex. gr. Quotus ex $a + b$ per c ita ſcribitur, $(a + b) : c$. Quotus vero ex $a + b$ per $c - d$ ita exprimitur, $(a + b) : (c - d)$. Similiter $a : (a + b)$ deſignat quotum ipſius a per $a + b$ diviſi. Iidem quoti communiter ita ſcribuntur: $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+b}{c-d}$, $\frac{a}{a+b}$.

(*a*) In *Quadratura Circuli & Hyperbolæ*, Part. 2. p. m. 58.

HYPOTHESIS VI.

13. *Exponentes indeterminati tam rationum, quam dignitatum indicentur per* m, n, r, s, t *&c.*

Ex. gr. x^m, y^n, z^r &c. designant potentias indeterminatas diversi generis (§. 254 *Arithm.*); mx, ny, rz multipla vel submultipla diversa quantitatum x, y, z, prout m, n, r vel numeros integros, vel fractos designant (§. 136 *Arithm.*).

HYPOTHESIS VII.

14. *Si radix ex pluribus literis componitur; parenthesi includitur & exponens ipsi suffigitur, ut ante.*

Ex. gr. $(a+b-c)^2$ designat quadratum ex $a+b-c$; $(a+b-c)^m$ potentiam quamlibet, seu indeterminatam ipsius $a+b-c$.

SCHOLION.

15. *Communiter ita scribunt* $\overline{a+b-c}^{\,2}$ $\overline{a+b-c}^{\,m}$.

DEFINITIO III.

16. *Quantitas* signo + affecta dicitur *positiva*, item *affirmativa*, atque *nihilo major*: quæ vero signo — afficitur, *privativa*, item *negativa*, atque *nihilo minor*; a nonnullis *absurda*.

COROLLARIUM I.

17. Quoniam + est signum additionis (§. 63 *Arithm.*); — vero signum subtractionis (§. 65 *Arithm.*): quantitas positiva prodit, si vera aliqua nihilo additur, e. gr. $0+3=+3$, $0+a=+a$; privativa relinquitur, si quantitas aliqua vera ex nihilo subtrahitur; ex. gr. $0-3=-3$, $0-a=-a$.

SCHOLION I.

18. *Ponamus, te habere nummorum nihil, tibique donari* 100; *habebis ergo* 100 *nummos, adeoque plus nihilo. Plus nempe habes quam ante. Hi nummi quantitatem positivam constituunt. Ponamus, e contrario, te nihil habentem solvere debere* 100 *nummos;* 100 *ergo nummorum debitum contrahes, adeoque, antequam solutio fiat, minus nihilo habebis. Solvendi enim sunt* 100 *nummi, ut nihil habeas. Hoc debitum quantitas negativa est. Notandum vero quantitates positivas initio vel solitarie positas signo nullo affici. Cur vero positivæ dicantur nihilo majores, negativæ nihilo minores; ex Corollario patet.*

COROLLARIUM II.

19. Sunt adeo quantitates privativæ verarum, per quas intelliguntur, defectus; consequenter non quantitates veræ.

SCHOLION II.

20. *Defectum per eam quantitatem metimur, quæ deficit, & sic intelligibilis evadit.*

COROLLARIUM III.

21. Si residuo additur, quod fuerat ablatum, ea prodit quantitas, ex qua subtractio facta (§. 106 *Arithm.*). Ergo $-a+a=0$, $-3+3=0$ (§. 17): hoc est, $-a$ & $+a$, itemque -3 & $+3$ se mutuo destruunt.

COROLLARIUM IV.

22. Quoniam defectus unus alterum excedere potest (ex. gr. si 7 deficiunt, plura desunt, quam ubi 3 deficiunt), quantitates vero privativæ sunt verarum defectus (§. 19); ideo quantitas una privativa aliquoties sumta alteram superare potest. Quamobrem quantitates privativæ inter se homogeneæ sunt (§. 32 *Arithm.*).

COROLLARIUM V.

23. Sed quia defectus positivæ quantitatis aliquoties sumtus positivam superare nequit, cum potius multo magis ab ea deficiat (§. 17); quantitates privativæ positivis heterogeneæ sunt (§. 32 *Arithm.*).

COROLLARIUM VI.

24. Cum adeo quantitates privativæ positivis heterogeneæ (§. 23), privativis homogeneæ sint, (§. 22); inter privativam & positivam ratio intercedere nequit, inter privativas vero ratio datur (§. 126 *Arithm.*). Ex. gr. $-3a : -5a = 3 : 5$.

SCHOLION III.

25. *Non mirum videri debet inter quantitates privativas* − 3a *&* − 5a *eandem esse rationem, quæ est inter positivas* + 3a *&* + 5a. *Quod enim quantitates quatuor, quarum binæ binis heterogeneæ sunt, proportionales esse possint, tum ex rationum doctrina intelligitur, tum ex Geometria manifestum est, in qua eandem rationem inter lineas esse demonstravimus, quæ inter superficies datur. Ex. gr. Parallelogramma æqualium basium rationem altitudinum habent* (§. 389 Geom.) *& in praxi regulæ trium pretia sumuntur ut mercium quantitates; licet pretia mercibus heterogenea sint. Falluntur autem, qui inter* 1 *&* − 1, *atque inter* − 1 *&* 1 *rationem eandem esse sibi persuadent* (§. 24).

THEOREMA I.

26. *Quantitas qualibet pro unitate assumi potest.*

DEMONSTRATIO.

Quantitas enim quælibet in se una est (*§. 3 Arithm.*), nec ad aliam determinatam tanquam ad unitatem jam refertur (*§. 13 Arithm.*). Ergo ipsa pro unitate assumi potest (§. 4 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA I.

27. *Quantitates tam eodem, quam diversis signis affectas addere.*

RESOLUTIO.

1\. Si quantitates eadem litera notatæ eodem signo afficiuntur; numeri iis præfixi adduntur, ut in Arithmetica communi.

2\. Si signis diversis afficiuntur, additio mutatur in subtractionem & residuo præfigitur signum majoris.

4\. Quantitates diversis literis notatæ junguntur mediante signo + (§. 8).

$$\begin{array}{l|l} 4a + 2b - 2c - 5d - g & a - b \\ 5a - 2b + 6c + [illegible]d - 3g & c \\ \hline 9a \qquad + 4c - 3d - 4g & a - b + c \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum litera quælibet, qua quantitas aliqua indigitatur, pro unitate assumi possit (*§. 26*); erit $a + a + a + a = 4a$; consequenter $4a + 5a = 9a$ (*§. 96 Arithm.*). Eodem modo patet esse $-g - 3g = -4g$. *Quod erat unum.*

Quoniam $6c = 4c + 2c$, *per demonstr.* erit $6c - 2c = 4c + 2c - 2c$ (*§. 91 Arithm.*). Sed $2c - 2c = 0$ (§. 21). Ergo $6c - 2c = 4c$. Similiter $-5d = -3d - 2d$, *per demonstr.* Sed $-5d + 2d = -3d - 2d + 2d$ (§. 88 *Arithm.*) & $-2d + 2d = 0$ (§. 21). Ergo $-5d + 2d = -3d$. *Quod erat alterum.*

Tertium per se patet (§. 8).

SCHOLION.

28. *Ut hic calculus facilius intelligatur, ponamus* a *denotare thalerum*, b *grossum*, c *nummum; habebimus*

7a − 9b + 5c =	7 th.	− 9 gr.	+ 5	num.
3a + 5b − 9c =	3	+ 5	− 9	
10a − 4b − 4c =	10 th.	− 4 gr.	− 4	num.

Atque per idem exemplum facilius quoque capitur ratio, cur in casu diversitatis signorum additio in subtractionem mutetur & residuo signum majoris quantitatis relinquatur. Nimirum in summa 10 *thalerorum deficiunt* 9 *grossi: quamobrem si quinque addantur, defectus minuitur & ad* 4 *reducitur. Quoniam vero non* 5 *grossi integri, sed demtis* 9 *nummis, summæ adjiciendi; summa* 10 th. − 4 gr. *excedit genuinam* 9 *nummis, qui adeo auferendi. Jam cum in nume-*

numero superiori, cui inferior additur, occurrant 5 nummi, hi quidem actu auferri possunt: qui vero adhuc desiderantur 4, tanquam defectus notandi. Et hac quidem ratione regula a primo Inventore detecta.

THEOREMA II.

29. *In subtractione quantitatum compositarum signa subtrahendæ mutantur in contraria, nempe + in — & — in +.*

DEMONSTRATIO.

Si $c+d$ fuerit subtrahenda ex $a+b$; differentiam esse debere $a+b-c-d$, adeoque signa + in quantitate subtrahenda in — mutari, ex *hypoth.* 3 (§.8) patet. Sed si $c-d$ subtrahenda ex $a+b$, & integrum c subtrahitur; quantitas major subducta quam fieri debebat. Ergo quod plus justo subtractum est d, iterum addendum. Prodit ergo $a+b-c+d$. *Q. e. d.*

PROBLEMA II.

30. *Quantitates tam eodem, quam diversis signis affectas a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ signa eadem habent, & minor e majore subtrahenda; subtractio ut in Arithmetica communi (§. 103 *Arithm.*) absolvitur.
2. Si vero major e minori subducenda; contraria ratione minor e majore subtrahitur & residuo præfigitur signum —, si quantitates signo + afficiuntur; signum vero +, si signo — gaudent.
3. Si quantitates diversa signa habent; in additionem mutatur subtractio & aggregato præfigitur signum ejus quantitatis, ex qua subtractio facta est.
4. Si quantitates diversis literis notatæ, signa subtrahendæ tantum in contraria mutantur.

$$\begin{array}{l} 8a - 5c + 9d = 8\text{th.} - 5\text{gr.} + 9\text{ num.} \\ 6a - 8c - 7d = 6 \quad - 8 \quad - 7 \\ \hline 2a + 3c + 16d = 2\text{th.} + 3\text{gr.} + 16\text{num.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9b + 15c - 7d + 8e - f \\ 6b + 20c - 9d - 9e + 7f \\ \hline 3b - 5c + 2d + 17e - 8f \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+b-c \\ d-e+f \\ \hline a+b-c-d+e-f \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+d \\ c-e-g \\ \hline a+d-c+e+g \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum quantitates eadem litera notatæ sint vel unitates eædem, vel ejusdem unitatis multiplæ aut submultiplæ (§. 26); erit $8a - 6a = 2a$ (§.35, 103 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Si quantitas major $20c - 9d$ ex minore $15c - 7d$ subtrahenda; erit residuum $15c - 7d - 20c + 9d$ (§.29). Sed $15c - 20c = -5c$ & $-7d + 9d = 2d$ (§.27). Ergo $15c - 7d - 20c + 9d = -5c + 2d$. *Quod erat alterum.*

Si $-9e + 7f$ subtrahi debent ex $8e - f$; erit residuum $8e - f + 9e - 7f$ (§.29). Sed $-f - 7f = -8f$ & $8e + 9e = 17e$ (§.27). Ergo $8e - f + 9e - 7f = 17e - 8f$. *Quod erat tertium.*

Quartum patet per Theor. 2 (§.29).

Aliter.

1. Signa quantitatis subtrahendæ mutentur in contraria (§.29): quo facto
2. Additio fiat (§.27), seu quæ se mutuo destruunt deleantur.

Ex. gr.

Ex.gr. Si ex $9b + 15c - 7d + 8e - f$ subtrahi debet $6b + 20c - 9d - 9e + f$ fiat (§. 29) $- 6b - 20c + 9d + 9e - f$; erit (§. 27) residuum $3b - 5c + 2d + 17e - 2f$. Nimirum $+ 6b - 6b$, $+ 15c - 15c$, $- 7d + 7d$, se mutuo destruunt (§. 21).

SCHOLION.

31. *Mirum videri poterat, quod cum quantitates privativæ positivis heterogeneæ sint (§. 23), heterogeneæ autem nec addi* (§. 61 Arithm.), *nec a se invicem subtrahi possint* (§. 64 Arithm.), *privativæ tamen positivis addantur & ab iis subtrahantur. Enim vero rem curatius perpendens animadvertes, proprie loquendo privativam nunquam addi positivæ, nec ab eadem subtrahi: sed in additione subtrahi, quod plus justo fuerat additum (§. 27); in subtractione addi, quod plus justo fuerat subductum (§. 30).*

THEOREMA III.

32. *Si quantitas positiva per positivam multiplicetur aut dividatur; in utroque casu quantitas prodit positiva.*

DEMONSTRATIO.

Est enim in multiplicatione ut unitas ad factorem unum, ita alter ad productum (§. 66 *Arithm.*). Sed uterque factor est positivus, *per hypoth.* Ergo & factum positivum esse debet (§. 24). *Quod erat unum.*

Si $+a$ ducitur in $+b$, factum est $+ab$, *per demonstr.* Ergo si $+ab$ dividitur per $+a$, quotus erit $+b$; si per $+b$, quotus $+a$ (§. 210 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA IV.

33. *Si quantitas negativa per positivam multiplicetur aut dividatur; in utroque casu quantitas prodit negativa.*

DEMONSTRATIO.

Multiplicare idem est hac quantitatem aliquam aliquoties sibimetipsi addere (§. 67 *Arithm.*). Est vero summa quantitatum negativarum negativa (§. 27). Ergo factum ex negativa in positivam negativum est. *Quod erat unum.*

Factum ex $-a$ in $+b$ est $-ab$ *per demonstr.* Ergo si $-ab$ dividitur per $+b$, quotus est $-a$ (§. 210 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA V.

34. *Si quantitas negativa per negativam multiplicetur aut dividatur; quantitas positiva prodit.*

DEMONSTRATIO.

Quantitas privativa per privativam proprie loquendo multiplicari nequit (§. 66 *Arithm.*): id quod ipsa notio quantitatis privativæ insinuat (§. 19), utpote quæ repugnat actui positivo, qualis est iterata ejusdem quantitatis additio, in qua multiplicatio consistit (§. 67 *Arithm.*). Quare hæc multiplicatio proprie tantum locum habet, ubi privativæ positivis junguntur, ita ut addi rursus debeat, quod plus justo fuerat subtractum: id quod evidentissime ita demonstramus.

Sit ACDB parallelogrammum rectangulum, & in eo AC=a, CD=b. Ducatur EF ipsi CD parallela (§. 258 *Geom.*); erit ob rectos ad E & F (§. 230 *Geom.*) & EF=AB, itemque AE=BF (§. 238 *Geom.*), ABFE rectangulum (§. 100 *Geom.*). Eodem modo ostenditur, ducta HG ipsi BD parallela; fore Tab. Fig.

re GHBD & BHID, consequenter AEIH rectangula. Sit ergo $AE = c$, $GD = d$: erit $EC = a - c$, $CG = b - d$, atque hinc $ACDB = ab$, $AEIH = bc - dc$ & $HGDB = ad$ (§.375 *Geom.* & §.33 *Analyſ.*). Quodſi areas rectangulorum AI, & HD ſubtrahas ab area rectanguli AD; relinquitur area rectanguli ECGI, hoc eſt, factum ex $a - c$ in $b - d$ (§. 375 *Geom.*). Reperitur adeo $(a - c)(b - d) = ab - ad - bc + cd$ (§. 30). Unde apparet, factum ex $-c$ in $-d$ eſſe $+ cd$. *Quod erat unum.*

In diviſione quærimus, quoties quantitas una in altera contineatur (§. 69 *Arithm.*). Diviſurus ergo quantitatem privativam per privativam quærit, quoties defectus unus in altero contineatur (§. 19): quotus adeo qui idem indicat (§. 69 *Arithm.*), utique quantitas poſitiva eſſe debet. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

35. *Poſſunt etiam Theorema 3 & 4 ope rectanguli demonſtrari.*

THEOREMA VI.

36. *Si quantitas poſitiva per negativam multiplicatur aut dividitur; quantitas privativa prodit.*

DEMONSTRATIO.

Cum in multiplicatione quantitas multiplicanda toties ſibimetipſi addatur, quoties multiplicans unitatem continet (§. 66 *Arithm.*); quantitas vero privativa ſit defectus alicujus quantitatis (§. 19); proprie loquendo poſitiva per privativam multiplicari nequit. Hinc denuo multiplicatio tantum locum habet, ubi privativæ poſitivis junguntur, ita ut ſubtrahatur, quod plus juſto fuit additum: id quod ita demonſtramus.

Sint LMON & PMOQ rectangula, & in iis $NO = a$, $MO = b$, $QO = c$, erit $NQ = a - c$, area $PQOM = bc$, $LNOM = ab$, (§ 375 *Geom.*), conſequenter $LNQP = b(a - c) = ab - bc$. Ergo b ductum in $-c$ efficit $-bc$. *Quod erat unum.* Tab.I. Fig.2.

Factum ex $-c$ in $-d$ eſt $+ cd$ (§. 34). Ergo ſi $+cd$ dividis per $-c$, quotus eſſe debet $-d$ (§.210 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA VII.

37. *In multiplicatione ac diviſione eadem ſigna efficiunt +, diverſa −.*

DEMONSTRATIO.

Si quantitates ſe mutuo multiplicantes aut dividentes fuerint poſitivæ vel privativæ; quantitas prodit in utroque caſu poſitiva (§. 32, 34): ſi vero altera privativa, altera poſitiva; quantitas prodit privativa (33, 36). Ergo eadem ſigna efficiunt +, diverſa −. *Q. e. d.*

PROBLEMA III.

38. *Quantitates tam eodem, quam diverſis ſignis affectas in ſe invicem ducere.*

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 111 *Arithm.*), niſi quod notetur regula: *eadem ſigna faciunt +, diverſa −* (§. 37).

$$\begin{array}{r} a + c \\ b + d \\ \hline + ad + cd \\ ab + bc \\ \hline ab + ad + bc + cd \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b - d \\ a - b - d \\ \hline - ad - bd + dd \\ - ab - bb + bd \quad \\ aa + ab - ad \qquad \quad \\ \hline aa * - bb - 2ad * + dd \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 = 8 + 4 - 2 \\ 2 = 8 - 4 - 2 \\ \hline - 16 - 8 + 4 \\ - 32 - 16 + 8 \quad \\ 64 + 32 - 16 \qquad \\ \hline 20 = 64 * - 48 * + 4 \end{array}$$

Item
$$\begin{array}{r} 8 = 10 - 2 \\ 7 = 10 - 3 \\ \hline - 30 + 6 \\ 100 - 20 \quad \\ \hline 56 = 100 - 50 + 6 = 50 + 6 \end{array}$$

SCHOLION.

39. *Exemplum posterius demonstrationem exhibet ocularem multiplicationis per digitos. Nimirum 2 & 3 sunt distantiae factorum a denario per digitos in utraque manu erectos repraesentari solitae; quod relinquitur, factis ex distantiis istis in denarium a 100 subductis, indicatur digitis residuis in utraque manu &, ut ab erectis distinguantur, depressis, singulis nempe pro totidem denariis sumtis. Ita in nostro casu in altera manu deprimuntur digiti 2, in altera 3, simul 5, adeoque quinque numerantur decades. Summae adjicitur factum ex digitis in utraque manu erectis in se invicem.*

PROBLEMA IV.

40. *Quantitates compositas dividere.*

RESOLUTIO.

Si quantitas una per alteram actu dividi potest, orta nempe ex divisore in aliam (§. 210 *Arithm.*); divisio instituitur ut in numeris (§. 117 *Arithm.*), notata tamen regula: *eadem signa faciunt* +, *diversa* — (§. 37).

In aliis casibus tantum observanda, quae supra praecepimus (§. 8).

Ex. gr. dividere jubemur $aa - bb - 2ad + dd$ per $a - b - d$.

$$\begin{array}{l} a - b - d)\ aa - bb - 2ad + dd\ (a + b - d \\ \qquad\qquad aa - ab - ad \\ \hline \qquad\qquad + ab - bb - ad + dd \\ \qquad\qquad + ab - bb - bd \\ \hline \qquad\qquad\qquad - ad + bd + dd \\ \qquad\qquad\qquad - ad + bd + dd \\ \hline \qquad\qquad\qquad\quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

PROBLEMA V.

41. *Fractionem fractioni addere, aut unam ex altera subtrahere.*

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 236, 237 *Arithm.*).

Ex. gr. sint fractiones addendae $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Reductae ad eandem denominationem erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, (§. 235 *Arithm.*). Ergo summa $\frac{ad + bc}{bd}$ (§. 27).

Similiter sit fractio $\frac{a}{b}$ subtrahenda ex $\frac{c}{d}$. Reductae erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, ut ante. Ergo differentia $\frac{bc - ad}{bd}$ (§. 30).

PROBLEMA VI.

42. *Fractionem per fractionem multiplicare aut dividere.*

RESOLUTIO.

Denuo hic omnia fiunt ut in Arithmetica communi (§. 239, 243 *Arithm.*).

Ex. gr.

Ex. gr. Sint fractiones se mutuo multiplicaturæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$: erit factum $\frac{ac}{bd}$.

Sint fractiones se mutuo divisuræ $\frac{ac}{db}$ & $\frac{a}{b}$; erit quotus $\frac{ac}{bd} \cdot \frac{b}{a} = \frac{acb}{abd} = \frac{c}{d}$ (§.231 *Arithm.*).

COROLLARIUM I.

43. Cum $a = \frac{a}{1}$ (§.59 *Arithm.*); erit factum ex a in $\frac{c}{d}$, hoc est, ex integra quantitate in fractam, $\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{1} = \frac{ac}{d}$. Unde patet, numeratorem fractæ multiplicandum esse per integram, si fractio per integrum multiplicari debet: quemadmodum fit in Arithmetica communi (§.242 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

44. Ergo quotus ex $\frac{c}{d}$ per a, hoc est, ex quantitate fracta per integram divisa, $\frac{c}{d} \cdot \frac{1}{a} = \frac{c}{ad}$. Unde patet, denominatorem dividendi multiplicandum esse per divisorem, & factum subscribendum numeratori immutato, si fractio per integrum dividenda.

PROBLEMA VII.

45. *Quantitatem quamcunque per divisorem compositum dividere, utut divisionem exactam non admittat.*

RESOLUTIO.

Divisio instituatur ut in Arithmetica communi (§.117 *Arithm.*), tamdiu continuanda, donec quotus legem manifestet, juxta quam termini ejus in infinitum progrediuntur; observata subtractionis, itemque multiplicationis ac divisionis lege de signorum mutatione (§.29, 37).

Ex. gr. Si quantitas dividenda b, dividens $a+c$, erit:

$$a+c)\, b \,\left(\frac{b}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{bc_2}{a^3} - \frac{bc^3}{a^4}\right. \text{ \&c. in infin.}$$
$$b + \frac{bc}{a}$$
$$-\frac{bc}{a}$$
$$-\frac{bc}{a} - \frac{bc^2}{a^2}$$
$$+\frac{bc^2}{a^2}$$
$$+\frac{bc^2}{a^2} + \frac{bc^3}{a^3}$$
$$-\frac{bc^3}{a^3} \text{ \&c. in infin.}$$

Nimirum si b per a dividitur, quotus est $\frac{b}{a}$ (§.8). Factum ex $\frac{b}{a}$ in $a+c$ est $\frac{ab}{a} + \frac{bc}{a}$ (§.43), hoc est, $b + \frac{bc}{a}$ (§.223 *Arithm.*): quod ex dividenda b subductum relinquit $-\frac{bc}{a}$ (§.30). Si porro $-\frac{bc}{a}$ per a dividitur, erit quotus $-\frac{bc}{a^2}$ (§.44). Factum ergo ex $a+c$ in $-\frac{bc}{a^2}$, hoc est, $-\frac{abc}{a^2} - \frac{bc^2}{a^2}$ (§. 43, 37), seu $-\frac{bc}{a} - \frac{bc^2}{a^2}$ (§.231 *Arithm.*), ex dividenda $-\frac{bc}{a}$ subtractum relinquit $+\frac{bc^2}{a^2}$ (§.30). Unde patet quomodo divisio continuanda. Inventis autem vel quinque terminis, tum quotus, tum ipsa divisionis ratio insinuat, quotum constare ex infinita terminorum serie, quorum numeratores sunt potentiæ ipsius c, quarum exponentes a numero ordinis unitate differunt, per b multiplicatæ; denominatores vero potentiæ ipsius a, quarum exponentes

nentes æquantur numero ordinis terminorum. Ex. gr. in termino tertio potentia ipſius c in numeratore ſecunda eſt, potentia vero ipſius a in denominatore tertia.

COROLLARIUM I.

46. Si $b = 1$ & $a = 1$, ſubſtituto valore hoc in quoto, prodit $1 = c + c^2 - c^3$ &c. in infin. Quare $1 : (1 + c) = 1 - c + c^2 - c^3$ &c. in infin.

COROLLARIUM II.

47. Quodſi termini in quoto continuo decreſcant, ſeries dat quotum vero quantumlibet propinquum. Ex. gr. ſi $b = 1$, $c = 1$ & $a = 2$; valoribus his ſubſtitutis in ſerie generali, aut diviſione ut in exemplo univerſali inſtituta, reperietur $\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ &c. Ponamus jam ſeriem terminari in termino quarto; in defectu quidem peccabitur, ſed qui minor quam $\frac{1}{32}$. Si eadem terminetur in ſexto; denuo peccabitur in defectu, ſed qui minor $\frac{1}{128}$. Series igitur quo longius continuatur, eo propius ad verum quotum accedit.

SCHOLION.

48. *Similiter invenietur* $\frac{1}{4} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ &c. in infin. $\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1}$ [illegible] $\frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{1}{256}$ &c. in infin. $\frac{1}{6} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} - \frac{1}{625}$ &c. in infin. *En legem conſtantem, juxta quam omnes fractiones, quarum numerator unitas, per ſeries infinitorum terminorum exprimere licet. Sunt nempe illæ ſeries progreſſiones geometricæ decreſcentes, ita quidem ut numerator ſemper ſit unitas, denominator termini primi idemque exponens rationis unitate differat a denominatore fractionis reſolvendæ.*

COROLLARIUM III.

49. Si termini in quoto continuo creſcunt, ſeries a quoto tanto magis diſcedit, quo longius continuatur, nec quoto æqualis fit, niſi terminetur, ultimumque reſiduum ſub ſigno ſuo adjiciatur. Ex. gr. Sit $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$; reperietur quotus $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128$ &c. Terminus unus 1 ſuperat $\frac{1}{3}$ exceſſu $\frac{2}{3}$; termini duo deficiunt $\frac{4}{3}$; termini tres excedunt $\frac{8}{3}$; quatuor deficiunt $\frac{16}{3}$; & ita porro. Ponamus ſeriem terminari in -8; erit $\frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 4 - 8 + \frac{16}{3}$. Sed $1 - 2 + 4 - 8 = -5 = -\frac{15}{3}$. Ergo $\frac{1}{1+2} = \frac{16}{3} - \frac{15}{3} = \frac{1}{3}$. Similiter ſi ſit $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$; reperietur quotus $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ &c. ubi termini numero pares, $= 0$, deficiunt continuo $\frac{1}{2}$; termini autem numero impares conficiunt 1; conſequenter exceſſus $= \frac{1}{2}$. Ergo $\frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2}$, vel $= 0 + \frac{1}{2}$. Ponamus ſeriem univerſalem (§.46) terminari in $-c^3$: erit $\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{c^4}{1+c} = (1 + c - c - c^2 + c^2 + c^3 - c^3 - c^4 + c^4) : (1 + c)$ (§.235 *Arithm.*) $= \frac{1}{1+c}$ (§.21).

SCHOLION I.

50. *Tyrones hoc Problema cum ſuis Corollariis ſub initium prætermittere poſſunt, donec inferius ad illud provocetur.*

SCHOLION II.

51. *Quoniam ſi* $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ *in ſeriem reſolvitur, quotus a fractione propoſita, quantumlibet continuatus, continuo differt* $\frac{1}{2}$ (§.49), *reſolutio in præſenti caſu irrita evadit. Unde patet fons erroris, quem commiſit* Guido GRANDUS *in Tractatu* De quadratura circuli & hyperbolæ, *Cor. 3, Prop. 7, Part.* 1, *p. m.* 29, *ubi infert, ob* $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ &c. *in infinitum* $= 0$, *ſummam infinitarum nullitatum eſſe* $\frac{1}{2}$. *Nec veritatem attigiſſe liquet* LEIBNITIUM *in* Actis Eruditorum *Tom.* 5, Supplement. *p.*264, *& ſeqq.*

DEFINITIO IV.

52. *Series*, quæ ad verum valorem continuo appropinquant, dicuntur *convergentes*: quæ ab eodem continuo recedunt, *divergentes*.

COROL-

COROLLARIUM I.

53. Ergo ſeries fractionum continuo decreſcentium (§.47, 48) ſunt convergentes: ceteræ vero, quarum termini continuo creſcunt (§.49), divergentes.

PROBLEMA VIII.

54. *Potentiam quamcunque per aliam ejuſdem radicis multiplicare vel dividere.*

RESOLUTIO.

I. In multiplicatione addantur exponentes, ſumma eſt exponens facti.

$$\begin{array}{ccccc} x^3 & y^m & y^m & a^m & x^n \\ x^4 & y^m & y^n & a^r & x^s \\ \hline x^7 & y^{2m} & y^{m+n} & a^{m+r} & x^{n+s} \end{array}$$

II. In diviſione exponens dignitatis dividentis ſubtrahatur ab exponente dividendæ; reſiduum eſt exponens quoti

$$\frac{x^7}{x^4}\left(x^3 \qquad \frac{y^{m+n}}{y^n}\left(y^m \qquad \frac{a^m x^n}{a^r x^s}\left(a^{m-r}x^{n-s}\right.\right.\right.$$

DEMONSTRATIO.

Cum exponentes dignitatum in progreſſione arithmetica (§. 251, 333 *Arithm.*), dignitates in geometrica (§. 250, 332 *Arithm.*) progrediantur; illi pro harum logarithmis recte habentur (§. 334 *Arithm.*). Ergo ſumma exponentium, quos habent dignitates ſe mutuo multiplicantes, eſt exponens facti (§. 337 *Arithm.*); differentia exponentium, quos habent dignitates ſe mutuo dividentes, eſt exponens quoti (§.343 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

55. *Progreſſiones iſtæ hæ ſunt:*
$x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$, &c.
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.
Nempe $x : x = x^1 : x^1 = x^0$ (§. 54).
Sed $x : x = 1$ (§. 69 Arithm.). *Ergo* $x^0 = 1$ (§. 87 Arithm.).

PROBLEMA IX.

56. *Potentiam quamcunque datam ad aliam dati exponentis evehere; aut ex eadem dati ſimiliter exponentis radicem extrahere.*

RESOLUTIO.

I. Quoniam potentia data, intuitu ejus ad quam evehenda, radix eſt (§. 246 *Arithm.*) & exponentes logarithmi dignitatum exiſtunt, *per demonſtr. in Probl. præc.* (§. 54): exponens potentiæ novæ habebitur, potentiæ datæ exponente in exponentem ejus, ad quam evehi debet, ducto (341 *Arithm.*).

Ex. gr. Potentia x^m evecta ad dignitatem n eſt x^{mn}. Potentia y^3 evecta ad dignitatem 2 eſt y^6.

II. Non abſimili modo liquet, exponentem radicis haberi, ſi exponens dignitatis datæ dividatur per exponentem radicis datum (§. 341 *Arithm.*).

Ex. gr. Radix quadrata ex x^6 eſt x^3: radix n ex x^{mn} eſt x^m: radix n ex x^m eſt x.

COROLLARIUM.

57. Eſt itaque $\sqrt{x} = x^{1:2}$, $\sqrt[3]{x} = x^{1:3}$, $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§.341 *Arithm.*); conſequenter quantitates irrationales ad expreſſionem rationalem reduci poſſunt.

SCHOLION.

58. *Quantum in Analyſi commodi afferat hæc reductio ex capite ſubſequente eluceſcet. Etenim ſi quantitates irrationales ad formam rationalium reducantur; peculiari pro iis calculo opus non eſt, ſed rationalium inſtar tractari poſſunt: quemadmodum primi docuerunt* LEIBNITIUS *atque* NEWTONUS.

CAPUT II.

De Arithmetica Irrationalium.

PROBLEMA X.

59. *Quantitates irrationales diversæ denominationis reducere ad eandem.*

RESOLUTIO.

Sint quantitates reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ & $\sqrt[s]{y^r}$. Quoniam $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ & $\sqrt[s]{y^r} = y^{r:s}$ (§. 57), diversitas denominationis ab exponentibus diversis pendet, exponentes vero fractiones sunt, quæ ad alias ipsis æquales, sed ejusdem denominationis reduci possunt (§. 235 *Arithm.*). Ergo quantitates surdæ reducuntur ad eandem denominationem, exponentibus earundem ad eandem reductis. Erit adeo $x^{n:m} = x^{ns:ms}$ & $y^{r:s} = y^{mr:ms}$ seu $x^{n:m} = \sqrt[ms]{x^{ns}}$ & $y^{r:s} = \sqrt[ms]{y^{mr}}$ (§. 57).

Ex. gr. Sint quantitates reducendæ $\sqrt{2}$ [illegible]. Quoniam $\sqrt{2} = 2^{1:2}$ & $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ (§. 57); erunt reductæ $2^{3:6}$ & $5^{2:6}$ (§. 235 *Arithm.*), hoc est, $\sqrt[6]{2^3}$ & $\sqrt[6]{5^2}$ (§. 57); seu, 2 actu ad potentiam tertiam & 5 ad secundam evehendo, $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{25}$.

SCHOLION.

60. *Quodsi quis ægre admiserit reductionem ad eandem denominationem in exponentibus quantitatum irrationalium factam; is easdem formulas, quas ejus ope elicuimus, per Algebram investigare potest, quemadmodum inferius docebimus.*

PROBLEMA XI.

61. *Quantitates irrationales ad simpliciorem expressionem reducere.*

RESOLUTIO.

Sit quantitas reducenda $\sqrt[m]{a^n x^m}$. Quoniam ea æqualis est ipsi $a^{n:m} x^{m:m}$ (§. 57), & $x^{m:m} = x$ (§. 56.), erit $\sqrt[m]{a^n x^m} = a^{n:m} x = x \sqrt[m]{a^n}$. Locum ergo habet reductio, si quantitas sub signo radicali per istiusmodi potentiam, quæ eundem cum radicali signo exponentem habet, divisibilis. Divisio nempe actu instituenda, quoto sub signo radicali relicto & divisoris radice eidem præfixa.

Ex. gr. Sit reducenda $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2}$. Quoniam 8 est cubus perfectus, cujus radix 2: habebimus $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$. Eodem modo reperitur $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{3}$.

COROLLARIUM I.

62. Si quantitates irrationales ejusdem gradus ad simpliciorem expressionem reductæ sub signis radicalibus eandem quantitatem relinquant; erunt inter se ut quantitates rationales signis præfixæ (§. 178 *Arithm.*); consequenter quantitates irrationales inter se commensurabiles esse possunt (§. 160 *Arithm.*).

Ex. gr. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$, & $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$. Ergo $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2 : 3$, hoc est, $\sqrt{8} : \sqrt{18} = 2 : 3$. In casu reliquo sunt incommensurabiles.

SCHOLION I.

63. *Istud quantitatum irrationalium genus* communicantium *nomine venire solet.*

COROL-

COROLLARIUM II.

64. Per præsens adeo Problema invenitur ratio rationalis irrationalium, si qua datur.

COROLLARIUM III.

65. Quia $\sqrt[m]{a^n x^m} = x \sqrt[m]{a^n}$ (§. 61); quantitas ex parte rationalis, ex parte irrationalis ad pure irrationalem reducitur, si quantitas rationalis ad eam dignitatem evehitur, cujus gradum indicat exponens signo radicali præfixus, & dignitas per quantitatem sub signo radicali multiplicatur. E. gr. $5\sqrt{2} = \sqrt{2.25} = \sqrt{50}$, & $5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3.5^3} = \sqrt[3]{3.125} = \sqrt[3]{375}$.

SCHOLION II.

66. *Quodsi quæsiveris, quomodo in resolutione innotescat, utrum quantitas sub signo radicali posita per potentiam aliquam requisitam sit divisibilis, nec ne; & quænam sit ista potentia; in divisores resolvenda est, inter quos locum obtineant necesse est omnes potentiæ a prima usque ad requisitam, si cum numeris nobis res fuerit. E. gr. Quæritur an* $\sqrt[4]{368}$ *sit divisibilis per aliquam potentiam quarti gradus. Resoluturus numerum 368 in suos divisores, reperiet tentando*

2	184
4	92
8	46
16	23

nempe divisionem per numeros minores & quotos majores a latere ponendo. Invenies hic 2 potentiam primi gradus, 4 potentiam secundi, 8 potentiam tertii & 16 potentiam quarti. Ergo 16 est divisor quæsitus, consequenter $\sqrt[4]{368} = 2\sqrt[4]{23}$.

PROBLEMA XII.

67. *Quantitates irrationales addere, aut unam ex altera subtrahere.*

RESOLUTIO.

Si quantitates irrationales fuerint communicantes, adeoque reductæ (§. 61) fuerint commensurabiles (§. 63); quantitates rationales extra vinculum adduntur & a se invicem subtrahuntur; ibique summa, hic differentia denuo præfigitur signo radicali. Reliqua omnia sunt ut in additione & subtractione rationalium.

Ita reperietur $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ (§. 61) $= 5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ (§. 65) & $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3.8} + \sqrt[3]{3.27} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{375}$.

Similiter $\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{81} = 5\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$.

Contra $\sqrt{7}$ & $\sqrt{5}$ cum sint incommensurabiles (§. 62); summa erit $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ (§. 27), & differentia $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ (§. 30).

Hinc & intelliguntur exempla in compositis tum in additione:

$$4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{7} + 8\sqrt{5}$$
$$\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{5}$$

$5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 10\sqrt{7} + 4\sqrt{5}$ summa;
hoc est $\sqrt{3.25} + \sqrt{2.16} + \sqrt{7.100} + \sqrt{5.16}$
seu $\sqrt{75} + \sqrt{32} + \sqrt{700} + \sqrt{80}$

tum in subtractione

$$5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 8\sqrt{10}$$
$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 9\sqrt{10}$$

$2\sqrt{2} - 12\sqrt{3} + 17\sqrt{10}$ different.
hoc est $\sqrt{2.4} - \sqrt{3.144} + \sqrt{10.289}$
seu $\sqrt{8} - \sqrt{432} + \sqrt{28900}$

DEMONSTRATIO.

Omnia manifesta sunt ex demonstratione Probl. 1 & 2 (§. 27, 30).

PROBLEMA XIII.

68. *Quantitates irrationales per irrationales multiplicare ac dividere.*

RESO-

RESOLUTIO.

Multiplicentur aut dividantur quantitates ſub ſigno radicali; ibi facto, hic quoto præfigatur ſignum idem radicale cum ſuo exponente. Quodſi radicales quantitates fuerint diverſæ denominationis ante omnia reducantur ad eandem (§. 59).

Ex. gr. in multiplicatione $\sqrt{3}.\sqrt{5} = \sqrt{15}$ & $\sqrt{12}.\sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$. Item in compoſitis

$$\begin{array}{rr} \sqrt{3}+\sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \hline -\sqrt{6}-2 & +\sqrt{6}+3 \\ 3+\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} \\ \hline 3-2=1 & 2\sqrt{6}+5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7\sqrt{3} - 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{8} + 3\sqrt{6} \\ \hline +21\sqrt{18} - 15\sqrt{12} \\ 35\sqrt{24} - 100 \\ \hline 35\sqrt{24}+21\sqrt{18}-15\sqrt{12} - 100 \end{array}$$

hoc eſt $70\sqrt{6}+63\sqrt{2}-30\sqrt{3}-100$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{32} \\ \sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{32} \\ \hline +16+\ 8+\ 32 \\ +4+\ 2+\ 8 \\ 8+4+16 \\ \hline 98 \end{array}$$

Similiter in diviſione $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$ & $\sqrt{12} : \sqrt{6} = \sqrt{2}$. Item in compoſitis;

$$\sqrt{3})\ \sqrt{15}-\sqrt{6}+\sqrt{12}\ (\sqrt{5}-\sqrt{2}+2$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{15} \\ \hline -\sqrt{6}+\sqrt{12} \\ -\sqrt{6} \\ \hline +\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ \hline 0 \end{array}$$

SCHOLION I.

69. *Interdum etiam diviſio locum habet, ſi diviſor compoſitus eſt. Sed cum rariſſimus ſit ejus uſus & ea diviſione ignorata maxime præclaros in Analyſi progreſſus facere detur, nec difficultate res careat; eam hic exponi ſuperfluum judicamus. Docet ipſam* OZANAMUS *in* Novis Elementis Algebræ (*a*).

SCHOLION II.

70. *Ceterum ex tradito hactenus calculo liquet, ſi quantitatem duplici ſigno radicali affici contingat, ex.gr. ſi fuerit* $(3+\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}}$, *operationes omnes eodem modo peragi, modo notetur, quantitatem ſub primo vinculo eodem modo tractari debere, quo rationalem in antecedentibus tractavimus. Ex.gr.*

$$\sqrt{(8\sqrt{3})} = 2\sqrt{(2\sqrt{3})}\ (\S. 61)$$
$$\sqrt{(9\sqrt{12})} = \sqrt{(2.9\sqrt{3})} = 3\sqrt{(2\sqrt{3})}$$
$$\overline{\sqrt{(8\sqrt{3})}+\sqrt{(9\sqrt{12})} = 5\sqrt{(2\sqrt{3})}}$$
$$= \sqrt{(50\sqrt{3})}$$
$$= \sqrt{\sqrt{7500}}.$$

Similiter in multiplicatione

$$\begin{array}{rr} 3+\sqrt{2} & \sqrt{\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\sqrt{2}} & \sqrt{(5\sqrt{5})} \\ 3\sqrt{\sqrt{2}}+\sqrt{(2\sqrt{2})} & 5+\sqrt{(5\sqrt{10})} \end{array}$$

hoc eſt $\sqrt{(9\sqrt{2})}+\sqrt{(2\sqrt{2})}$. ſeu $5+\sqrt{\sqrt{250}}$

ſeu $\sqrt{\sqrt{162}}+\sqrt{\sqrt{8}}$

$$\begin{array}{rr} \sqrt{(3+\sqrt{2})} & \sqrt{(3\ [illegible]} \\ \sqrt{(5-\sqrt{3})} & \sqrt{(3\ [illegible]\ 2)} \\ \hline -3\sqrt{3}-\sqrt{6} & -3\sqrt{2}-2 \\ 15+5\sqrt{2} & 9+3\sqrt{2} \\ \hline \sqrt{(15+5\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{6})} & \sqrt{7} \end{array}$$

Dicuntur iſtiuſmodi Radices, *qualis eſt* $\sqrt{(3+\sqrt{2})}$, univerſales.

(*a*) *Nouveaux Elémens* d'*Algèbre*, Lib. I. Probl. 4. & ſeqq. p. 7. & ſeqq.

SCHO-

SCHOLION III.

71. Radices *vero* imaginariæ *dicuntur, si quantitas sub signo radicali fuerit negativa, veluti* $\sqrt{-2}$, *cum quadratum* -2 *sit quantitas impossibilis, propterea quod omne quadratum sit positivum* (§. 246 Arithm. & §. 37 Anal.). *Facile autem patet additionem & subtractionem radicum imaginariarum eodem modo fieri debere ac realium.* Ita $\sqrt{-18}+\sqrt{-8}=3\sqrt{-2}+2\sqrt{-2}=5\sqrt{-2}=\sqrt{-50}$ & $\sqrt{-18}-\sqrt{-8}=\sqrt{-2}$. *Quoniam vero quantitas privativa sub signo radicali consideratur instar positivæ, in multiplicatione signum non mutatur, sed facto perinde ac factoribus præfigitur signum* $-$: *alias enim factores imaginarii efficerent factum reale, quod utique absurdum. Quamobrem regula de signis tantummodo observatur respectu radicum, minime vero respectu quantitatum sub signo radicali positarum.*

Ex. gr. $\sqrt{-5}-\sqrt{-7}$ multiplied by $\sqrt{-3}$ gives $\sqrt{-15}-\sqrt{-21}$

$\sqrt{-3}+\sqrt{-2}$ multiplied by $+\sqrt{-3}$ gives $-3+\sqrt{-6}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{-8}+\sqrt{-2} \\ \sqrt{-8}-\sqrt{-2} \\ \hline +4+2 \\ -8-4 \\ \hline -6 \end{array}$$

Nimirum $\sqrt{-2}.\sqrt{-2}=-2$, & $+1.-1=-1$. *Ergo* $-1.-2=+2$

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{-5}+2\sqrt{-3} \\ 3\sqrt{-5}-2\sqrt{-2} \\ \hline -6\sqrt{-10}-4\sqrt{-6} \\ -45+6\sqrt{-15} \qquad\qquad \\ \hline -45-6\sqrt{-10}+6\sqrt{-15}-4\sqrt{-6} \end{array}$$

CAPUT III.

De usu Calculi litteralis in inveniendis Theorematis.

PROBLEMA XIV.

72. *Invenire, qualis numerus prodeat ex parium additione, subtractione, ac multiplicatione.*

Quoniam numerus par per 2 dividi potest (§. 72 *Arithm.*), dicatur $2a$. Similiter alius numerus par sit $=2c$. Erit

$2a$	$2a$	$2a$
$2c$	$2c$	$2c$
Summa $2a+2c$	Diff. $2a-2c$	Fact. $4ac$

Theorema: Summa, item differentia, atque factum duorum numerorum parium est numerus par.

PROBLEMA XV.

73. *Invenire, qualis numerus prodeat, si parem impari addas, vel parem ab impari subtrahas, vel denique parem per imparem multiplices.*

Numerus par sit $2a$ (§.72 *Arith.*), impar $2c+1$ (§. 73 *Arithm.*). Erit

$2c+1$	$2c+1$
$2a$	$2a$
$2a+2c+1$ Summa:	$2c+1-2a$ Diff.

$$\begin{array}{r} 2c+1 \\ 2a \\ \hline 4ac+2a \end{array}$$ Factum.

Theorema. Si parem impari addas, aut unum ex altero ſubtrahas; ibi aggregatum, hic differentia eſt numerus impar. Si vero numerus par & impar ſe mutuo multiplicent, factum eſt numerus par.

PROBLEMA XVI.

74. *Invenire, qualis prodeat numerus, ſi impar impari addatur, aut unus ex altero ſubtrahatur, aut ſi impar imparem multiplicet.*

Sint numeri impares $2a+1$ & $2b+1$ (§. 73 *Arithm.*): erit

$$\begin{array}{ll} 2a+1 & 2a+1 \\ 2b+1 & 2b+1 \\ \hline 2a+2b+2 \text{ Summa.} & 2a-2b \text{ Differ.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a+1 \\ 2b+1 \\ \hline +2a+1 \\ 4ab+2b \\ \hline 4ab+2a+2b+1 \text{ Factum.} \end{array}$$

Theorema: Si numerus impar impari additur, aut ab eo ſubtrahitur; ibi ſumma, hic differentia eſt numerus par. Si vero impar imparem multiplicet, factum eſt numerus impar.

PROBLEMA XVII.

75. *Invenire, qualis numerus prodeat, ſi meros numeros pares, aut numeros impares multitudine pari, aut denique numeros impares multitudine impari addas.*

Sint numeri pares $2a$, $2b$, $2c$, $2d$, &c. erit ſumma $2a+2b+2c+2d$ &c. numerus par (§. 72 *Arithm.*).

Theorema: Summa numerorum parium quotcunque eſt numerus par.

Sint numeri impares $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$ &c. (§. 73 *Arithm.*) numerus eorundem par $2m$ (§. 72 *Arithm.*). Erit ſumma $2a+2b+2c+2d$ &c. $+2m$, numerus par (§. 72 *Arithm.*). Tot ſcilicet ſunt unitates, quot termini.

Theorema. Summa numerorum imparium quotcunque, multitudine pari, eſt numerus par.

Sint numeri impares, ut ante, $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$, &c. numerus eorundem impar $2m+1$. Erit ſumma $2a+2b+2c+2d$ &c. $+2m+1$, numerus impar (§. 73 *Arithm.*).

Theorema. Summa numerorum imparium quotcunque, ſi numero impares fuerint, numerus eſt impar.

SCHOLION.

76. *Notetur in his Problematibus denominandi artificium, quod conſiſtit in analytica expreſſione numeri paris & imparis, quæ eorum definitiones repræſentat.*

PROBLEMA XVIII.

77. *Invenire, qualis ſit numerus per quem impar parem metitur.*

Quodſi numerus impar parem metitur, erit par factum ex impari per parem, (§. 74 *Arithm.* & 73 *Anal.*), adeoque $(2a+1)\,2b = 4ab+2b$. Eſt igitur $(4ab+2b) : (2a+1) = 2b$ (§. 210 *Arithm.*).

Theorema. Impar metiens parem eum metitur per parem.

COROLLARIUM I.

78. Patet ſimul, numerum, qui metitur parem per imparem, eſſe parem.

COROLLARIUM II.

79. Et quoniam $(2ab+b) : (2a+1) = b$; liquet porro, ſi impar metiatur parem, illum quoque hujus dimidium metiri.

PRO-

PROBLEMA XIX.

80. *Invenire, qualis ſit numerus, per quem impar imparem metitur.*

Quodſi impar imparem metitur, erit hic factum ex impari in imparem (§.74 *Arith.* & §.74 *Anal.*), adeoque $(2a+1)(2b+1)$ ſeu $4ab+2a+2b+1$. Eſt igitur $(4ab+2ab+2b+1):(2a+1)=2b+1$ numerus impar (§.210 *Arithm.*).

Theorema. Impar metiens imparem eum metitur per imparem.

PROBLEMA XX.

81. *Determinare differentiam quadratorum, quorum radices unitate differunt.*

Sit radix una $= n$, erit altera $n+1$:
quadratum majoris n^2+2n+1 (§. 246
minoris n^2 *Arithm.*)

Differentia $2n+1$

Theorema. Differentia duorum quadratorum, quorum radices unitate differunt, eſt numerus impar duplo radicis minoris unitate aucto æqualis, ſeu ſumma radicum.

COROLLARIUM I.

82. Facillime ergo conſtruuntur Tabulæ numerorum quadratorum, pro radicibus in ſerie naturali progredientibus. Summa nempe radicis antecedentis & conſequentis continuo additur quadrato antecedenti, ut prodeat conſequens.

COROLLARIUM II.

83. Si $n=1$, erit $2n+1=3$: ſi $n=2$, erit $2n+1=5$: ſi $n=3$, erit $2n+1=7$: ſi $n=4$, erit $2n+1=9$ &c. Differentiæ itaque numerorum quadratorum ſunt numeri impares in continua ſerie progredientes: unde ex continua numerorum imparium additione naſcuntur numeri quadrati.

Radic.	Num.impar.	Num.Quadr.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64
9	17	81
10	19	100

PROBLEMA XXI.

84. *Determinare differentiam duorum cuborum, quorum radices unitate differunt.*

Sint radices n & $n+1$: erit
Cubus major n^3+3n^2+3n+1 (§.248
minor n^3 *Arithm.*)

Differentia $3n^2+3n+1$, hoc eſt, $n^2+2n+1+2n^2+n$. Sed $n^2+2n+1=(n+1)^2$. Ergo differentia inventa $(n+1)^2+2n^2+$ [illegible]

Theorema. Differentia duorum numerorum cubicorum, quorum [illegible] unitate differunt, eſt aggregatum ex quadrato radicis majoris, duplo quadrato minoris & radice minore.

Sit jam radix tertia	$n+2$
erit cubus	$n^3+6n^2+12n+8$
præced.	n^3+3n^2+3n+1
Differ.	$3n^2+9n+7$
Differ. præc.	$3n^2+3n+1$
Differ. 2.	$6n+6$

Theorema 2. Differentia secunda trium cuborum in serie naturali est aggregatum ex sextuplo radicis primæ & senario, seu factum ex radice secunda in senarium.

Quod si jam $n = 1$, erit $6n + 6 = 6 + 6 = 12$; si $n = 2$, erit $6n + 6 = 12 + 6 = 18$: si $n = 3$, $6n + 6 = 18 + 6 = 24$: si $n = 4$, $6n + 6 = 24 + 6 = 30$, &c.

Theorema 3. Differentiæ secundæ cuborum in serie naturali progredientium est progressio arithmetica, cujus terminus primus 12, differentia terminorum 6.

COROLLARIUM.

85. Constructo itaque numerorum quadratorum Canone (§. 82), per solam additionem inde porro construitur Canon numerorum cubicorum, per Theorema primum; nondum constructo, per tertium, quemadmodum ex sequente Tabula liquet.

Rad.	Cubi	Diff. 1.	Diff. 2.
1	1		
		7	
2	8		12
		19	
3	27		18
		37	
4	64		24
		61	
5	125		30
		91	
6	216		36
		127	
7	343		42
		169	
8	512		48
		217	
9	729		54
		271	
10	1000		

PROBLEMA XXII.

86. *Determinare quantitatem rectanguli ex summa duarum quantitatum in majorem vel in minorem, itemque in differentiam earundem.*

Sit quantitas major Q, minor q: erit summa $Q + q$, differentia $Q - q$. Hinc (§. 375 *Geom.*)

$$\begin{array}{c} Q + q \\ Q \\ \hline Q^2 + Qq \end{array} \qquad \begin{array}{c} Q + q \\ q \\ \hline Qq + q^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} Q + q & \\ Q - q & \\ \hline - Qq & - q^2 \\ Q^2 + Qq & \\ \hline Q^2 & - q^2 \end{array}$$

Theorema. Rectangulum ex summa duarum quantitatum (ex. gr. linearum) in alterutram æquatur rectangulo partis unius in alteram atque quadrato partis alterutrius. Rectangulum vero ex summa in differentiam æquale est differentiæ quadratorum partium.

COROLLARIUM.

87. Quodsi rectangula $Q^2 + Qq$ & $Qq + q^2$ addantur; prodit $Q^2 + 2Qq + q^2$ quadratum ipsius $Q + q$ (§. 261 *Arithm.*). Quare rectangula ex toto in partem alterutram simul æquantur quadrato totius.

PROBLEMA XXIII.

88. *Si totum sit divisum in duas partes æquales & in duas inæquales, determinare rectangulum partium inæqualium.*

Sint partes æquales a & a, differentia inter partem æqualem & inæqualem b; erit inæqualium major $a + b$, minor $a - b$; consequenter $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Ergo si addatur b^2, habebitur a^2.

Theorema. Si totum sit divisum in duas partes æquales & inæquales; erit rectangulum partium inæqualium una cum quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali, æquale quadrato partis æqualis.

COROL-

COROLLARIUM.

89. Quoniam $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ & $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (§. 261 *Arith.*); erit summa $2a^2 + 2b^2$, hoc est, summa quadratorum partium inæqualium æqualis est duplo quadrato partis dimidiæ & duplo quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali.

PROBLEMA XXIV.

90. *Determinare alia rectangula ex partibus duabus, in quas totum aliquod divisum.*

Sint partes Q & q: erit totum $Q+q$, hujus quadratum $Q^2 + 2Qq + q^2$. Quodsi Q^2 addas; prodibit $2Q^2 + 2Qq + q^2 = 2Q(Q+q) + q^2$.

Theorema. Quadratum totius, una cum quadrato partis unius, æquale est rectangulo ex duplo ejusdem partis in totum atque quadrato partis alterius.

Quodsi $2Q+q$ in scipsum ducas; prodibit $4Q^2 + 4Qq + q^2$.

Theorema. Quadratum ex toto & parte una æquatur quadrato partis alterius, una cum quadruplo quadrato partis illius & quadruplo rectangulo partium in se invicem.

PROBLEMA XXV.

91. *Determinare quantitatem rectanguli ex toto in partes tres inæquales diviso atque parte una.*

Sit totum $a+b+c$; erit $(a+b+c)c = ac+bc+c^2$.

Theorema. Rectangulum ex toto in tres partes inæquales diviso in partem unam æquatur quadrato ejusdem partis, atque rectangulo ex eadem in summam duarum reliquarum.

PROBLEMA XXVI.

92. *Determinare quantitatem rectanguli ex linea in partes quotcunque divisa & insecta altera.*

Sint partes lineæ sectæ a, b, c, &c. erit linea secta $= a+b+c$, &c. Sit porro linea insecta $= d$: erit $(a+b+c$, &c.$)\, d = ad+bd+cd$, &c.

Theorema. Si linea recta fuerit in partes quotcunque divisa & præterea alia insecta, erit rectangulum sub iis comprehensum æquale rectangulis sub insecta & singulis sectæ partibus contentis.

PROBLEMA XXVII.

93. *Determinare quantitatem rectangulorum ex toto in duas partes diviso in partes singulas.*

Sit totum $= a+b$, erit $(a+b)a = a^2+ab$ & $(a+b)b = ab+b^2$. Ergo summa $= a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ (§. 261 *Arithm.*),

Theorema. Si recta secta sit utcunque, erunt rectangula sub tota & partibus comprehensa quadrato totius æqualia.

PROBLEMA XXVIII.

94. *Determinare quantitatem rectanguli ex toto in duas partes æquales diviso & adjecto in adjectum.*

Sit totum in duas partes æquales divisum $= 2a$ & adjectum $= c$; erit compositum $= 2a+c$; consequenter $(2a+c)c = 2ac + c^2$. Sed $(a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$. Ergo differentia $= a^2$.

Theorema. Rectangulum sub toto & adjecto in adjectum, una cum quadrato partis dimidiæ, est æquale quadrato compositi ex dimidio & adjecto.

PROBLEMA XXIX.

95. *Invenire Theorema generale pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo.*

Sit $a+b$ radix binomia. Ducatur ea in ſe ipſam, erit $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, &c. (§. 250 *Arithm.*) ceu videre eſt ex Tabula, quam hic exhibemus.

$1a$	$1b$									
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$								
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$							
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$						
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$					
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$				
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$			
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$		
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$	
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

Ex Tabulæ hujus conſideratione manifeſtum eſt, terminos potentiarum componi ex quibuſdam factis litteralibus, & numeris præfixis, quos *Uncias* cum OUGHTREDO (*a*) vocant. Patet autem ulterius, facta reperiri, ſi fiant duæ progreſſiones geometricæ, quarum [illegible] potentia deſiderata partis primæ radicis incipiat & in unitate deſinat, altera vero ab unitate incipiat & in deſiderata potentia partis ſecundæ radicis deſinat, atque termini ejuſdem ordinis in utraque ſerie in ſe invicem ducantur. Ex. gr. quærenda potentia ſexta: ſcribe

$a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a, 1$. Series I.
$1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6$. Series II.

erunt $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$ facta, ex quibus componitur potentia ſexta ipſius $a+b$.

(*a*) *Clavis Mathematica*, c. 12. §. 6. p. m. 38.

Apparet denique, uncias reperiri, ſi exponentes potentiarum ſecundæ ſeriei ſeu ipſius b ſub exponentibus poteſtatum primæ ſeriei ſeu ipſius a ſcribantur, & nota prima ex ſerie ſuperiore ſumatur pro numeratore, prima ex inferiore pro denominatore fractionis, quæ vicem ſubit unciæ termini ſecundi poteſtatis; ſimiliter factum ex nota prima in ſecundam ex ſerie ſuperiore ſumatur pro numeratore, factum ex prima in ſecundam ex ſerie inferiori pro denominatore fractionis, quæ unciæ termini tertii potentiæ æqualis &c. Ex. gr. pro potentia ſexta erit:

6. 5.

6. 5. 4. 3. 2. 1.
1. 2. 3. 4. 5. 6.

Hinc $\frac{6}{1}=6$, uncia termini ſecundi potentiæ ſextæ; $\frac{6.5}{1.2}=\frac{30}{2}=15$, uncia termini tertii; $\frac{6.5.4}{1.2.3}=\frac{120}{6}=20$, uncia termini quarti; $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}=\frac{6.5}{1.2}=\frac{30}{2}=15$, uncia termini quinti; $\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}=\frac{6}{1}=6$, uncia termini ſexti; $\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}=1$, uncia termini ultimi.

Habemus adeo methodum datam radicem binomiam ad quamcunque potentiam determinatam evehendi. Quodſi vero regulam pro potentia indeterminata deſideres, non alia re opus eſt, quam ut exponens dicatur m: ita habebimus

$$a^m,\ a^{m-1},\ a^{m-2},\ a^{m-3},\ a^{m-4},\ a^{m-5}$$
$$1,\ b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ b^5, \text{\&c.}$$

adeoque $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 + a^{m-5}b^5$, &c. quæ ſunt facta pro terminis potentiæ indeterminatæ in infinitum continuandæ. Similiter inveniuntur unciæ, ut ante. Cum enim exponentes ſint:

$$\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ m-4.\ m-5.}{1.\ 2\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6} \text{ \&c.}$$

erit $\frac{m}{1}$, uncia termini ſecundi potentiæ;
$\frac{m.m-1}{1.2}$, uncia tertii;
$\frac{m.m-1}{1.\ 2}\frac{m-2}{3}$, uncia quarti;
$\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4}$, uncia quinti;
$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5}$, uncia ſexti;
$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6}$, uncia ſeptimi &c.

Quare ſi has uncias in facta ipſis reſpondentia & paulo ante reperta ducas; prodibit formula binomii ad potentiam indeterminatam elevati;

$$a^m$$
$$+\frac{m}{1}a^{m-1}b$$
$$+\frac{m.m-1}{1.\ 2}a^{m-2}b^2$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ \ 3}a^{m-3}b^3$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4}a^{m-4}b^4$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5}a^{m-5}b^5$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6}a^{m-6}b^6$$

&c. in infinitum

Quoniam vero $a^{m-1}=a^m : a$; $a^{m-2}=a^m : a^2$; $a^{m-3}=a^m : a^3$; $a^{m-4}=a^m : a^4$; $a^{m-5}=a^m : a^5$; &c. in infinit. (§. 54) his valoribus ſubſtitutis (§. 15 *Arithm.*) formula in ſequentem degenerat:

$$a^m$$
$$+\frac{m.a^m b}{1.a}$$
$$+\frac{m.m-1.a^m b^2}{1.\ 2.\ \ a^2}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.a^m b^3}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ a^3}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.a^m b^4}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ a^4}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.a^m b^5}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ a^5}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.a^m b^6}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6.\ \ a^6}$$

&c. in infinitum.

Quodſi jam porro cum viro ſummo *Iſaaco* NEWTONO (*a*) ponamus $a=P$ & $b : a=Q$; crit $a^m=P^m$; $b^2 : a^2=Q^2$; $b^3 : a^3=Q^3$; $b^4 : a^4=Q^4$; $b^5 : a^5=Q^5$ &c.

(*a*) In Epiſtola A. 1676 ad LEIBNITIUM data, apud WALLISIUM, Operum Vol. III. f. 622.

&c. consequenter his valoribus substitutis formula:

$$P^m$$
$$+\frac{m}{1}P^mQ$$
$$+\frac{m.m-1}{1.\ \ 2.}P^mQ^2$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.\ \ 2.\ \ \ 3}P^mQ^3$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ \ 2.\ \ \ 3.\ \ \ 4}P^mQ^4 \text{ \&c.}$$

Ponatur porro $P^m = A$; erit $\frac{m}{1}P^mQ = \frac{m}{1}AQ$.

Sit $\frac{m}{1}P^mQ = B$: erit $\frac{m.m-1}{1.\ \ 2}P^mQ^2 = \frac{m-1}{2}BQ$.

Sit $\frac{m-1}{2}BQ = C$; erit $\frac{m.m-1.m-2}{1.\ \ 2.\ \ \ 3}P^mQ^3 = \frac{m-2}{3}CQ$.

Sit $\frac{m-2}{3}CQ = D$; erit $\frac{m.m-1.m-2.}{1.\ \ 2.\ \ \ 3}\frac{m-3}{4}P^mQ^4 = \frac{m-3}{4}DQ$

Sit $\frac{m-3}{4}DQ = E$; erit $\frac{m.m-1.m-2.}{1.\ \ 2.\ \ \ 3}\frac{m-3.m-4}{4.\ \ \ 5}P^mQ^5 = \frac{m-4}{5}EQ$

Sit $\frac{m-4}{5}EQ = F$; erit $\frac{m.m-1.m-2.}{1.\ \ 2.\ \ \ 3}\frac{m-3.m-4.m-5}{4.\ \ \ 5.\ \ \ 6}P^mQ^6 = \frac{m-5}{6}FQ$

&c. in infinitum.

Habetur ergo tandem

$$(a+b)^m = (P+PQ)^m = P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \frac{m-4}{5} + EQ\ \frac{m-5}{6}FQ \text{ \&c in infinit.}$$

SCHOLION I.

96. *Equidem hoc Theorema nonnisi per inductionem eruimus, quæ inter demonstrandi methodos locum minime habet: sed cum hæc inductio fundetur in observatione legis constantis atque necessariæ, in inveniendo tuto adhibetur; etsi consultum sit, reperta alio postea modo demonstrari.*

SCHOLION II.

97. *Ut vero Theorema facilius intelligatur, exemplo numerico id illustrare lubet. Ponamus ergo inveniri debere dignitatem quartam radicis* 18 *seu* 10 + 8: *erit* $m = 4$, $P = 10$, $Q = 8 : 10 = \frac{4}{5}$, *consequenter*

$$P^m = 10^4 = 10000 = A$$
$$mAQ = 4.\ 10000.\frac{4}{5} = \frac{160000}{5} = 32000 = B$$
$$\frac{m-1}{2}BQ = \frac{3}{2}.\ 32000.\frac{4}{5} = \frac{6}{5}.32000 = 6.6400 = 38400 = C$$
$$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{2}{3}.\ 38400.\ \frac{4}{5} = \frac{8}{15}.\ 38400\ \frac{307200}{15} = 20480 = D$$
$$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{1}{4}.\ 20480.\ \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.\ 20480 = \frac{20480}{5} = 4096 = E$$
$$\frac{m-4}{5}EQ = 0.\ 4096.\frac{4}{5} = 0.$$

10000	= A
32000	= B
38400	= C
20480	= D
4096	= E
104976	Dignitas quarta ipsius 18.

Eadem dignitas invenitur, si 18 *in duas quascunque partes alias, ex. gr. in* 6 *&* 12 *secetur: quo in casu erit* $P = 6$ & $Q = 12 : 6 = 2$, *consequenter*

$$P^m = 6^4 = 1296 = A$$
$$m\,AQ = 4.1296.\ 2 = 8.\ 1296 = 10368 = B$$
$$\frac{m-1}{2}BQ = \frac{3}{2}.10368.2 = 3.10368 = 31104 = C$$
$$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{2}{3}.31104.2 = \frac{4}{3}.31104 = \frac{124416}{3} = 41472 = D$$

$m-3$

$\frac{m-3}{4}$ DQ $= \frac{1}{4}.41472.2 = \frac{2}{4}.41472 =$
$\frac{41472}{2} = 20736 = E$

$\frac{m-4}{5}$ EQ $= 0.20736.2 = 0.$

1296	= A
10368	= B
31104	= C
41472	= D
20736	= E
104976	Dignitas quarta ipsius 18.

Patet adeo seriem terminari, si m *explicetur per numerum determinatum.*

COROLLARIUM I.

98. Si m explicetur per numerum fractum, series $P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ$ &c. exprimet radicem indeterminatam ipsius $P + PQ$ (§. 57), adeoque idem Theorema extractioni radicis inservit. Ex.gr. Sit ex $aa - xx$ extrahenda radix quadrata; erit $m = \frac{1}{2}$ (§. *cit.*), $P = x^2$ & $Q = -x^2 : a^2$. Unde

$$P^m = a^{2:2} = a = A$$

$$\frac{m}{1} AQ = \frac{1}{2}a. - x^2 : a^2 = -\frac{x^2}{2a} = B$$

$$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{\frac{1}{2}-1}{2}. -\frac{x^2}{2a}. -\frac{x^2}{a^2}$$

$$= \frac{1-2}{4}.\frac{x^4}{2a^3} = -\frac{x^4}{8a^3} = C$$

$$\frac{m-2}{3} CQ = \frac{\frac{1}{2}-2}{3}. -\frac{x^4}{8a^3}. -\frac{x^2}{a^2} =$$

$$\frac{1-4}{6}.\frac{x^6}{8a^5} = -\frac{3}{6}.\frac{x^6}{8a^5} = -\frac{x^6}{16a^5} = D$$

$$\frac{m-3}{4} DQ = \frac{\frac{1}{2}-3}{4}. -\frac{x^6}{16a^5}. -\frac{x^2}{a^2} =$$

$$\frac{1-6}{8}.\frac{x^8}{16a^7} = -\frac{5x^8}{128a^7} = E$$

$$\frac{m-4}{5} EQ = \frac{\frac{1}{2}-4}{5}. -\frac{5x^8}{128a^7}. -\frac{x^2}{a^2} =$$

$$\frac{1-8}{10}. \frac{5x^{10}}{128a^9} = -\frac{7x^{10}}{256a^9}, \text{ \&c. in inf.}$$

Est adeo $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$, &c. in infin.

SCHOLION III.

99. *Si cui molestus evadit fractionum calculus, is cum* NEWTONO *in formula generali substituat pro* m *exponentem fractum* m : n, *formulam sequentem obtenturus :*

$$(P + PQ)^{m:n} = P^{m:n} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \frac{m-4n}{5n} EQ$$

&c. *Hac vero formula ubi utetur, quantitates ad potentiam evecturus, pro* n *assumet* 1.

SCHOLION IV.

100. *Ex numerorum determinatorum potentiis radicem extracturus adhibeat formulam* $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b$ *&c. quam in dato casu determinet, numero pro* m *substituto. Ex. gr. Sit ex* 104976 *extrahenda radix quartana : erit* m = 4: *unde habetur* $a^4 + 4a^3 b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, *& juxta hoc Theorema extractio radicis quartanæ eodem modo peragitur, quo quadratam & cubicam* (§. 269. Arithm.). *inquisivimus. Nimirum, cum præter* a^4 *seu quadratoquadratum partis primæ radicis, quatuor auferri debeant facta; resecentur versus dexteram notæ quatuor & potentia quarta proxime accedens ad* 10 *nempe* 1, *erit* a^4. *En calculi typum:*

10	4976 (18	
1		
	~~8~~ ~~4~~~~9~~~~7~~~~6~~	
$4a^3 =$	4 . . .	
$4a^3b =$	32 . . .	
$6a^2b^2 =$	384 . .	
$4ab^3 =$	2048 .	
$b^4 =$	4096	
	~~8~~ ~~4~~~~9~~~~7~~~~6~~	
	0	

$$4a^3 = 4$$
$$b = 8$$
$$4a^3b = 32$$
$$b^2 = 64$$
$$a^2 = 1$$
$$a^2b^2 = 64$$
$$6$$
$$6a^2b^2 = 384$$
$$b^3 = 512$$
$$4a = 4$$
$$4ab^3 = 2048$$

Si radix plures quam tres notas habuerit; operatio altera repetenda, ut in extractione radicum quadratarum ac cubicarum (§. cit. Arithm.). *Quodsi numerus, ex quo radix extrahenda, non sit dignitas perfecta; dignitas proxime minor sit* = P, *& residuum post extractionem more vulgari institutam per eandem divisum* = Q, m = 1, *&* n *exponens dignitatis, cujus radix desideratur. Ita ope Theorematis in Schol. præc. obtinetur series infinita certa progressionis lege residuam partem radicis exhibens.*

Ex. gr. Quæratur $\sqrt{2}$. *Quoniam quadratum proxime minus* = 1, *& residuum hoc ex* 2 *subducto* = 1; *erit* P = 1, Q = 1. *Præterea* m = 1, *&* n = 2. Hinc

[illegible] = A

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2.4} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6}\cdot -\frac{1}{2.4} = +\frac{1.3}{2.4.6} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8}\cdot\frac{1.3}{2.4.6} = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\frac{7}{10}\cdot -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} = + \frac{1.3.5.7.}{2.4.6.8.10} \text{ \&c.}$$

Est ergo $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} -$ &c.
$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{256}$ &c. in infinitum.

Ubi series fractionum denotat partem radicis unitate minorem. Ceterum cum $\sqrt{2}$ *sit diagonalis quadrati, posito ejus latere* = 1 (§. 420 Geom.); *habetur jam valor diagonalis in terminis rationalibus, unde rationes prope veræ ad praxin quantumlibet sufficientes duci possunt. Ex. gr. si pro diagonali sumatur* $1 + \frac{1}{2}$, *erit ratio* $1 + \frac{1}{2} : 1$ [= 3 : 2] *justo major quam diagonalis ad latus, sed excessus consistet infra* $\frac{1}{8}$. *Si pro diagonali sumatur* $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$ *seu* $\frac{11}{8}$; *erit ratio* $\frac{11}{8} : 1$ [= 11 : 8] *justo minor quam diagonalis ad latus, sed defectu infra* $\frac{1}{16}$ *existente : & ita porro.*

COROLLARIUM II.

101. Quoniam polynomium pro binomio haberi potest, sumtis pluribus partibus pro una; eadem formula polynomiis ad datam dignitatem evehendis inservis.

Ex. gr. Si trinomium $c + d + g$ ad dignitatem aliquam, ex. gr. quartam evehendum; ponatur in formula $a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b$ &c. $c = a$ & $d + g = b$: erit $(c + d + g)^4 = c^4 + 4c^3(d + g) + 6c^2(d + g)^2 + 4c(d + g)^3 + (d + g)^4$. Nempe $a^m = c^4$, $ma^{m-1}b = 4c^3(d + g)$, $\frac{m.m-1}{1.\ 2} a^{m-2}b^2 = 6c^2(d + g)^2$, $\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3.} a^{m-3}b^3 = 4c(d + g)^3$,

m.

$\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4} a^{m-4} b^4 = (d+g)^4.$

Eſt vero, vi ejuſdem Theorematis $(d+g)^2 = d^2 + 2dg + g^2$; $(d+g)^3 = d^3 + 3d^2g + 3dg^2 + g^3$; $(d+g)^4 = d^4 + 4d^3g + 6d^2g^2 + 4dg^3 + g^4$. Ergo $(c+d+g)^4 = c^4 + 4c^3d + 4c^3g + 6c^2d^2 + 12c^2dg + 6c^2g^2 + 4cd^3 + 12cd^2g + 12cdg^2 + 4cg^3 + d^4 + 4d^3g + 6d^2g^2 + 4dg^3 + g^4$.

COROLLARIUM III.

102. Quare ſi infinitinomium fuerit $a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c. in infinit. & in formula pro a ſubſtituatur a, pro b autem $by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c. in infinit. prodibit formula generalis pro infinitinomio ad datam potentiam evehendo aut ex eadem radicem extrahendo. Eſt enim

$$\begin{aligned}
b^2 &= b^2y^2 + 2bcy^3 + c^2y^4 + 2cdy^5 + d^2y^6 \text{ \&c.} \\
&\qquad\qquad + 2bdy^4 + 2bey^5 + 2cey^6 \text{ \&c.} \\
&\qquad\qquad\qquad + 2bfy^6 \text{ \&c.} \\
b^3 &= b^3y^3 + 3b^2cy^4 + 3bc^2y^5 + c^3y^6 \text{ \&c.} \\
&\qquad\qquad + 3b^2dy^5 + 6bcdy^6 \text{ \&c.} \\
&\qquad\qquad\qquad + 3b^2ey^6 \text{ \&c.} \\
b^4 &= + b^4y^4 + 4b^3cy^5 + 6b^2c^2y^6 \text{ \&c.} \\
&\qquad\qquad + 4b^3dy^6 \text{ \&c.} \\
b^5 &= + b^5y^5 + 5b^4cy^6 \text{ \&c.} \\
b^6 &= + b^6y^6 \text{ \&c.}
\end{aligned}$$

Hos ergo valores ſi in formula $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ \ 3} a^{m-3} b^3$ &c. ſubſtituas, & terminos homogeneos, in quibus nempe eadem potentia ipſius y occurrit, decenter coordines; prodibit formula pro infinitinomio:

$$a^m$$

$$+ a^{m-1}by$$

$$\left.\begin{aligned} &+ \frac{m.m-1}{1.\ 2} a^{m-2} b^2 \\ &+ \frac{m}{1} a^{m-1} c \end{aligned}\right\} y^2$$

$$\left.\begin{aligned} &+ \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ \ 3} a^{m-3} b^3 \\ &+ \frac{m.m-1}{1.\ \ 1} a^{m-2} bc \\ &+ \frac{m}{1} a^{m-1} d \end{aligned}\right\} y^3$$

$$\left.\begin{aligned} &+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4} a^{m-4} b^4 \\ &+ \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ \ 1} a^{m-3} b^2c \\ &+ \frac{m.m-1}{1.\ 2} a^{m-2} c^2 \\ &+ \frac{m.m-1}{1.\ \ 1} a^{m-2} bd \\ &+ \frac{m}{1} a^{m-1} e \end{aligned}\right\} y^4$$

$$\left.\begin{aligned} &+ \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5} a^{m-5} b^5 \\ &+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 1} a^{m-4} b^3c \\ &+ \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ \ 1} a^{m-3} b^2d \\ &+ \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ \ 1} a^{m-3} bc^2 \\ &+ \frac{m.m-1}{1.\ \ 1} a^{m-2} cd \\ &+ \frac{m.m-1}{1.\ 1} a^{m-2} be \\ &+ \frac{m}{1} a^{m-1} f \end{aligned}\right\} y^5$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}a^{m-6}b^6 \\
+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 1}a^{m-5}b^4c \\
+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 1.\ 2}a^{m-4}b^2c^2 \\
+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 1}a^{m-4}b^3d \\
+\frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3.}a^{m-3}c^3 \\
+\frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 1.\ 1}a^{m-3}bcd \\
+\frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 1}a^{m-3}b^2e \\
+\frac{m.\ m-1}{1.\ 2}a^{m-2}d^2 \\
+\frac{m.\ m-1}{1.\ 1}a^{m-2}ce \\
+\frac{m.\ m-1}{1.\ 1}a^{m-2}bf \\
+\frac{m}{1}a^{m-1}g
\end{array}\right\} y^6$$

&c. &c. in infinit.

COROLLARIUM IV.

103. Eodem modo patet, ſi infinitinomium fuerit $ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + fy^6$ &c. ad dignitatem m evehendum; in ſerie antecedente tantum omnes terminos multiplicandos eſſe per y^m, ita ut unciæ retineantur eædem iidemque coëfficientes, dignitates vero ipſius y ſint $y^m + y^{m+1} + y^{m+2} + y^{m+3} + y^{m+4} + y^{m+5} + y^{m+6}$ &c.

SCHOLION V.

104. *Conſtat adeo idem Theorema, quod pro binomio dedimus, etiam infinitinomio ad dignitatem deſideratam evehendo ſufficere. Tyrones illud ſub initium ſtudii analytici prætermittant, donec inferius in Analyſi infinitorum eodem opus habuerint. Immo infinitinomium ad poteſtatem determinatam facile evehitur per formulas ſpeciales ſuperius allatas. Ex. gr. Sit* $hx + ix^2 + kx^3 + lx^4 + mx^5 +$ &c. *evehenda ad dignitatem ſecundam : cum* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, *erit*

$$\begin{array}{l}
h^2x^2 + 2hix^3 + i^2x^4 \\
\qquad\qquad + 2hkx^4 + 2ikx^5 + k^2x^6\ \&c. \\
\qquad\qquad\qquad + 2hlx^5 + 2ilx^6\ \&c. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 2hmx^6\ \&c.
\end{array}$$

(§. 265 Arithm.). *Nimirum primo ſumuntur duo tantummodo termini, veluti hic* $hx + ix^2$, *& quæritur ejus potentia deſiderata, veluti hic ſecunda. Deinde* $hx + ix^2$, *habentur pro termino uno,* kx^3 *pro altero, atque ſic denuo per formulam binomii determinatur potentia deſiderata, veluti hic ſecunda. Porro* $hx + ix^2 + kx^3$ *ſumuntur pro termino uno &* lx^4 *pro altero, & ita porro. Quæ eadem ſeries invenitur, ſi in generali* (§. 102) *fiat* $m = 2$, $y = x$, $a = h$, $b = i$, $c = k$, $d = l$, $e = m$, &c. *Eſt enim :*

$$a^m y^m = h^2x^2$$

$$\frac{m}{1}a^{m-1}\,b\,y^{m+1} = 2hix^3$$

$$\frac{m.\ m-1}{1.\ \ 2}a^{m-2}\,b^2\,y^{m+2} = \tfrac{2}{2}h^0i^2x^4 = i^2x^4.$$

$$\frac{m}{1}a^{m-1}\,c\,y^{m+2} = 2hkx^4\ \&c.$$

SCHOLION VI.

105. *Ceterum notetur artificium, quo caſus infiniti, immo infinities infiniti, ad regulam eandem reducuntur.*

PROBLEMA XXIX.

106. *Determinare ſummam termini primi & ultimi in progreſſione arithmetica.*

Sit terminus primus a, differentia terminorum ſive creſcentium, ſive decreſcentium, d; erit (§. 333 *Arithm.*).

$a, a \pm d, \; a \pm 2d, \; a \pm 3d, \; a \pm 4d, \; a \pm 5d,$
$a \pm 4d \qquad a \pm 2d \qquad a$

$2a \pm 5d, \qquad 2a \pm 5d, \qquad 2a \pm 5d,$

Item

$a, a \pm d, \quad a \pm 2d, \quad a \pm 3d, \quad a \pm 4d$
$a \pm 3d \qquad 2 \qquad a$

$2a \pm 4d \qquad 2a \pm 4d \qquad 2a \pm 4d$

Theorema. In progreſſione arithmetica tam creſcente, quam decreſcente, ſumma termini primi & ultimi æqualis eſt ſummæ duorum quorumlibet mediorum ab extremis æquidiſtantium, aut medii duplo, ſi numerus terminorum impar.

Ex. gr. $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21$
$12 \quad 9 \quad 6 \quad 3$

$24 = 24 = 24 = 24$

COROLLARIUM I.

107. Habetur ergo ſumma progreſſionis arithmeticæ, ſi ſumma termini primi & ultimi ducatur in dimidium terminorum numerum.

COROLLARIUM II.

108. Quodſi adeo ſit terminus primus a, differentia d, numerus terminorum n, erit ultimus $a + (n-1)d$ (§. 333 *Arith.*); conſequenter ſumma progreſſionis $\frac{1}{2}n\,(2a + (n-1)\,d)$ (§. 107) $= an + \frac{1}{2}(n^2 - n)\,d$. Ex datis itaque termino primo a, differentia d, & numero terminorum n, invenitur ſumma progreſſionis, ſi facto ex termino primo in numerum terminorum addatur factum ex differentia eorundem in ſemidifferentiam numeri terminorum a quadrato ejuſdem. Ex. gr. Sit $a = 3$, $n = 7$, $d = 3$, erit ſumma $= 21 + \frac{49-7}{2} \cdot 3 = 21 + \frac{42}{2} \cdot 3 = 21 + 21 \cdot 3 = 21 + 63 = 84$.

SCHOLION.

109. *Notent Tyrones regulas ex ſymbolis eruturi, ab initio gradatim eſſe progrediendum, exprimendo nempe ſigillatim quodlibet ſymbolum per rem denotatam & quamlibet operationem ſignis repræſentatam per nomina convenientia. Ex. gr. in* an *eſt* a *terminus primus &* n *numerus terminorum,* ex hypoth. *Sed* an *eſt factum ex* a *in* n (§. 8). *Ergo pro* an *ſubſtituitur in regula factum ex termino primo in numerum terminorum. Porro* n^2 *eſt quadratum ipſius* n (§. 254 Arithm.). *Sed* n *eſt numerus terminorum: ergo* n^2 *quadratum numeri terminorum. Signum* — *indicat ſubtractionem* (§. 8). *Quare* $n^2 - n$ *diffe*[illegible] *numeri terminorum ab ejus quadrato &* $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ *ſemidifferentia iſta. Porro* d *eſt differentia terminorum*, ex hypoth. *adeoque* [illegible] n) d *factum ex illa ſemidiffere*[illegible] *in differ*[illegible]*tiam terminorum. Denique ſignum* + *indicat facta hactenus explicata eſſe addenda. Hac quidem ſyllabizatione opus habent, qui ſine mora ſymbolicas expreſſiones quantitatum ſibi familiares reddere geſtiunt.*

COROLLARIUM III.

110. Sit $a = 1$, $d = 2$, hoc eſt, ſit ſeries numerorum imparium $1, 3, 5, 7$, &c. erit ſumma $= n + n^2 - n$ (§. 108) $= n^2$ (§. 21).

§. 21). Patet adeo numeros quadratos prodire continua numerorum imparium additione; consequenter differentias numerorum quadratorum esse numeros impares: id quod supra alia ratione fuit demonstratum (§. 83).

COROLLARIUM IV.

111. Sit $a = n = \frac{1}{2}d$, erit summa $= n^2 + n^3 - n^2$ (§. 108) $= n^3$ (§. 21). Quilibet adeo cubus resolvitur in progressionem arithmeticam, cujus terminus primus, semidifferentia & numerus terminorum sunt radici ejus æquales. Ita $8 = 2 + 6$, $27 = 3 + 9 + 15$, $64 = 4 + 12 + 20 + 28$.

SCHOLION.

112. *Patet modus ex formulis algebraïcis eruendi Theoremata specialia, qui continetur sub Problemate logico de specierum notionibus ex notione generis formandis* (§. 712 Log.).

DEFINITIO IV.

113. *Denominator* rationis est quotus ex divisione termini majoris per minorem emergens.

COROLLARIUM I.

114. Major ergo prodit, minore per denominatorem multiplicato (§. 212 *Arithm.*): minor vero habetur, majore per denominatorem diviso (§. 210 *Arithm.*). Unde si terminus minor a, denominator m, erit major ma; si terminus major a, minor erit $\frac{a}{m}$. Quare $a : ma$ exprimit rationem minoris inæqualitatis; $a : \frac{a}{m}$ vero rationem majoris (§. 133 *Arithm.*) Immo quoniam $\frac{a}{m} = a. \frac{1}{m}$ (§. 43); si m explicetur per fractionem, cujus numerator unitas, denominator idem cum denominatore rationis, $a : ma$ rationem quacunque designat.

COROLLARIUM II.

115. Quia in ratione majoris inæqualitatis antecedens major consequente (§. 133 *Arithm.*); ejus denominator idem est cum exponente (§. 136 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

116. In ratione minoris inæqualitatis exponens rationis $\frac{a}{ma}$ (§. 136 *Arithm.* & §. 114 *Analys.*): hoc est, $\frac{1}{m}$ (§. 231 *Arithm.*). Æquatur ergo fractioni, cujus numerator unitas, denominator idem cum denominatore rationis.

SCHOLION.

117. *Exponens & denominator rationis Autoribus voces synonymæ sunt. Aliter vero Veteres, aliter Recentiores exponentem definiunt. Nos Veterum definitionem retinuimus in Arithmetica* (§. 136), *tum quod naturam rationum clare explicet, tum quod ad demonstrandum utilis. Etenim si rationis* 2 : 3 *exponens dicatur* $\frac{2}{3}$; *inde intelligitur, antecedentem terminum esse æqualem duabus tertiis consequentis, adeoque pro mensura, qua utrumque metimur, assumi tertiam consequentis partem. Hinc vero clarius cognoscitur rationis hujus natura, quam si cum Recentioribus nonnullis dicas exponentem esse* $1\frac{1}{2}$: *quod innuit, antecedentem in consequente contineri* $1\frac{1}{2}$. *Recentiores vero exponentem rationis eodem modo definientes, quo denominatorem definimus, ideo eundem exponentem constituunt rationum majoris & minoris inæqualitatis* (§. 115), *quod nomen etiam in casu posteriori suggerat* (§. 147 Arithm.) *& demonstrationibus analyticis commodior videatur: quem in finem nos exponentis loco nunc denominatorem assumimus.*

PRO-

PROBLEMA XXX.

118. *Determinare factum ex termino primo in ultimum progressionis geometricæ.*

Sit terminus primus a, denominator m; erit progressio (§. 332 *Arithm.* & §. 114 *Analyſ.*).

$$\begin{array}{ccccccc} a, & ma, & m^2a, & m^3a, & m^4a, & m^5a, & m^6a \\ m^5a & & m^3a, & m^2a & & & a \\ \hline m^6a^2 = & & m^6a^2 = & m^6a^2 & = & & m^6a^2 \end{array}$$

Theorema. In progreſſione geometrica factum extremorum æquatur facto mediorum ab extremis æquidiſtantium, itemque medii quadrato, ſi numerus terminorum impar.

$$\begin{array}{cccccc} \text{Ex. gr. } 3, & 6, & 12, & 24, & 48, & 96 \\ & & & 12 & 6 & 3 \\ \hline & & & 288 = & 288 = & 288 \end{array}$$

PROBLEMA XXXI.

119. *Determinare quotum ex diviſione differentiæ terminorum primi ac ultimi per denominatorem unitate mulctatum emergentem.*

Sit terminus primus a, denominator m, numerus terminorum n; erit terminus ultimus $m^{n-1}a$, differentia primi & ultimi, $m^{n-1}a - a$. Hæc ſi dividatur per $m - 1$, erit quotus $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$ &c.

$$\begin{array}{l} m-1)\ m^{n-1}a - a\ (m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a, \text{ \&c.} \\ \underline{m^{n-1}a - 1m^{n-2}a} \\ \qquad + m^{n-2}a - a \\ \qquad \underline{+ m^{n-2}a - m^{n-3}a} \\ \qquad\qquad + m^{n-3}a - a \\ \qquad\qquad \underline{+ m^{n-3}a - m^{n-4}a} \\ \qquad\qquad\qquad + m^{n-4}a - a \\ \qquad\qquad\qquad \underline{+ m^{n-4}a - m^{n-5}a} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + m^{n-5}a - a \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+ m^{n-5}a - m^{n-6}a} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + m^{n-6}a - a, \text{ \&c.} \end{array}$$

Quodſi n determinetur, ex.gr. per 7, erit $n - 7 = 0$; conſequenter $m^{n-7}a = m^0 a = a$, adeoque diviſio terminatur. Unde patet

Theorema 1. Si differentia termini primi & ultimi progreſſionis geometricæ dividatur per denominatorem unitate mulctatum, quotus eſt ſumma omnium terminorum excepto maximo.

Et cum ſit $m - 1 : 1 = m^{n-1}a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a$ &c. $+ a$ (§. 174, 169 *Arithm.*); patet porro

Theorema 2. In progreſſione geometrica eſt ut denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita differentia termini maximi & minimi ad ſummam omnium terminorum excepto maximo.

COROL-

COROLLARIUM I.

120. Quodſi ergo quoto ex diviſione differentiæ termini maximi & minimi per denominatorem unitate mulctatum emergenti maximus addatur; ſumma totius progreſſionis habetur.

COROLLARIUM II.

121. Sit adeo terminus primus a, denominator m, numerus terminorum n, erit terminus ultimus ſeu maximus $m^{n-1}a$, adeoque ſumma $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m - 1) = (m^n a - m^{n-1}a + m^{n-1}a - a) : (m - 1)$ (§. 235 *Arithm.*) $= (m^n a - a) : (m - 1)$ (§. 21); conſequenter ſi eadem ſumma dicatur f, $m - 1 : m^n - 1 = a : f$, (§. 302 *Arithm.*). Eſt adeo terminus primus (ſeu minimus) progreſſionis ad ejus ſummam ut denominator unitate mulctatus ad ejus dignitatem, cujus exponens numero terminorum æqualis, unitate itidem mulctatam. Sit ex. gr. $m = 2$, $a = 1$, $n = 8$, erit ſumma $(256 - 1) : 1 = 255$.

COROLLARIUM III.

122. Quoniam ſi terminus primus a, denominator m; terminus ultimus $m^{n-1}a$, ſumma $(m^n a - a) : (m - 1)$ (§. 121): erit differentia inter terminum ultimum & ſummam $(m^{n-1}a - a) : (m - 1)$ & differentia inter prim[illegible]nam $\frac{m^n a - a}{m - 1} - a = \frac{m^n a - a - ma + a}{m - 1}$ (§. 235 *Arithm.*) $= \frac{m^n a - ma}{m - 1}$. Eſt ergo diff[illegible]rad[illegible]teriorem ut $(m^{n-1}a - a) : (m - 1)$ ad $(m^n a - ma) : (m - 1)$, hoc eſt, ut $m^{n-1}a - a$ ad $m^n a - ma$ (§. 178 *Arithm.*), hoc eſt, ut 1 ad m (§. 181 *Arithm.*), ſeu ut unitas ad denominatorem.

COROLLARIUM IV.

123. Quare ſi differentia inter terminum primum & ſummam dividatur per differentiam inter ſummam & terminum ultimum; quotus eſt denominator (§. 69 *Arithm.*).

PROBLEMA XXXII.

124. *Inveſtigare rationum ſymptomata.*

Non alia re opus eſt, quam ut termini analytice exprimantur (§. 114), & tentatis quotlibet mutationibus exploretur, utrum duarum rationum exponentes ſint æquales, nec ne (§. 149 *Arithm.*). Sint itaque duæ quantitates a & ma; erit

I. $a : ma$

$\underline{c \quad c}$

$ac : mac = a : ma$

II. $a : ma$

$\underline{c \quad c}$

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma$

III. $a : ma$

$\underline{b : mb}$

$a - b : ma - mb = a : ma = b : mb$

IV. $a : ma$

$\underline{b : mb}$

$a + b : ma + mb = a : ma = b : mb.$

Sit porro $a : ma = b : mb$

erit alternatim $a : b = ma : mb$

inverſe $ma : a = mb : b$

converſim $a + ma : a = b + mb : b$

compoſite $a + ma : ma = b + mb : mb$

diviſim $ma - a : a = mb - b : b$

$ma - a : ma = mb - b : mb$

Item : $a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{ma} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{mb}$

$a : mac = b : mbc$

$a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$

$ac : ma = bc : mb$

$\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$

$ac : mac = b : mb$

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$

$ac : mac = bd : mbd$

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$

$ac : mad$

$$ac : mad = bc : mbd$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{d} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{d}$$

Sit ordinate $a : ma = b : mb$

& $ma : mna = mb : mnb$

erit ex æquo $a : mna = b : mnb$.

Sit perturbate $a : ma = b : mb$

& $ma : mna = \frac{b}{n} : b$

erit ex æquo $a : mna = \frac{b}{n} : mb$

Ipsæ nimirum expressiones, si quoti reducantur per regulas fractionum, rationum similitudinem in omnibus loquuntur. E. gr. $ac : mac = 1 : m$ & $b : mb = 1 : m$. En utrobique exponentem eundem $1 : m$!

COROLLARIUM.

125. Cum sit in progressione geometrica $m - 1 : 1 = m^{n-1}a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a$ &c. $+ a$ (*Th.*2.§.119); sit vero $m - 1 : 1 = ma - a : a$ (§. 124 *n.*1); erit $ma - a : a = m^{n-1}a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a$ &c. $+ a$, hoc est, excessus termini secundi supra primum est ad primum, ut excessus ultimi sive maximi supra primum ad summam omnium terminorum demto maximo.

PROBLEMA XXXIII.

126. *Investigare symptomata progressionum geometricarum ab unitate incipientium.*

Si terminus primus est unitas, secundus idem est cum denominatore rationis (§. 114). Est vero terminus secundus vel numerus primus, vel compositus; & in casu altero vel quadratus, vel potentia alia cujuscunque ordinis, vel nulla. Cum numerus primus in se non possit dividi nisi per unitatem solam (§. 75 *Arithm.*), charactere primitivo m recte exprimitur. Unde emergit series in ratione geometrica progredientium:

$1, m^1, m^2, m^3, m^4, m^5, m^6,$ &c.

Quoniam termini omnes prodeunt continuata multiplicatione secundi in seipsum (§. 332 *Arith.*); per nullum quoque numerum primum dividi possunt exacte, nisi per secundum, seu nullus numerus primus terminos metitur præter secundum. In formula generali idem ad oculum patet: etenim m^2, m^3, m^4, m^5, m^6, &c. non posse dividi nisi per m, patet (§ 54). Et cum terminus secundus in hoc casu sit potentia prima, termini sequentes sint potentiæ continuo ordine progredientes ejusdem numeri (§. 254 *Arithm.*); terminus quilibet major dividi potest per quemlibet minorem, sed per nullum alium (§. 54). Habemus adeo

Theorema 1. Si numerorum ab unitate continue proportionalium proximus unitati primus est; maximum nullus alius metitur, præter eos qui sunt in serie [illegible]ter nec primus alius, nisi secundus, seu ab unitate proximus.

Et quoniam, in omni casu numerorm ab unitate continue proportionalium, termini ultra secundum sunt potentiæ continuo ordine progredientes ejusdem termini secundi, qui communis omnium radix est (§. 332, 250 *Arithm.*); igitur in genere patet

Theorema 2. In serie numerorum ab unitate continue proportionalium, minor quilibet quemlibet majorem metitur per aliquem numerum, qui est in serie.

Cum terminus compositus exacte dividi possit per numerum alium præter unitatem (§. 76 *Arith.*); exprimetur idem per mn. Quare si in progressione geometrica ab unitate incipiente terminus secundus sit mn; erit series

$$1, mn, m^2n^2, m^3n^3, m^4n^4, m^5n^5, m^6n^6, \&c.$$

atque adeo patet numeros primos m & n, qui metiuntur secundum terminum, metiri quoque ceteros omnes, nec præter eos alium quendam numerum primum ceterorum quemcunque metiri. Unde habemus

Theorema 3. Si ab unitate fuerint numeri quotcunque continue proportionales, primus numerus, qui metitur ultimum, metietur & unitati proximum ac omnes intermedios.

In utraque serie exponens termini secundi est 1, tertii 2, quarti 3, quinti 4 &c. consequenter exponens in loco impari est numerus par, in loco pari est impar, & quidem in loco quarto, seu a secundo tertio, exponens est ternarius, & duobus locis intermissis sequitur continuo numerus per [illegible]is, seu quem ternarius metitur. Similiter in loco septimo, seu a secundo sexto, exponens senarius est, & quinque locis intermissis continuo sequitur exponens quem senarius metitur. Singula hinc intuitive patent, quod exponentes ex continua unitatis additione nascantur. Hisce vero notatis prodit

Theorema 4. Si numeri quotcunque fuerint ab unitate continue proportionales, secundus (unitate seclusa) quadratus erit, & uno intermisso omnes: tertius autem cubus est, & duobus intermissis omnes: sextus vero cubus simul & quadratus, & quinque intermissis omnes.

Si terminus primus fuerit unitas, secundus numerus quadratus, vel cubus, vel potentia cujuscunque gradus, erunt series

$$1, m^2, m^4, m^6, m^8, m^{10}, m^{12} \&c.$$
$$1, m^3, m^6, m^9, m^{12}, m^{15}, m^{18} \&c.$$
$$1, m^n, m^{2n}, m^{3n}, m^{4n}, m^{5n}, m^{6n} \&c.$$

Quoniam in qualibet serie termini continuo prodeunt multiplicatione per secundum, exponens secundi continuo additur exponenti termini cujuscunque dati, ut prodeat proxime sequens (§. 54); consequenter cum exponentes omnium terminorum, qui a secundo sequuntur, sint multipli exponentis termini secundi, per secundi quoque termini exponentem dividi possunt; consequenter omnes termini sunt dignitates ejus gradus, cujus dignitas est secundus (§. 56). Habemus itaque

Theorema 5. Si in serie continue proportionalium ab unitate numerorum, terminus secundus, seu ab unitate primus, est quadratus, reliqui omnes quadrati erunt; si idem fuerit cubus, reliqui etiam omnes cubi erunt; si idem fuerit dignitas cujuscunque gradus, quarti, quinti, sexti &c. reliqui etiam omnes erunt dignitates ejusdem gradus, quarti, quinti, sexti &c.

SCHO-

SCHOLION.

127. *Patet adeo, per calculum literalem facillime ſymptomata rationum & progreſſionum geometricarum ab unitate incipientium, vel ignorata, vel oblivioni tradita reperiri.*

PROBLEMA XXXIV.

128. *Invenire rationem ſuperficierum atque corporum in Geometria elementari explicatorum.*

Sit parallelogrammorum & triangulorum altitudo communis a, baſes ſint b & c: erunt illorum areæ ab & ac (§. 375, 387 *Geom.*), horum $\frac{1}{2}ab$ & $\frac{1}{2}ac$ (§. 392 *Geom.*). Sunt ergo ut ab ad ac, hoc eſt, ut b ad c (§. 181 *Arithm.*).

Theorema 1. Parallelogramma & triangula æque-alta baſium rationem habent.

Eodem modo invenitur

Theorema 2. Parallelogramma & triangula æqualium baſium ſunt in ratione altitudinum.

Sit diameter circuli a, peripheria ma (§. 114): erit quadratum diametri a^2, area circuli $\frac{1}{4}ma^2$ (§. 429 *Geom.*). Eſt ergo illud ad hanc ut a^2 ad $\frac{1}{4}ma^2$, hoc eſt, ut a ad $\frac{1}{4}ma$ (§. 181 *Arithm.*).

Theorema 3. Quadratum diametri eſt ad aream circuli, ut diameter ad quartam peripheriæ partem.

Sint baſes parallelogrammorum & triangulorum ſimilium a & b, altitudines ma & mb (§. 114 *Anal.* & §. 396 *Geom.*): erunt areæ ut ma^2 ad mb^2 (§. 375, 387, 392 *Geom.*), hoc eſt, ut a^2 ad b^2 (§. 124).

Theorema 4. Parallelogramma & triangula ſimilia ſunt ut quadrata baſium; ſeu (quia quodlibet latus pro baſi aſſumi poteſt (§. 113 *Geom.*) ut quadrata laterum homologorum.

Sint baſes parallelepipedorum, priſmatum, cylindrorum, pyramidum, conorum, a & b, altitudo communis c: erunt corpora iſta ut ac ad bc (§. 536, 539, 541, 548 *Geom.*), hoc eſt, ut a ad b (§. 181 *Arithm.*). Eodem modo c aſſumi poteſt pro baſi communi, ita ut a & b ſint altitudines.

Theorema 5. Parallelepipeda, priſmata, cylindri, pyramides & coni ejuſdem altitudinis baſium rationem habent; eandem vero baſin habentes ſunt in ratione altitudinum.

Non abſimili modo alia hujus generis Theoremata inveſtigantur.

PROBLEMA XXXV.

129. *Invenire, quoties quantitates quotlibet permutari queant, hoc eſt, ordo earum variari poſſit.*

Sint quantitates duæ a & b. Cum aut ſcribi poſſit ab, aut ba; patet eſſe numerum variationum $2 = 2.1$.

Sint tres quantitates a, b, c. Ordines earum erunt

$$\begin{array}{ccc} c & a & b \\ a & c & b \\ a & b & c \\ & & \\ c & b & a \\ b & c & a \\ b & a & c \end{array}$$

id quod patet, c primum cum ab, dein cum ba combinando. Unde numerus variationum $3.2.1 = 6$.

Quodſi quantitates fuerint quatuor, una quælibet quatuor modis combi-

 nari

nari poteſt cum quolibet ordine trium: unde numerus variationum emergit $6.4 = 4.3.2.1 = 24$.

Similiter ſi quantitates fuerint quinque, unaquælibet juncta cum quolibet ordine quatuor quantitatum pariet variationes 5. Unde numerus omnium variationum $24.5 = 5.4.3.2.1$.

Quare ſi numerus quantitatum fuerit n; erit numerus variationum $n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4.\,n-5$ &c.

Si eadem quantitas bis occurrat; reperietur variatio duorum *bb*; trium *bab*, *abb*, *bba*, quatuor *cbab*, *bcab*, *babc* &c. adeoque numerus variationum in caſu primo $1 = (2.1):(2.1)$, in ſecundo $3 = (3.2.1):(2.1)$, in tertio $12 = (4.3.2.1):(2.1)$. Quodſi litera quinta accedat, in quolibet ordine quantitatum quatuor pariet variationes quinque: unde numerus omnium variationum $60 = (5.4.3.2.1):(2.1)$. Hinc intelligitur, ſi numerus quantitatum ſit n; fore omnium variationum numerum $(n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4$ &c.$):(2.1)$.

Si eadem quantitas ter occurrat, erit in tribus nulla variatio; in quatuor variationes ſunt *baaa*, *abaa*, *aaba*, *aaab*, adeoque numerus variationum $4 = (4.3.2.1):(3.2.1)$. Quinta ſi accedat, in quolibet ordine quatuor quantitatum quinque variationes pariet: unde numerus omnium variationum $(5.4.3.2.1):(3.2.1)$. Eodem modo, ſi ſexta aſſumatur, reperietur numerus variationum $(6.5.4.3.2.1):(3.2.1)$. Unde colligitur, ſi numerus quantitatum ſit n, fore numerum omnium variationum $(n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4.\,n-5$ &c.$):(3.2.1)$.

Si eadem quantitas quater occurrat, erit in quatuor variatio nulla. Quodſi vero quinta accedat, variationes ſunt *baaaa*, *abaaa*, *aabaa*, *aaaba*, *aaaab*. Quare numerus variationum eſt $5 = (5.4.3.2.1):(4.3.2.1)$. Si ſexta aſſumatur, in quolibet ordine quantitatum quinque variationes ſex pariet; adeoque numerus variationum $30 = (6.5.4.3.2.1):(4.3.2.1)$. Unde conſtat, ſi numerus quantitatum ſit n, fore numerum omnium variationum $(n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4.\,n-5$, &c.$):(4.3.2.1)$.

Ex his formulis ſpecialibus colligitur generalis. Nempe ſi n denuo ſit quantitatum numerus, m numerus qui indicat quoties eadem quantitas occurrit: erit $(n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4.\,n-5.\,n-6.\,n-7.\,n-8.\,n-9$ &c.$):(m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.\,m-4.\,m-5,\,m-6$ &c.$)$. Nimirum ſeries continuanda, donec continua unitatis ſubtractio ex n & m relinquat 0.

Eodem modo ulterius progredi licet; tandemque reperietur, ſi numerus quantitatum fuerit n, numeri qui indicant quoties earum aliquæ repetuntur, ſint l, m, r &c. formula univerſaliſſima $(n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4.\,n-5.\,n-6$ &c.$):(l.\,l-1.\,l-2.\,l-3.\,l-4$ &c. $m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.$ &c. $r.\,r-1.\,r-2.\,r-3.\,r-4.\,r-5$ &c.$)$. Ex. gr. ſit $n=6, l=3, m=3, r=0$; erit numerus variationum $(6.5.4.3.2.1):(3.2.1.3.2.1) = (6.5.4):(3.2) = 5.4 = 20$.

SCHO-

SCHOLION I.

130. *Ponamus mensæ assidere 13 personas. Quodsi quæratur, quoties loca permutare possint; reperietur numerus variationum* 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 6, 227, 020, 800.

SCHOLION II.

131. *Si vox aliqua ex literis non nimis multis componatur; eadem methodo, qua in resolutione problematis usi sumus, inveniri possunt sine meditatione omnia anagrammata in omnibus linguis possibilia. Ex. gr. inveniri debent anagrammata vocis* amor. *Erunt variationes possibiles.*

amor	mora	oram	ramo
amro	moar	orma	raom
aomr	mroa	oarm	rmao
aorm	mrao	oamr	rmoa
armo	maor	omra	roam
arom	maro	omar	roma

Sunt adeo anagrammata vocis amor *in lingua latina* Roma, mora, Maro, oram, ramo, armo.

SECTIO SECUNDA.

DE ALGEBRA.

CAPUT PRIMUM.

De Algebra ad Problemata arithmetica, eaque determinata, applicata.

DEFINITIO V.

132. *Algebra* est methodus resolvendi Problemata per æquationes.

DEFINITIO VI.

133. *Æquatio* est expressio ejusdem quantitatis per duos valores diversos, sed æquales; ex. gr. 2.3 = 2 + 4. STIFELIUS (*a*) definit eam per rationem æqualitatis inter duos terminos diversimode denominatos.

(*a*) In *Arithmet. integra* lib. 3. c. 1. p. 228. b.

DEFINITIO VII.

134. *Radix æquationis* est valor quantitatis incognitæ, quæ æquationem ingreditur. Ex. gr. Si fuerit $a^2 + b^2 = x^2$; radix erit $\sqrt{(a^2+b^2)}$.

DEFINITIO VIII.

135. Si valor ipsius x fuerit positivus; ex. gr. $x = 3$; *Radix* dicitur *vera*.

DEFINITIO IX.

136. Si valor ipsius x fuerit negativus; ex. gr. $x = -5$; *Radix* dicitur *falsa*.

DEFINITIO X.

137. Si valor ipsius x fuerit radix quantitatis negativæ, ex. gr. $\sqrt{-5}$; *Radix imaginaria* appellatur (§. 71).

DEFINITIO XI.

138. *Æquatio* dicitur *simplex*, si quantitas incognita fuerit unius dimensionis; ex. gr. si $x = (a+b) : 2$.

DEFINITIO XII.

139. *Æquatio* dicitur *quadratica*, si quantitas incognita ad duas dimensiones assurgit, ut $x^2 = a^2 + b^2$: *cubica*, si ad tres, ut $x^3 = a^3 - b^3$ &c.

SCHOLION.

140. *In hac sectione tantum de æquatione simplici & quadratica agimus.*

PROBLEMA XXXVI.

141. *Problema datum algebraice resolvere.*

RESOLUTIO.

1. Quantitates datæ a quæsitis distinguantur; & datæ primis, quæsitæ ultimis alphabeti litteris denominentur (§. 3).
2. Quærantur tot æquationes, quot quantitates incognitæ occurrunt: quod si fieri nequeat, id indicio est, *Problema* non esse *determinatum*, sed unam vel plures quæsitarum pro arbitrio assumi posse. Inveniuntur autem æquationes, nisi in ipso Problemate contineantur, per Theoremata de æqualitate quantitatum agentia.
3. Quoniam in æquatione quantitates incognitæ cognitis sunt permixtæ; ea reducenda est, ita ut ex una parte tantum compareat quantitas incognita una, ex altera vero meræ cognitæ deprehendantur. Instituitur autem hæc reductio, si quantitates subductæ addantur, additæ subtrahantur, multiplicatæ dividantur, divisæ multiplicentur, e potentiis radices extrahantur, radices ad potentias evehantur, ut perpetua æqualitas conservetur (§. 88, 91, 93, 94, 255, 256 *Arithm.*).

SCHOLION.

142. *Hæc sufficiunt pro æquationibus simplicibus reducendis; sed ad altiores aliis adhuc subsidiis opus est, quæ suo loco exponemus, nunc nonnisi extractionem radicis ex æquatione quadratica addituri.*

PROBLEMA XXXVII.

143. *Ex æquatione quadratica radicem extrahere.*

RESOLUTIO.

I. Si æquatio fuerit pura, ut $x^2 = ab$; evidens est esse $x = \sqrt{ab}$.

II. Si æquatio fuerit affecta, ut $x^2 \mp ax = \mp b^2$; tum x assumatur pro una parte radicis, erit a quantitas cognita secundi termini duplum partis alterius (§. 261 *Arithm.*), adeoque $\frac{1}{2}a$ pars altera. Complebitur adeo quadratum, si addatur $\frac{1}{4}aa$ (§. *cit.*): quo facto, radix extrahi potest, ut hic factum esse apparet:

Casus I.

$$x^2 + ax = b^2$$
$$\tfrac{1}{4}aa \quad \tfrac{1}{4}aa \text{ add.}$$
$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b^2$$
$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$
$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)} - \tfrac{1}{2}a$$

Casus

Casus 2.

$$x^2 - ax = b^2$$
$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$$
$$\left.\begin{array}{l} x - \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a - x \end{array}\right\} = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$$
$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$$
vel $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$

Quoniam $\sqrt{\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a$, adeoque $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} > \frac{1}{2}a$, erit $\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ valor ipsius x negativus, consequenter radix falsa (§. 136), atque adeo solus valor $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ est radix vera (§. 135).

Casus 3.

$$x^2 - ax = -b^2$$
$$\frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2 \text{ add.}$$
$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$$
$$\left.\begin{array}{l} x - \frac{1}{2}a \\ \& \frac{1}{2}a - x \end{array}\right\} = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$$
$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$$
$$\& \ x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

Quoniam $\sqrt{\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a$, adeoque $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)} < \frac{1}{2}a$, erit $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}(a^2 - b^2)}$ valor ipsius x positivus; consequenter radix vera (§. 135). Habet adeo in præsente casu æquatio duas radices veras: cujus rei ratio paulo post ex exemplis patebit.

Ceterum ex multiplicatione patet esse $(\frac{1}{2}a - x)^2$ perinde ac $(x - \frac{1}{2}a)^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$.

PROBLEMA XXXVIII.

144. *Invenire numerum, cujus pars dimidia, cum tertia & quarta, numerum integrum unitate superat.*

Sit numerus quæsitus x, erit per conditionem Problematis

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$$

hoc est $(12x + 8x + 6x) : 24 = x + 1$

seu $\frac{26}{24}x = x + 1$

$$\text{24 mult.}$$
$$26x = 24x + 24$$
$$24x \quad 24x \qquad \text{Subtr.}$$
$$2x = 24$$
$$\text{2 div.}$$
$$x = 12$$

Examen. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 6 + 4 + 3$
$= 13 = 12 + 1$

PROBLEMA XXXIX.

145. *Invenire numerum, cujus partes aliquotæ, qualescunque & quotcunque, simul sumtæ ipsum superant numero dato.*

Sit numerus datus f, quæsitus x, partes aliquotæ $\frac{a}{b}x$, $\frac{c}{d}x$, $\frac{e}{g}x$, &c. Erit per conditionem Problematis

$$\frac{a}{b}x + \frac{c}{d}x + \frac{e}{g}x \text{ \&c.} = f + x$$

h.e. $\frac{(adg + bgc + bde)x}{bdg} = f + x$ (§. 235 *Arith.*)

$$(adg + bgc + bde)\,x = fdbg + bdgx$$
$$bdgx \quad bdgx \ \text{subt.}$$
$$(adg + bgc + bde - bdg)\,x = fbdg$$
$$x = fbdg : (adg + bgc + bde - bdg)$$

seu $adg + bgc + bde - bdg : bdg = f : x$.

Æquatio ultima hanc suppeditat

Regulam: 1. Fractiones datæ reducantur ad eandem denominationem. 2. A summa numeratorum subtrahatur denominator communis. 3. Per residuum dividatur factum ex eodem denominatore in numerum datum. Quotus est numerus quæsitus.

Ex.

Ex. gr. Sit $a:b=\frac{1}{2}; c:d=\frac{1}{3}, e:g=\frac{1}{4}, f=1$; erit $x=24:(12+8+6-24)=24:2=12$.

In analogia, in quam æquationem resolvimus, continetur hoc

Theorema. Si plures fractiones ad eandem denominationem reducuntur, erit numerus integer, cujus partes sunt fractiones istæ, ad harum supra illum excessum, ut communis denominator ad differentiam ejus a summa numeratorum.

PROBLEMA XL.

146. *Quantitates irrationales diversæ denominationis reducere ad candem.*

RESOLUTIO.

Sint quantitates irrationales reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ &, $\sqrt[s]{y^r}$, quemadmodum supra (§. 59). Fiat

$$\sqrt[m]{x^n}=t \qquad \sqrt[s]{y^r}=v$$
$$x^n=t^m \qquad y^r=v^s$$
$$x^{sn}=t^{ms} \qquad y^{rm}=v^{sm}$$
$$\sqrt[ms]{x^{sn}}=t \qquad \sqrt[ms]{y^{rm}}=v$$

Habemus adeo $\sqrt[m]{x^n}=\sqrt[ms]{x^{sn}}$ & $\sqrt[s]{y^r}=\sqrt[ms]{y^{rm}}$, ut supra (§. *cit.*); quo ipso patet, quod dubium videri poterat (§. 60), in exponentibus quantitatum irrationalium locum habere reductionem ad candem denominationem, si [illegible] fractiones diversæ denominationis.

SCHOLION.

147. *Hoc artificio reductionis uti possumus in aliis casibus similibus. Ita multiplicationem ac divisionem fractorum atque irrationalium eadem methodo investigare licet.*

PROBLEMA XLI.

148. *Datis summa duarum quantitatum, & earundem facto; invenire numeros.*

Sit summa $=a$ Semidiffer. $=x$
Fact. $=b$; erit quant. maj. $=\frac{1}{2}a+x$
min. $=\frac{1}{2}a-x$ (§. 6).

Ergo per conditionem Probl.

$$\frac{1}{4}aa-xx=b \qquad (§. 38).$$
$$xx \quad xx \quad \text{add.}$$
$$\frac{1}{4}aa=b+xx$$
$$b \quad b \text{ Subtr.}$$
$$\frac{1}{4}aa-b=xx$$
$$\sqrt{(\frac{1}{4}aa-b)}=x$$

Regula 1. A quadrato semisummæ duarum quantitatum subtrahatur factum earundem. 2. Ex residuo extrahatur radix, quæ erit semidifferentia earundem.

Sit ex. gr. $a=14$, $b=48$: erit $\sqrt{(\frac{1}{4}aa-b)}=\sqrt{(49-48)}=1$. Adeoque $\frac{1}{2}a+x=7+1=8$; $\frac{1}{2}a-x=7-1=6$. Sunt adeo numeri quæsiti 8 & 6. Nam $8.6=48$, & $8+6=14$.

COROLLARIUM.

149. Quoniam $\frac{1}{2}a$ est dimidium totius a, x differentia partis æqualis ab inæquali, b rectangulum partium inæqualium, æquatio secunda hoc continet

Theorema: Si totum dividatur in duas partes æquales & in duas inæquales; quadratum partis æqualis æquale est rectangulo inæqualium, una cum quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali.

SCHOLION.

150. *Patet adeo, quod sæpius casu in Theoremata incidamus, dum Problemata algebraice resolvimus; qualia subinde annotabimus. Regulas vero, quas quilibet proprio marte ex ultima æquatione eruere valet, in posterum prætermittemus.*

PROBLEMA XLII.

151. *Data summa dignitatum similium duarum quantitatum, & differentia earundem; invenire quantitatem utramque.*

Sit

Sit ſumma $= a$ Quantit. maj. $= y$
differentia $= b$ min. $= x$
erit per conditionem probl.

$$x^m + y^m = a \qquad y^m - x^m = b$$
$$x^m \quad x^m \text{ ſubt.} \qquad x^m \quad x^m \text{ add.}$$
$$y^m = a - x^m \qquad y^m = b + x^m$$

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$a - x^m = b + x^m$$
$$+ x^m \quad + x^m \text{ add.}$$
$$a = b + 2x^m$$
$$b \quad b \quad \text{ſubt.}$$
$$a - b = 2x^m$$
$$(2 \text{ div.}$$
$$(a - b) : 2 = x^m$$
$$\sqrt[m]{(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)} = x$$

Sit $m = 2$, $a = 97$, $b = 65$: erit $x = \sqrt{(48\tfrac{1}{2} - 32\tfrac{1}{2})} = \sqrt{16} = 4$, & hinc $y = \sqrt{(b + x^2)} = \sqrt{(65 + 16)} = \sqrt{81} = 9$.

Examen: $y^2 + x^2 = 81 + 16 = 97$ &
$y^2 - x^2 = 81 - 16 = 65$.

Æquatio antepenultima reſolvitur in hanc analogiam,

$a - b : x^m = 2 : 1$ (§. 299 *Arithm.*).

quæ ſequens ſuppeditat

Theorema. Exceſſus ſummæ duarum dignitatum ſimilium ſupra differentiam earundem, eſt ad dignitatem minorem in ratione dupla.

PROBLEMA XLIII.

152. *Dato itinere diurno viatoris alicujus, una cum itinere diurno alterius ipſum dato tempore ſequentis; invenire tempus, quo illum hic aſſequetur.*

Sit iter diurnum primi $= a$
ſecundi $= b$
tempus datum $= c$
tempus quæſ. $= x$,

erit iter intra tempus datum a primo confectum $= ac$; quod vero idem intra quæſitum emenſus eſt $= ax$: iter poſterioris intra tempus quæſitum reperietur $= bx$ (§. 302 *Arithm.*). Quare, per conditionem Problematis,

$$ac + ax = bx$$
$$ax \quad ax \text{ ſubtr. quia } bx > ax$$
$$ac = bx - ax$$
$$b - a \text{ div.}$$
$$ac : (b - a) = x$$

Sit $a = 6$, $b = 8$, $6 = 4$: erit $x = 24 : 2 = 12$.

Examen. Quoniam primus itineri impendit 16, alter vero 12 dies antequam conveniunt, & iter diurnum primi eſt 6, ſecundi 8; via primi eſt $6.16 = 96$, ſecundi $8.12 = 96$

Æquatio penultima in hanc analogiam reſolvitur (§. 299 *Arithm.*).

$$b - a : a = c : x$$

quæ ſequens ſuppeditat

Theorema: Si quidam viator alterum inſequitur, tempore aliquo elapſo, differentia viarum, quas eodem tempore uterque emetitur, eſt ad viam primi quem alter inſequitur, ut tempus ab itinere primi uſque ad initium itineris ſecundi elapſum ad tempus quo alter ipſum aſſequitur.

SCHOLION.

153. *Facile apparet, cum viatoris notio Problematis reſolutionem non ingrediatur, Problema univerſalius de mobilibus quibuſcunque concipi poſſe.*

PROBLEMA XLIV.

154. *Dato itinere diurno alicujus viatoris, una cum tempore ab initio itineris elapſo; invenire iter diurnum ab alio viatore conficiendum, ut in dato tempore illum aſſequatur.*

Sit iter diurnum primi $= a$
tempus elapsum $= b$
tempus datum $= c$
iter diurnum alterius $= x$.

Erit, per conditionem Problematis, ut in Probl. praeced.

$$ab + ac = cx \quad c \text{ div.}$$
$$(ab + ac) : c = x$$

Sit ex. gr. $a = 6$, $b = 4$, $c = 12$: erit $x = (24 + 72) : 12 = 96 : 12 = 8$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam (§. 299 *Arithm.*)

$$c : b + c = a : x$$

quæ sequens suppeditat

Theorema. Si quidam viator alterum insequitur tempore aliquo elapso, erit tempus, intra quod ipsum assequitur, ad tempus ab initio itineris hujus elapsum, ut iter diurnum primi ad iter diurnum secundi.

PROBLEMA XLV.

155. *Dato intervallo locorum, ex quibus eodem tempore duo viatores egrediuntur, una cum itinere diurno uniuscujuslibet; invenire tempus, quo sibi mutuo occurrent.*

Sit intervallum locorum $= a$
iter diurnum primi $= b$
secundi $= c$
tempus occursus $= x$,

erit via a primo intra tempus x confecta $= bx$, via quam alter eodem tempore emetitur $= cx$ (§. 302 *Arithm.*). Quare cum ambo junctim emensi sint totum intervallum locorum unde egrediebantur; habebimus

$$bx + cx = a \quad b + c \text{ div.}$$
$$x = a : (b + c)$$

Sit $a = 120$, $b = 6$, $c = 4$: erit $x = 120 : (6 + 4) = 120 : 10 = 12$. Duodecimo igitur die sibi mutuo occurrent.

SCHOLION.

156. *Problemata istiusmodi specialia sub initium difficiliora sunt solutu, quam abstracta; quoniam in his æquatio plerumque continetur, aut ex Theorematibus arithmeticis facile eruitur; in illis autem ex circumstantiis Problematis elicienda. Quodsi enim plures circumstantiæ occurrunt, Tyrones non statim eas pervident, quæ æquationem suppeditant. Discant igitur consultius esse ut Problematis abstractis solvendis primas studii Algebraici partes consecrent: insuperque notent velim, facilius Problemata specialia ad abstracta, seu generalia, quam vice versa abstracta ad specialia revocari; quia ista conditiones generales, unde solutio pendet, actu continent, in his vero circumstantiæ speciales, quæ ad solutionem nil conferunt, minime comparent. Ex. gr. Problema præsens in abstracto istiusmodi est.* Invenire numerum, qui in summam duorum datorum ductus producit numerum datum. *Similiter Problema* (§. 152) *in abstracto tale est*: Datis tribus quantitatibus, invenire quartam, ita ut factum ex quarta in secundam æquale sit facto ex prima in aggregatum ex tertia & quarta. *Hinc apparet ratio, cur Theorematum usus non statim in oculos occurrat. Nocent igitur, qui inveniri ac addisci prohibent ea quorum usus nondum constat, vel non statim primo intuitu in oculos occurrit.*

PROBLEMA XLVI.

157. *Data summa duarum quantitatum, & differentia quadratorum; invenire quantitates.*

Sit summa quantitatum $= a$
differentia quadratorum $= b$
Semidiff. quantitatum $= y$
erit quantitas major $= \frac{1}{2}a + y$
minor $= \frac{1}{2}a - y$ (§. 5)

Qua-

Quare

quadratum maj. $\frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$

min. $\frac{1}{4}a^2 - ay + y^2$

differ. (§. 30) $2ay = b$ per condit.

$2a$ div. ——— Probl.

$y = b : 2a$

Sit $b = 40$, $a = 10$: erit $y = 40 : 20 = 2$. Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Examen: $49 - 9 = 40$.

PROBLEMA XLVII.

158. *Data summa duarum quantitatum, una cum summa quadratorum; invenire quantitatem utramque.*

Sit summa $= a$

Summa quadratorum $= b$

Semidiff. quantitatum $= y$

erit major $= \frac{1}{2}a + y$, minor $= \frac{1}{2}a - y$ (§. 6.)

Quare

quadrat. maj. $\frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$

minoris $\frac{1}{4}a^2 - ay + y^2$

summa $\frac{1}{2}a^2 + 2y^2 = b$

$\frac{1}{2}a^2$ $\frac{1}{2}a^2$ Subtr.

$2y^2 = b - \frac{1}{2}a^2$ ——— 2 div.

$y^2 = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2$ ——— Ext. Rad.

$y = \sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)}$

Sit $a = 10$, $b = 58$: erit $y = \sqrt{(29 - 25)} = \sqrt{4} = 2$. Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Examen: $7 + 3 = 10$, & $49 + 9 = 58$.

PROBLEMA XLVIII.

159. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum ex unoquoque in radicem quadratam alterius sit aequale numero dato.*

Sit factum unum $= a$

alterum $= b$

numerus unus $= x$

alter $= y$

erit, per conditionem Problematis,

$x\sqrt{y} = a$ ——— Quad. $\qquad y\sqrt{x} = b$ ——— Quad.

$x^2 y = a^2$ ——— y div. $\qquad y^2 x = b^2$ ——— y^2 div.

$x^2 = a^2 : y$ $\qquad x = b^2 : y^2$ ——— Quad.

$x^2 = b^4 : y^4$

$a^2 : y = b^4 : y^4$ ——— y^4 mult.

$a^2 y^3 = b^4$ ——— a^2 div.

$y^3 = b^4 : a^2$

$y = \sqrt[3]{(b^4 : a^2)}$

Sit $a = 18$, $b = 12$: erit $y = \sqrt[3]{(20736 : 324)} = \sqrt[3]{64} = 4$. Ergo $x = b^2 : y^2 = 144 : 16 = 9$.

Examen. $9\sqrt{4} = 2.9 = 18$, & $4\sqrt{9} = 4.3 = 12$.

PROBLEMA XLIX.

160. *Invenire duos numeros, quorum factum aequale est numero dato, quadratum vero summae ad quadratum differentiae habet rationem datam.*

Sit factum $= a$ $\qquad$ Summa $= 2x$

ratio $= b : c$ $\qquad$ different. $= 2y$

erit major $= x + y$

minor $= x - y$

Ergo, per conditiones Problematis,

$xx - yy = a$ $\qquad b : c = 4x^2 : 4y^2$ (§. 297 Arithm.).

$yy \quad yy$ add. $\qquad 4cx^2 = 4by^2$ ——— ($4c$ div.

$xx = a + yy$ $\qquad x^2 = by^2 : c$

 Quare

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$a+y^2 = by^2 : c$$
c mult.
$$ac+cy^2 = by^2$$
$$cy^2 \quad cy^2$$ subtr.
$$ac = by^2 - cy^2$$
$b-c$ div.
$$ac : (b-c) = y^2$$
$$\sqrt{ac} : \sqrt{(b-c)} = y$$

Sit $a = 96, b:c = 25:1$. Erit $y = \sqrt{96} : \sqrt{(25-1)} = \sqrt{4} = 2$, & $x = \sqrt{(a+y^2)} = \sqrt{(96+4)} = \sqrt{100} = 10$, consequenter numerus major $x+y = 10+2 = 12$, & minor $x-y = 10-2 = 8$.

Examen. $12 . 8 = 96$ & $100:4 = 25:1$.

PROBLEMA L.

161. *Dato pretio unius mensuræ vini; invenire quantitatem aquæ commiscendæ, ut una mensura dato alio pretio minore vendi queat.*

Sit pretium majus $= a$
minus $= b$
quantitas aquæ $= x$.

Cum aquæ pretium nullum sit; erit $1+x : 1 = a : b$; consequenter

$$b+bx = a \quad \text{(§.297 } Arithm.\text{)}.$$
b subt.
$$bx = a - b$$
b div.
$$x = (a-b):b = a:b - 1$$

Sit $a = 16$, $b = 10$: erit $x = 1\frac{6}{10} - 1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Theorema. Si vino pretiosiori aqua commiscenda, ut viliori pretio constet; quantitas aquæ commiscendæ est ad quantitatem vini, ut differentia pretiorum ad pretium minus.

Nempe vi æquationis penultimæ $x : 1 = a-b : b$.

Examen. Etenim si integra mensura veneat 10 grossis, tres ipsius quintæ veneunt 6 grossis (§. 302 *Arithm.*); quos si addas pretio unius mensuræ, quod est 10 grossorum, prodibunt 16 grossi pretium unius mensuræ vini generosioris.

PROBLEMA LI.

162. *Dato pretio vini generosi & pretio vilioris; determinare quantitatem vini vilioris generoso commiscendi, ut dato aliquo pretio medio venire queat.*

Sit pretium unius mensuræ vini
generosi $= a$
vilioris $= b$
medium $= c$
quantitas unius mensuræ $= 1$
quantitas vilioris commiscendi $= x$
erit pretium ejus $= bx$
quantitas generosi commiscendi $= 1-x$
erit ejus pretium $= a - ax$

Quare, per conditionem Probl.

$$a - ax + bx = c$$
$$ax \qquad ax$$ add. ob $ax > bx$
$$a + bx = c + ax$$
$$bx \qquad bx$$ subt.
$$a = c + ax - bx$$
$$c \quad c$$ subt.
$$a - c = ax - bx$$
$a-b$ div.
$$(a-c):(a-b) = x$$

Sit $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$; erit $x = (16 - 12):(16 - 10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$.

Examen. Pretium $\frac{2}{3}$ vilioris $= 6\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ generosi $= 5\frac{1}{3}$, adeoque mensuræ mixti $= 6\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3} = 12$.

PRO-

PROBLEMA LII.

163. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum, summa, & differentia quadratorum sint inter se æqualia.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$: erit per conditionem problematis

$$x^2 - y^2 = xy \qquad x + y = xy$$
$$y \qquad y \text{ subt.}$$
$$x = xy - y$$
$$x - 1 \text{ div.}$$
$$x : (x - 1) = y$$

Quodsi valor ipsius y jam inventus in æquatione sinisteriore substituatur, habebimus

$$x^2 - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2}{x - 1}$$
$$x^2 - 2x + 1$$
$$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2$$
$$x^4 - 2x^3 = x^3 - x^2$$
$$x^3 \qquad x^3 \qquad \text{subtr.}$$
$$x^4 - 3x^3 = -x^2$$
$$x^2 \text{ div.}$$
$$x^2 - 3x = -1$$
$$\tfrac{9}{4} \qquad \tfrac{9}{4} \qquad (\S.\ 143)$$
$$x^2 - 3x + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{4} - 1 = \tfrac{5}{4}$$
$$\left.\begin{matrix} x - \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$
$$x = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

Est vero $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ radix vera; sed $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ non est numerus minor y: quia, si numerus minor diceretur y, ad aliam æquationem deveniretur, quemadmodum apparet, si valore ipsius x per æquationem $xy - x = y$ reperto & in æquatione $x^2 - y^2 = xy$ substituto, reductio legitime instituatur. Tunc enim reperitur $y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, ubi $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ est radix falsa, quia $\frac{1}{2}\sqrt{5} > \frac{1}{2}$.

Examen. Est enim $x + y = 2 + \sqrt{5}$, $xy = 2 + \sqrt{5}$, & $x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}$.

PROBLEMA LIII.

164. *Datis, in progressione arithmetica, termino primo & ultimo, atque differentia terminorum; invenire numerum terminorum & summam progressionis.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
differentia $= d$
numerus terminorum $= x$
summa $= y$

erit (§.333 *Arithm.* & §.107 *Anal.*

$$b = a + dx - d \qquad y = \tfrac{1}{2}(b + a)x$$
$$d \qquad d \text{ add.}$$
$$b + d = a + dx$$
$$a \qquad a \qquad \text{subt.}$$
$$b + d - a = dx$$
$$(d \text{ div.}$$
$$(b + d - a) : d = x$$

Quodsi hic valor in æquatione dextra substituatur, habebimus

$$y = \tfrac{1}{2}(b + a)(b + d - a) : d =$$
$$(b^2 + bd - ab + ab + ad - a^2) : 2d =$$
$$(b^2 + bd + ad - a^2) : 2d \text{ [illegible] } a)$$
$$+ (b^2 - a^2) : 2d.$$

Sit $a = 2$, $b = 17$, $d = 3$: erit $x = (17 + 3 - 2) : 3 = 18 : 3 = 6$, & $y = \frac{1}{2}(17 + 2) + (289 - 4) : 6 = \frac{19}{2} + \frac{285}{6} = 9\frac{1}{2} + 47\frac{1}{2} = 57$.

PROBLEMA LIV.

165. *Datis termino primo, differentia terminorum, & summa progressionis arithmeticæ; invenire numerum terminorum & terminum ultimum.*

 Sit

Sit terminus primus $= a$
differentia $= d$
ſumma $= c$
ultimus $= y$
terminorum numerus $= x$
erit (§.333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*)

$\frac{1}{2}x(a+y) = c \qquad a + dx - d = y$

2 mult.

$ax + xy = 2c$

$ax \qquad ax$ Subtr.

$xy = 2c - ax$

x div.

$y = (2c - ax) : x$

Ergo (§. 87 *Arithm.*)

$(2c - ax) : x = a + dx - d$

x mult.

$2c - ax = ax + dx^2 - dx$

$ax \qquad ax$ add.

$2c = dx^2 + 2ax - dx$

d div.

$\frac{2c}{d} = x^2 + \frac{2a - d}{d}x$

hoc eſt, ſi fiat $(2a - d) : d = m$

$2c : d = x^2 + mx$

$\frac{1}{4}m^2 \qquad \frac{1}{4}m^2$ add.

$\frac{1}{4}m^2 + 2c : d = x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + 2c : d)} = x + \frac{1}{2}m$

$\frac{1}{2}m \qquad \frac{1}{2}m$ ſubt.

$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + 2c : d)} - \frac{1}{2}m = x$

Sit $a = 2$, $d = 3$, $c = 57$: erit $m = (4 - 3) : 3 = \frac{1}{3}$; conſequenter $x = \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{114}{3})} - \frac{1}{6} = \sqrt{\frac{1369}{36}} - \frac{1}{6} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$, & $y = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$.

PROBLEMA LV.

166. *Datis termino primo & ultimo una cum ſumma progreſſionis arithmeticæ; invenire numerum & differentiam terminorum.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
ſumma $= c$
differentia $= y$
numerus terminorum $= x$
erit (§.333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*)

$\frac{1}{2}x(a+b) = c \qquad a + xy - y = b$

2

$x(a+b) = 2c \qquad xy - y = b - a$

$x = 2c : (a+b) \qquad y = \frac{b - a}{x - 1}$

$x - 1 = \frac{2c}{a+b} - 1 \qquad = \frac{(b+a)(b-a)}{2c - a - b}$

$= \frac{2c - a - b}{a + b}$

Sit $a = 2$, $b = 17$, $c = 57$: erit $x = 114 : 19 = 6$, & $y = (19.15) : (114 - 19) = 285 : 95 = 3$.

Theorema. In progreſſione arithmetica, eſt ut differentia ſummæ ex termino primo & ultimo a duplo ſummæ progreſſionis ad differentiam termini primi ab ultimo, ita ſumma termini primi & ultimi ad differentiam progreſſionalem.

PROBLEMA LVI.

167. *Datis differentia & numero terminorum, una cum ſumma progreſſionis arithmeticæ; invenire terminum primum & ultimum.*

Sit numerus terminorum $= n$
differentia $= d$
ſumma $= c$
term. primus $= x$
ultimus $= y$
erit (§.333 *Arithm.* & §.107 *Anal.*)

$\frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}ny = c \qquad x + nd - d = y$

h. e. $nx + \frac{1}{2}n^2 d - \frac{1}{2}nd = c$ $\quad \frac{1}{2}n$ div.

$2x + nd - d = 2c : n \quad nd - d$ ſubt.

$2x = 2c : n - nd + d \quad$ 2 div.

$x = c : n - \frac{1}{2}nd + \frac{1}{2}d$

Sit

Sit $n = 6, d = 3, c = 57$: erit $x = 9\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} - 9 = 2$, & $y = 2 + 18 - 3 = 17$.

PROBLEMA LVII.

168. *Datis differentia terminorum, termino ultimo, & summa progressionis arithmeticæ; invenire terminum primum & numerum terminorum.*

Sit terminus ultimus $= b$
terminorum differ. $= d$
summa $= c$
terminus primus $= x$
numerus termin. $= y$

erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*)

$\frac{1}{2}y(b+x) = c$ $b = x + dy - d$
2
$y(b+x) = 2c$ $b + d - x = dy$
$y = 2c:(b+x)$ $(b+d-x):d = y$

Quamobrem (§. 87 *Arithm.*)

$2c:(b+x) = (b+d-x):d$
d mult.
$2cd:(b+x) = b+d-x$
$b+x$ mul.
$2cd = b^2 + bd - bx + bx + dx - x^2$
$x^2 - dx = b^2 + bd - 2cd$
$\frac{1}{4}d^2$ $\frac{1}{4}d^2$ (§. 143).
$x^2 - dx + \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd$

$\left.\begin{matrix} x - \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{2}d - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$

$x = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$.

Quodsi $\frac{1}{2}d > x$, erit $\frac{1}{2}d - x$ quantitas positiva, adeoque $x = \frac{1}{2}d - \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$: si vero $\frac{1}{2}d < x$, quantitas $\frac{1}{2}d - x$ æquivalet privativo, sed $x - \frac{1}{2}d$ positivo; adeoque $x = \frac{1}{2}d + \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$.

Sit $b = 17, d = 3, c = 57$: erit $x = \frac{3}{2} + \sqrt{(\frac{9}{4} + 289 + 51 - 342)} = \frac{3}{2} + \sqrt{(2\frac{1}{4} - 2)} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$, & $y = (17 + 3 - 2):3 = \frac{18}{3} = 6$.

PROBLEMA LVIII.

169. *Datis summa progressionis arithmeticæ, numero terminorum, & facto ex primo in ultimum; invenire terminos singulos.*

Sit factum $= a$
numerus terminorum $= n$
summa $= c$
terminus primus $= x$
ultimus $= y$

erit (§. 107 & per condit. Probl.)

$\frac{1}{2}n(x+y) = c$ $xy = a$
$\frac{1}{2}n$ x div.
$x + y = 2c:n$ $y = a:x$

h. e. $x + \frac{a}{x} = \frac{2c}{n}$
x mult.
$x^2 + a = 2cx:n$
$x^2 - 2cx:n = -a$
$+ c^2:n^2 + c^2:n^2$ add.
$x^2 - 2cx:n + c^2:n^2 = c^2:n^2 - a$

$\left.\begin{matrix} x - c:n \\ c:n - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(c^2:n^2 - a)}$

$x = \frac{c}{n} \pm \sqrt{(c^2:n^2 - a)}$

Signum + valet pro [illegible] ultimo, signum autem − pro primo.

Sit $c = 57, n = 6, a = 34$: erit $x = \frac{57}{6} - \sqrt{(\frac{3249}{36} - 34)} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{(90\frac{1}{4} - 34)} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{56\frac{1}{4}} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{225}{4}} = 9\frac{1}{2} - \frac{15}{2} = 2$, & $y = 9\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2} = 17$.

PROBLEMA LIX.

170. *Invenire numerum terminorum in serie imparium summandorum, ut prodeat potentia data numeri dati.*

RESO-

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= n$
erit dignitas ejus $= n^m$
terminus prim. progr. $= 1$
differenti term. $= 2$.
Sit num. term. $= x$
erit summa progress. $= x^2$ (§. 108).
Ergo, per conditionem Probl.

$$\frac{x^2 = n^m}{x = n^{m:2}} \text{ Ext. Rad.}$$

Patet adeo, Problema non esse posibile nisi in iis casibus, ubi exponens dignitatis m est numerus par, ut per 2 dividi possit.

Ex. gr. Sit $m = 2$, erit $x = n$, hoc est, numerus terminorum est idem cum radice quadrata, quemadmodum supra reperimus (§. 110). Sit $m = 4$; erit $x = n^2$, hoc est, numerus terminorum summandorum est radicis quadratus, si potentia quarti gradus desideretur, veluti si $n = 2$, erit $2^4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

PROBLEMA LX.

171. *Invenire numeros impares totidem numero, quos numerus datus habet unitates, & quorum additione prodit potentia data numeri hujus dati.*

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= n$
dignitas ejus $= n^m$
terminus primus $= x$

Quoniam in serie numerorum imparium differentia terminorum $= 2$, & numerus terminorum est *n per hypoth.* erit summa progressionis $= nx + n^2 - n$ (§. 108); consequenter, per conditionem Problematis,

$$\frac{nx + n^2 - n = n^m}{x + n - 1 = n^{m-1}} \; n \text{ div.}$$

$$\frac{\quad n - 1 \qquad n - 1 \text{ subtr.}}{x = n^{m-1} - n + 1}$$

Patet adeo Problema esse possibile in omni casu.

Sit ex. gr. $m = 2$, erit $x = n - n + 1 = 1$, ut supra (§. 110).

Sit $m = 3$, erit $x = n^2 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 4 - 1 = 3$, adeoque $2^3 = 3 + 5 = 8$. Sit $n = 3$; erit $x = 9 - 2 = 7$, adeoque $3^3 = 7 + 9 + 11 = 27$.

Patet adeo quomodo numeri cubici ex additione numerorum imparium procreentur.

Sit $m = 4$, erit $x = n^3 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 8 - 1 = 7$, adeoque $2^4 = 7 + 9 = 16$. Sit $n = 3$, erit $x = 27 - 2 = 25$, adeoque $3^4 = 25 + 27 + 29 = 81$.

Sit $m = 5$, erit $x = n^4 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 16 - 1 = 15$, adeoque $2^5 = 15 + 17 = 32$. Sit $n = 3$, erit $x = 81 - 2 = 79$, adeoque $3^5 = 79 + 81 + 83 = 243$.

SCHOLION.

172. *Mira igitur facilitate ostendimus ad captum Tyronum, quomodo potentiæ cujuscunque gradus ex additione numerorum imparium procreentur, quod imperfectius multoque intricatius proponitur in* Miscellaneis Berolinensibus p. 327. & seqq.

PROBLEMA LXI.

173. *Invenire tres numeros continue proportionales; dato facto ex quadrato tertii in primum, una cum denominatore rationis.*

Sit factum $= a$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
erit secundus $= mx$ } (§. 114).
tertius $= m^2 x$ }

Quare, per conditionem Problematis,

$$\frac{a = m^4 x^3}{a : m^4 = x^3} \; m^4 \text{ div.}$$

$$\sqrt[3]{(a : m^4)} = x$$

Si

Sit ex. gr. $a = 648$, $m = 3$: erit $x = \sqrt[3]{(648 : 81)} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Æquatio 1ª resolvitur in hanc analogiam $1 : m^4 = x^3 : a$ (§.299. *Arithm.*)

Quare cum $1 : m^4$ sit ratio quadruplicata $1 : m$ (§.159 *Arithm.*); ſequens enaſcitur

Theorema: Cubus termini primi in proportione geometrica continua eſt ad factum ex quadrato tertii in primum in ratione quadruplicata primi ad ſecundum.

PROBLEMA LXII.

174. *Numerum datum in tres partes continue proportionales dividere, dato denominatore rationis.*

Sit numerus datus $= a$
denominator $= b$
pars prima $= x$
erit ſecunda $= bx$
tertia $= b^2x$ (§.114)

&, per conditionem Problematis,

$$b^2x + bx + x = a$$

$b^2 + b + 1$ div.

$$x = a : (b^2 + b + 1)$$

Sit $b = 4$, $a = 42$: erit $x = 42 : (16 + 4 + 1) = 42 : 21 = 2$.

PROBLEMA LXIII.

175. *Numerum datum in terminos quotcunque proportionales reſolvere, dato denominatore rationis.*

Sit numerus datus $= a$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
erit ſecundus $= mx$
tertius $= m^2x$
quartus $= m^3x$ &c.

Ergo, per conditionem Problematis,

$$x + mx + m^2x + m^3x + m^4x \text{ \&c.} = a$$

$$x = a : (1 + m + m^2 + m^3 + m^4 \text{ \&c.})$$

Sit $a = 364$, $m = 3$ & termini ſint numero ſex: erit $x = 364 : (1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243) = 364 : 364 = 1$. Ergo 1, 3, 9, 27, 81, 243 eſt ſeries proportionalium quæſita.

PROBLEMA LXIV.

176. *Inter duos numeros datos invenire quotcunque medios continue proportionales.*

RESOLUTIO.

Sit primus datorum $= a$
ultimus $= b$
mediorum primus $= x$
numerus mediorum $= m$

erit, per conditionem Problematis (§. 302 *Arithm.*)

$$a,\ x,\ \frac{x^2}{a},\ \frac{x^3}{a^2},\ \frac{x^4}{a^3},\ \text{\&c.}\ \frac{x^m}{a^{m-1}},\ b$$

conſequenter (§. 118)

$$x^{m+1} : a^{m-1} = ab$$

a^{m-1} m.

$$x^{m+1} = a^m b$$

Ext. Rad.

$$x = \sqrt[m+1]{a^m b}$$

Sit $a = 1$, $b = 243$, $m = 4$; erit $m + 1 = 5$, adeoque $x = \sqrt[5]{243} = 3$; conſequenter termini intermedii ſunt 3, 9, 27, 81.

SCHOLION.

177. *Ad manus eſſe debet Tabula dignitatum ſuperiorum pro digitis ſingulis, qualis extat pro quadratis & cubis* (§. 257 *Arithm.*).

COROLLARIUM.

178. Quodſi numerus, qui exprimit terminum deſideratum, fuerit n; erit medius proportionalis $= x^n : a^{n-1}$. Quare, ſi pro x ſubſtituatur valor modo inventus $\sqrt[m+1]{a^m b} = a^{m:(m+1)} b^{1:(m+1)}$; prodibit numerus quæſitus $= a^{mn:(m+1)} b^{n:(m+1)} : a^{n-1}$ $= a^{mn:(m+1)} b^{n:(m+1)} : a^{(mn-m+n-1):(m+1)}$ $= a^{(m-n+1):(m+1)} b^{n:(m+1)}$.

SCHOLION.

179. *Cadant, ex. gr. inter* 1 *&* 243 *quatuor medii proportionales continue, & quæratur eorum ſecundus: erit* $a = 1$, $b = 243$, $m = 4$, $n = 2$, *adeoque* $(m - n + 1) : (m + 1) = \frac{3}{5}$, $n : (m + 1) = \frac{2}{5}$, *conſequenter numerus quæſitus* $\sqrt[5]{a^3 b^2} = \sqrt[5]{59049} = 9$.

PROBLEMA LXV.

180. *Data ſumma termini primi & ultimi, itemque ſumma ſecundi & tertii, in proportione ſive continua, ſive diſcreta, una cum denominatore rationis; invenire terminos ſingulos.*

Sit ſumma prima $= a$
ſecunda $= b$
denominator $= m$
terminus primus $= x$,
erit quartus $= a - x$
ſecundus $= mx$
tertius $= b - mx$

Quare, per conditionem Problematis,

$$x : mx = b - mx : a - x$$

Hinc $ax - x^2 = mbx - m^2x^2$ — x div.

$$a - x = mb - m^2 x$$

$$m^2 x - x = mb - a$$ — $m^2 - 1$

$$x = \frac{mb - a}{m^2 - 1}$$

Sit $a = 13$, $b = 11$, $m = 2$: erit $x = (22 - 13) : (4 - 1) = 9 : 3 = 3$.

PROBLEMA LXVI.

* 180. *Invenire tres numeros continue proportionales ejus conditionis, ut differentia primi & ſecundi æquetur numero dato, & differentia ſecundi atque tertii æqualis ſit itidem numero dato.*

Sit differ. prima $= a$
differ. ſecunda $= b$
terminus I $= x$
erit II $= x + a$
III $= x + a + b$

Per conditionem Problematis,

$$x : x + a = x + a : x + a + b$$

$$x^2 + ax + bx = x^2 + 2ax + a^2$$

$$x^2 + ax \qquad x^2 + ax$$ ſubt.

$$bx = ax + a^2$$

$$bx - ax = a^2$$ — $(b-a)$ div.

$$x = a^2 : (b - a)$$

Sit $a = 8$, $b = 24$: erit $x = 64 : (24 - 8) = 64 : 16 = 4$.

Analogia, in quam reſolvitur æquatio antepenultima, $b - a : a = a : x$, ſequens continet

Theorema: Si fuerint tres numeri continue proportionales, erit differentia primi & ſecundi numerus medius proportionalis inter differentiam differentiæ termini primi & ſecundi a differentia ſecundi ac tertii & terminum primum.

PROBLEMA LXVII.

181. *Datis in progreſſione geometrica termino primo & ultimo, atque terminorum numero; invenire denominatorem rationis.*

Sit

Sit terminus primus $= a$

ultimus $= b$

numerus terminorum $= n$

denominator $= x$

Erit (§. 121)

$$b = x^{n-1} a$$

——————— a div.

$$b : a = x^{n-1}$$

$$b^{1:(n-1)} : a^{1:(n-1)} = x.$$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $n = 6$: erit $x = \sqrt[5]{(486 : 2)} = \sqrt[5]{243} = 3$.

PROBLEMA LXVIII.

182. *Datis denominatore rationis, terminorum numero, & summa progressionis geometricæ; invenire terminum primum.*

Sit denominator $= m$

numerus terminorum $= n$

summa progress. $= c$

terminus primus $= x$

erit ultimus $= m^{n-1} x$

consequenter (§. 121)

$$c = (m^n x - x) : (m - 1)$$

——————— $m - 1$

$$mc - c = m^n x - x$$

——————— $m^n - 1$

$$(mc - c) : (m^n - 1) = x$$

Sit $m = 3$, $n = 6$, $c = 728$: erit $x = 2.728 : 728 = 2$.

Analogia, in quam æquatio penultima resolvitur, $c : x = m^n - 1 : m - 1$, suppeditat hoc

Theorema: Summa progressionis geometricæ est ad terminum primum, ut dignitas denominatoris rationis, cujus exponens numero terminorum æqualis est, unitate mulctata ad denominatorem ipsum unitate imminutum.

PROBLEMA LXIX.

183. *Datis, in progressione geometrica, termino primo & ultimo, una cum denominatore rationis; invenire numerum terminorum.*

Sit terminus primus $= a$

ultimus $= b$

denominator rationis $= m$

numerus terminorum $= x$

erit (§. 121)

$m^{x-1} a = b$, hoc est, si logarithmus ipsius a ponatur la, logarithmus ipsius $m = lm$, & logarithmus ipsius $b = lb$,

$$xlm - lm + la = lb \text{ (§. 341, 337 } Arith.)$$

$$xlm = lb - la + lm$$

——————— lm div.

$$x = (lb - la) : lm + 1$$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $m = 3$, erit

$lb = 2.6866363$

$la = 0.3010300$

$lb - la = 2.3856063$

3 1 1

$lb - la = 23856063$ (5

$lm = 4771213$ 1

$6 = x$

PROBLEMA LXX.

184. *Datis summa progressionis geometricæ, termino primo, atque ultimo; invenire numerum terminorum ac denominatorem rationis.*

Sit summa $= c$

terminus primus $= a$

ultimus $= b$

denominator rationis $= y$

numerus terminorum $= x$

erit (§. 121)

$$c = (by - a) : (y - 1) \qquad b = y^{x-1} a$$

$$cy - c = by - a$$

$$cy - by = c - a$$

——————— $c - b$

$$y = (c - a) : (c - b)$$

 Æqua-

Æquatio altera, adhibitis logarithmis, in sequentem degenerat (§. 341, 337 *Arithm.*).

$$lb = xly - ly + la$$

$$lb + ly - la = xly$$

ly div.

$$(lb - la) : ly + 1 = x$$

Quodsi substituatur valor ipsius ly paulo ante inventus, qui est, $l(c - a) - l(c - b)$; habebimus.

$$\frac{lb - la}{l(c - a) - l(c - b)} + 1 = x$$

Sit $c = 728$, $a = 2$, $b = 486$: erit

$lb = 2.6866363$	$c = 728$
$la = 0.3010300$	$b = 486$
$lb - la = 2.3856063$	$c - b = 242$
$l(c-a) = 2.8609366$	$c = 728$
$l(c-b) = 2.3838154$	$a = 2$
Differ. $= 4771212$	$c - a = 726$

23856063 (5
4771212 (1

$$6 = x$$

PROBLEMA LXXI.

185. *Datis, in progressione geometrica, facto ex primo in ultimum, numero terminorum & denominatore rationis; invenire terminum primum & ultimum.*

Sit factum $= f$
numerus termin. $= n$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
ultimus $= y$

erit, per conditiones Problematis,

$xy = f$ $m^{n-1} x = y$

x div.

$y = f : x$

Quare (§ 87 *Arithm.*)

$$f : x = m^{n-1} x$$

x mult.

$$f = m^{n-1} x^2$$

m^{n-1} div.

$$f : m^{n-1} = x^2$$

Ext. Rad.

$$\sqrt{f} : \sqrt{m^{n-1}} = x$$

Sit $m = 3$, $n = 6$, $f = 972$: erit $x = \sqrt{972} : \sqrt{243} = \sqrt{4} = 2$.

DEFINITIO XIII.

186. Tres vel quatuor *quantitates* dicuntur *Harmonice proportionales*, si, in priore casu, differentia primi & secundi fuerit ad differentiam secundi atque tertii, ut primus ad tertium; in casu posteriore, differentia primi & secundi ad differentiam tertii & quarti ut primus ad quartum:

Ex. gr. 10, 16 & 40 sunt in proportione harmonica: est enim $6 : 24 = 10 : 40$.

Si termini proportionales in casu priore continuentur; oritur *Progressio Harmonica*.

PROBLEMA LXXII.

187. *Datis duabus quantitatibus, invenire tertiam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= b$
tertia $= x$
erit (§. 186)

$$b - a : x - b = a : x$$

$$ax - ab = bx - ax \text{ (§. 297 } Arith.\text{)}$$

$$2ax - bx = ab$$

$(2a - b)$ div.

$$x = ab : (2a - b)$$

Ex. gr. Sit $a = 10$, $b = 16$: erit $x = 160 : (20 - 16) = 160 : 4 = 40$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam $2a - b : a = b : x$, unde sequens enascitur

Theo-

Theorema. Si fuerint tres numeri harmonice proportionales, erit differentia secundi a duplo primi ad primum, ut secundus ad tertium.

COROLLARIUM I.

188. Si $2a = b$; erit $x = ab : 0$, consequenter $1 : 0 = x : ab$ (§. 174 *Arithm.*). Quare cum non sit $1 = 0$, nec erit $x = ab$, adeoque in hoc casu nullus numerus harmonice proportionalis ipsis a & b inveniri potest. Ex. gr. si $a = 12$, $b = 24$: juxta regulam $x = 12.24 : (24 - 24) = 12.24 : 0$. Sed non licet 12. 24 seu 288 pro termino tertio assumere: alias enim foret $12 : 264 = 12 : 288$ (§. 186): Quod absurdum. Multo minus inveniri poterit, si $b > 2a$.

COROLLARIUM II.

189. Quodsi ex tribus proportionalibus 6, 8, 12, terminus secundus sumatur pro a, tertius pro b, invenietur quartus continue proportionalis $= 8.12 : (16 - 12) = 8.12 : 4 = 8.3 = 24$.

COROLLARIUM III.

190. Cum eodem modo, si tertius pro a, quartus pro b sumatur, quintus inveniri queat, & ita porro in infinitum; datis duobus terminis progressio, si possibile (§. 188), continuatur per regulam inventam. Ex. gr. si $a = 10$, $b = 12$, erit tertius $12.10 : (20 - 12) = 15$. Inde quartus $12.15 : (24 - 15) = 20$; quintus $15.20 : (30 - 20) = 30$; sextus $20.30 : (40 - 30) = 60$. Sed ulterius continuari nequit ob $60 = 2.30$ (§. 188).

PROBLEMA LXXIII.

191. *Datis duabus quantitatibus; invenire mediam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= x$
tertia $= b$
erit $x - a : b - x = a : b$ (§. 186)

$bx - ab = ab - ax$ (§. 297 *Arithm.*)

$ax + bx = 2ab$

$a + b$ div.

$x = 2ab : (a + b)$

Ex. gr. Sit $a = 10$, $b = 40$: erit $x = 800 : 50 = 16$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam, $a + b : 2a = b : x$; unde

Theorema: Si fuerint tres numeri harmonice proportionales, erit summa primi & ultimi ad primi duplum, ut ultimus ad medium.

PROBLEMA LXXIV.

192. *Datis tribus quantitatibus; invenire quartam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= b$
tertia $= c$
quarta $= x$
erit (§. 186)

$b - a : x - c = a : x$

$bx - ax = ax - ac$ (§. 297 *Arithm.*)

$ac = 2ax - bx$

$(2a - b)$ div.

$ac : (2a - b) = x$

Sit ex. gr. $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$: erit $x = 72 : (12 - 8) = 72 : 4 = 18$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam: $2a - b : a = c : x$.

Theorema. Si fuerint quatuor quantitates harmonice proportionales, erit ut differentia secundæ a duplo primæ ad primam, ita tertia ad quartam.

DEFINITIO XIV.

193. *Proportio Contraharmonica* est ea terminorum trium relatio, in qua differentia primi & secundi est ad

differentiam secundi & tertii ut tertius ad primum.

Ex. gr. 3, 5 & 6 sunt numeri contraharmonice proportionales: est enim $2 : 1 = 6 : 3$.

PROBLEMA LXXV.

194. *Datis duabus quantitatibus; invenire tertiam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= b$
tertia $= x$
erit (§. 193)

$$b - a : x - b = x : a$$

$$ab - aa = x^2 - bx \quad (\text{§. 297 } Arithm.)$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 \qquad \tfrac{1}{4}b^2 \quad \text{add.} \quad (\text{§. 143})$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2 = x^2 - bx + \tfrac{1}{4}b^2$$

Ext. Rad.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2)} = x - \tfrac{1}{2}b, \text{ ob } x > b$$

$$\tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2)} = x$$

Ex. gr. Sit $a = 3$, $b = 5$: erit $x = \frac{5}{2} + \sqrt{(\frac{25}{4} + 15 - 9)} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$

PROBLEMA LXXVI.

195. *Datis duabus quantitatibus; invenire mediam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$ media $= x$
[illegible] $= b$
erit (§. 193)

$$x - a : b - x = b : a$$

$$ax - a^2 = b^2 - bx \quad (\text{§. 297 } Arithm.)$$

$$ax + bx = a^2 + b^2$$

$a + b$ div.

$$x = (a^2 + b^2) : (a + b)$$

Ex. gr. sit $a = 3$, $b = 6$: erit $x = (9 + 36) : (3 + 6) = 45 : 9 = 5$.

Theorema. Si summa duorum quadratorum dividitur per summam radicum, quotus est inter radices medius contraharmonice proportionalis.

DEFINITIO XV.

196. *Numerus pronicus* est, qui aggregato ex radice & quadrato ejusdem æqualis.

COROLLARIUM I.

197. Si in progressione arithmetica terminus primus fuerit 2, differentia terminorum itidem 2, numerus terminorum $= n$; erit summa progressionis $= 2n + \frac{1}{2}(n^2 - n)2$ (§. 108), $= 2n + n^2 - n = n^2 + n$, adeoque numerus pronicus, cujus radix numero terminorum æqualis.

COROLLARIUM II.

198. Patet adeo numeros pronicos prodire per summationem progressionis numerorum parium. Sit enim
progressio 2, 4, 6, 8, 10, &c.
erunt pronici 2, 6, 12, 20, 30, &c.

PROBLEMA LXXVII.

199. *Ex dato numero radicem pronicam extrahere.*

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= a$, radix pronica $= x$
erit (§. 196)

$$x^2 + x = a$$

$$\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{4} \quad (\text{§. 143})$$

$$x^2 + x + \tfrac{1}{4} = a + \tfrac{1}{4}$$

$$x + \tfrac{1}{2} = \sqrt{(a + \tfrac{1}{4})} = \sqrt{\frac{4a+1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4a+1)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4a+1)} - \tfrac{1}{2}$$

Theorema. Si quadruplo numeri pronici addatur unitas, & radix unitate mulctata bifariam dividatur, quotus est radix pronica.

Sit $a = 72$, erit $x = \frac{1}{2}\sqrt{(4.72 + 1)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{289} - \frac{1}{2} = \frac{17}{2} - \frac{1}{2} = 8$.

Examen. Nam $64 + 8 = 72$.

PRO-

PROBLEMA LXXVIII.

200. *Invenire summam Quadratorum & Cuborum, quorum radices in serie numerorum naturali progrediuntur.*

Sit $0+1+1+1+1+1$ &c. $=\int n^0$
$0+1+2+3+4+5$ &c. $=\int n^1$
$0+1+4+9+16+25$ &c. $=\int n^2$
$0+1+8+27+64+125$ &c. $=\int n^3$
&c. &c.

$1+1+1+1+1+1$ &c. $=\int(n+1)^0$
$1+2+3+4+5+6$ &c. $=\int(n+1)^1$
$1+4+9+16+25+36$ &c. $=\int(n+1)^2$
$1+8+27+64+125+216$ &c. $=\int(n+1)^3$
&c. &c.

Nimirum $\int n^0$ denotat summam quotlibet unitatum seriei a cyphra incipientis; $\int(n+1)^0$ summam quotlibet unitatum seriei ab unitate incipientis, quia 0 est exponens unitatis (§.55). Sed n repræsentat unamquamque unitatem in serie prima; $n+1$ in altera. Ergo, si numerus terminorum in utraque serie idem; erit $\int(n+1)^0-\int n^0=(n+1)^0=1$. Similiter $\int n^1$ denotat summam seriei numerorum naturalium a cyphra incipientis, & n quemlibet ejus terminum: $\int(n+1)^1$ summam seriei eorundem numerorum ab unitate incipientium & $n+1$ quemlibet ejus terminum 1, 2, 3 &c. quia 1 est exponens radicum, seu dignitatis primæ (§.*cit.*). Quare si in utraque serie fuerit idem terminorum numerus, erit $\int(n+1)^1-\int n^1=(n+1)^1$, ubi $n+1$ terminum ultimum seriei ab unitate incipientis denotat, quo scilicet ea differt a serie, quæ a cyphra inchoatur. Eodem modo patet, esse $\int(n+1)^2-\int n^2=(n+1)^2$, $\int(n+1)^3-\int n^3=(n+1)^3$, $\int(n+1)^4-\int n^4=(n+1)^4$ &c. & in genere $\int(n+1)^{m+1}-\int n^{m+1}=(n+1)^{m+1}$.

Jam $(n+1)^2=n^2+2n+1$ (§.81)

$$\int(n+1)^2=\int n^2+2\int n^1+\int n^0+1$$
$$\int(n+1)^2-\int n^2-\int n^0-1=2\int n^1$$

hoc est, ob $\int(n+1)^2-\int n^2=(n+1)^2$ *per* (*dem.*

$$(n+1)^2-\int n^0-1=2\int n^1$$
2 div.
$$\tfrac{1}{2}(n+1)^2-\tfrac{1}{2}\int n^0 \quad \tfrac{1}{2}=\int n^1$$

Ex.gr. Sit $n=5$, erit $\frac{1}{2}(n+1)^2=\frac{36}{2}=18$, $\frac{1}{2}\int n^0=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$, adeoque $\int n^1$ summa omnium radicum ab 0 usque ad $5=18-3=15$. Similiter, sit $n=3$, erit $\frac{1}{2}(n+1)^2=8$, $\frac{1}{2}\int n^0=1\frac{1}{2}$, adeoque $\int n^1=6$.

Est porro

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1 \text{ (§.84)}$$
$$\int(n+1)^3=\int n^3+3\int n^2+3\int n^1+\int n^0+1$$
$$\int(n+1)^3-\int n^3-3\int n^1-\int n^0-1=3\int n^2$$

h.e. ob $\int(n+1)^3-\int n^3=(n+1)^3$ *per de-*

$$(n+1)^3-3\int n^1-\int n^0-1=3\int n^2 \text{ (*monst.*}$$
3 div.
$$\tfrac{1}{3}(n+1)^3-\int n^1-\tfrac{1}{3}\int n^0-\tfrac{1}{3}=\int n^2$$

Ex. gr. Sit $n=5$, erit $\frac{1}{3}(n+1)^3=\frac{216}{3}=72$, $\int n^1=15$, $\frac{1}{3}\int n^0=1\frac{2}{3}$, adeoque $\int n^2=72-17=55$. Similiter sit $n=3$, erit $\frac{1}{3}(n+1)^3=21\frac{1}{3}$, $\int n=6$, $\frac{1}{3}\int n^0=1$, adeoque $\int n^2=21\frac{1}{3}-7\frac{1}{3}=14$.

Sit denique

$$(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1$$
$$\int(n+1)^4=\int n^4+4\int n^3+6\int n^2+4\int n^1+\int n^0+1$$
$$\int(n+1)^4-\int n^4-6\int n^2-4\int n^1-\int n^0-1=4\int n^3$$

h.e. ob $\int(n+1)^4-\int n^4=(n+1)^4$ *per demonst.*

$$(n+1)^4-6\int n^2-4\int n^1-\int n^0-1=4\int n^3$$
4
$$\tfrac{1}{4}(n+1)^4-\tfrac{3}{2}\int n^2-\int n^1-\tfrac{1}{4}\int n^0-\tfrac{1}{4}=\int n^3.$$

Sit ex. gr. $n=5$, erit $\frac{1}{4}(n+1)^4=324$, $\frac{3}{2}\int n^2=82\frac{1}{2}$, $\int n^1=15$, $\frac{1}{4}\int n^0=1\frac{1}{4}$, adeoque $\int n^3=324-99=225$.

SCHO-

SCHOLION I.

201. *Quod in ſummationibus, quibus in reſolutione Problematis uſi ſumus, ſemper addenda ſit unitas, exempla ſingularia palam loquuntur. Si enim in æquatione* $\int(n+1)^2 = \int n^2 + 2\int n + \int n^0 + 1$ *fuerit* $n = 4$ *erit:*

$$\int n^0 = 0+1+1+1+1$$
$$\int n^1 = 0+1+2+3+4$$
$$\int n^2 = 0+1+4+9+16$$
$$\int(n+1)^2 = 1+4+9+16+25$$

Unde cum differentia inter $\int(n+1)^2$ *&* $\int n^2$ *ſit 25, &* $2\int n^1 + \int n^0$ *tantum 24; patet, ad conſervandam æqualitatem, addendam eſſe unitatem.*

SCHOLION II.

202. *Eadem methodo, qua numerorum naturalium Quadrata & Cubos ſummare docuimus, altiores quoque dignitates ſummantur. Sed cum potentiæ in infinitum aſſurgant, ideo Problema generale pro caſibus infinitis inveniendum.*

PROBLEMA LXXIX.

203. *Summare Potentias quaſcunque numerorum naturalium.*

Quoniam $(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + \frac{m+1}{1} n^m + \frac{m+1.m}{1.2} n^{m-1} + \frac{m+1.m.m-1}{1.2.3} n^{m-2} + \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.2.3.4} n^{m-3}$ &c. in infinit. (§. 95); erit

$$\int(n+1)^{m+1} = \int n^{m+1} + \frac{m+1}{1}\int n^m + \frac{m+1.m}{1.2}\int n^{m-1} + \frac{m+1.m.m-1}{1.2.3}\int n^{m-2} + \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.2.3.4}\int n^{m-3} \text{ \&c. in inf.} + 1.$$

Hinc $\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} - \frac{m+1.m}{1.2}\int n^{m-1} - \frac{m+1.m.m-1}{1.2.3}\int n^{m-2} - \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.2.3.4}\int n^{m-3}$ &c. $- 1 = \frac{m+1}{1}\int n^m$.

Sed $\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} = (n+1)^{m+1}$ (§. 200): Ergo $(n+1)^{m+1} - \frac{m+1.m}{1.2}\int n^{m-1} - \frac{m+1.m.m-1}{1.2.3}\int n^{m-2} - \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.2.3.4}\int n^{m-3}$ &c. in infin. $- 1 = \frac{m+1}{1}\int n^m$: conſequenter $\int n^m = \frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1} - \frac{m}{1.2}\int n^{m-1} - \frac{m.m-1}{1.2.3}\int n^{m-2} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.4}\int n^{m-3}$ &c. in infinit. $- \frac{1}{m+1}$.

Ex. gr. ſit $m = 3$, erit $m+1 = 4$, $m-1 = 2$, $m-2 = 1$, $m-3 = 0$, adeoque $\frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{3}{2}\int n^2 - \int n^1 - \frac{1}{4}\int n^0 - \frac{1}{4} = \int n^3$, ut ante (§. 200).

SCHOLION.

204. *Theorema generale terminis quidem conſtat infinitis; in caſibus tamen ſpecialibus numerus terminorum finitus evadit, quia reliqui evaneſcunt, quando numerus ab* m *ſubtrahendus fit ipſi* m *æqualis: quemadmodum ex allato exemplo ſpeciali apparet. Ita vero ſummationem Potentiarum via vere analytica eruimus, eaque perfacili, ad captum Tyronum. Semper tamen utendum eſt termino ultimo* $\frac{1}{m+1}$: *cujus ratio ante allata* (§. 201).

COROLLARIUM.

205. Cum ſummatio Potentiarum ſuperiorum a ſummatione omnium inferiorum pendeat; ſi in formulis altioribus pro $\int n^{m-1}$, $\int n^{m-2}$, $\int n^{m-3}$ &c. valores ex inferioribus ſubſtituantur, prodibunt formulæ per ſolum n ſummas Potentiarum determinantes, non præſuppoſitis ſummationibus anterioribus: Ex. gr.

$\int n^0$

$\int n^0 = n.$ (§.200)

$$2\int n^1 = (n+1)^2 \quad \int n^0 - 1 \text{ (§. 200).}$$
$$= nn + 2n + 1$$
$$- n$$
$$- 1$$
$$= nn + n$$

Hinc $\int n^1 = (nn + n) : 2.$

$$3\int n^2 = (n+1)^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1 \text{ (§.200)}$$
$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$
$$- \tfrac{3}{2} n^2 - \tfrac{3}{2} n$$
$$- n$$
$$- 1$$
$$= n^3 + \tfrac{3}{2} n^2 + \tfrac{1}{2} n$$

Hinc $\int n^2 = (n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n) : 3 = (2n^3 + 3n^2 + n) : 6.$

$$4\int n^3 = (n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1 \text{ (§.200)}$$
$$= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$
$$- 2n^3 - 3n^2 - n$$
$$- 2n^2 - 2n$$
$$- n$$
$$- 1$$
$$= n^4 + 2n^3 + n^2$$

Hinc $\int n^3 = (n^4 + 2n^3 + n^2) : 4.$

$$5\int n^4 = (n+1)^5 - 10\int n^3 - 10\int n^2 - 5\int n^1 - \int n^0 - 1$$
$$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$$
$$- \tfrac{10}{4} n^4 - \tfrac{20}{4} n^3 - \tfrac{10}{4} n^2$$
$$- \tfrac{20}{6} n^3 - \tfrac{30}{6} n^2 - \tfrac{10}{6} n$$
$$- \tfrac{5}{2} n^2 - \tfrac{5}{2} n$$
$$- n$$
$$- 1$$
$$= n^5 + \tfrac{5}{2} n^4 + \tfrac{10}{6} n^3 \quad - \tfrac{1}{6} n$$
$$= (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n) : 6$$

Hinc $\int n^4 = (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n) : 30$

&c. &c. &c.

DEFINITIO XVI.

206. *Numeri Polygoni* sunt summæ progressionum arithmeticarum ab unitate incipientium. Dicuntur in specie *Triangulares*, si differentia terminorum fuerit 1; *Quadrati*, si 2; *Pentagoni*, si 3; *Hexagoni*, si 4; *Heptagoni*, si 5; *Octogoni*, si 6 &c.

Progr. Arithm.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
Num. Triang.	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36
Progr. Arithm.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15
Num. Quadr.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64
Progr. Arithm.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22
Num. Pentag.	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92
Progr. Arithm.	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29
Num. Hexag.	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120

SCHOLION.

207. *Numeri Polygoni nomina sortiuntur a figuris geometricis, in quas puncta unitatibus respondentia disponi possunt. Ex. gr. Tria puncta numeri triangularis 3 unitatibus respondentia disponuntur in triangulum: & idem tenendum est de reliquis numeris triangularibus.*

DEFINITIO XVII.

208. *Latus numeri Polygoni* est numerus terminorum progressionis arithmeticæ, qui summantur. *Numerus* vero *angulorum* est, qui indicat, quot angulos figura habet, unde numerus Polygonus nomen suum sortitur.

COROLLARIUM.

209. Numerus adeo angulorum in triangularibus 3; in tetragonis 4; in pentagonis 5 &c. consequenter differentiam terminorum, qui summantur, excedit duabus unitatibus (§. 206).

PROBLEMA LXXX.

210. *Dato latere numeri [illegible] numero angulorum; invenire numerum Polygonum.*

Sit latus $= n$

numerus angulorum $= a$

terminus primus progressionis $= 1$ (§. 206).

differentia terminorum $= a - 2$ (§. 209).

terminus ultimus $1 + (a - 2)(n - 1)$

primus 1 (§. 333 *Arith.*)

Summa primi & ult. $2 + (a - 2)(n - 1)$

hoc est $4 + na - 2n - a$

dimid. term. num. $\frac{1}{2} n$

Num. Polyg. $2n + \frac{1}{2}n^2 a - n^2 - \frac{1}{2}an$ (§.206,107)

$= (n^2 a - 2n^2 - an + 4n) : 2$

$= (n^2(a-2) - n(a-4)) : 2$

Theorema. Numerus Polygonus eſt ſemidifferentia factorum ex quadrato lateris in numerum angulorum duabus unitatibus mulctatum, & ex ipſo latere in numerum angulorum quaternario mulctatum.

Corollarium I.

211. Sit $n = 3$, erit triangularis, $= \frac{1n^2 + 1n}{2}$

Sit $a = 4$, erit quadratus $= \frac{2n^2 - 0n}{2} = n^2$

Sit $a = 5$, erit pentagonus $= \frac{3n^2 - 1n}{2}$

Sit $a = 6$, erit hexagonus $= \frac{4n^2 - 2n}{2} = n^2 - n$

Sit $a = 7$, erit heptagonus $= \frac{5n^2 - 3n}{2}$

Sit $a = 8$, erit octogon. $= \frac{6n^2 - 4n}{2} = 3n^2 - 2n$

&c. &c.

Corollarium II.

212. Quoniam numerus Polygonus (§.210). $(n^2(a-2) - n(a-4)) : 2$, erit ſumma ſeriei cujuſcunque numerorum polygonorum $((a-2)\int n^2 - (a-4)\int n^1) : 2$. Nempe quia $a-2$ & $a-4$ ſunt numeri conſtantes, qui in caſu ſpeciali ſunt determinati, non ſummantur. Sed $\int n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ & $\int n^1 = \frac{n^2 + n}{2}$

$= \frac{3n^2 + 2n}{2}$ (§.2[illegible]). Ergo ſumma polygonorum $((a-2)(2n^3 + 3n^2 + n) - (a-4)(3n^2 + 3n)) : 12 = (2an^3 + 3an^2 + an - 4n^3 - 6n^2 - 2n - 3an^2 - 3an + 12n^2 + 12n) : 12 = (an^3 - an - 2n^3 + 3n^2 + 5n) : 6 = ((a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n) : 6$ unde porro Theoremata ſpecialia eliciuntur, determinato numero angulorum a. Nempe ſumma triangularium $(n^3 + 3n^2 + 2n) : 6$

pentagonorum $(n^3 + n^2) : 2$

hexagonorum $(4n^3 + 3n^2 - n) : 6$

heptagonorum $(5n^3 + 3n^2 - 2n) : 6$

octogonorum $(2n^3 + n^2 - n) : 2$ &c. &c.

Eſt enim pro triangularibus $a = 3$, pro pentagonis $a = 5$, pro hexagonis $a = 6$, pro heptagonis $a = 7$, pro octogonis $a = 8$, &c. (§.208).

Problema LXXXI.

213. *Dato numero Polygono, & numero angulorum; invenire latus.*

Sit numerus Polygonus $= p$, latus $= x$

numerus angulorum $= a$

erit differentia terminor. $= a-2$ (§.209)

terminus primus $= 1$ (§.206)

adeoque ultimus $= 1 + (x-1)(a-2)$

hoc eſt $3 + ax - 2x - a$ (§.333 Arithm.)

terminus primus 1

ſumma pr. & ult. $4 + ax - 2x - a$

dimid. num. term. $\frac{1}{2}x$

numerus Polygon. $2x + \frac{1}{2}ax^2 - x^2 - \frac{1}{2}ax$ (§.107).

Quare $\frac{1}{2}ax^2 - x^2 + 2x - \frac{1}{2}ax = p$

$ax^2 - 2x^2 + 4x - ax = 2p$

$$x^2 + \frac{4-a}{a-2}x = \frac{2p}{a-2}$$

hoc eſt, ſi fiat $(a-4) : (a-2) = m$

$x^2 - mx = 2p : (a-2)$

$\frac{1}{4}m^2 \quad \frac{1}{4}m^2$

$x^2 - mx + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2)$

$\left.\begin{matrix} x - \frac{1}{2}m \\ m - \frac{1}{2}x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2))}$

$x = \frac{1}{2}m + \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2))}$

hoc eſt, ſubſtituto valore ipſius m,

$$x = \frac{a-4}{2a-4} + \sqrt{\left(\frac{a^2 - 8a + 16}{4a^2 - 16a + 16} + \frac{4p}{2a-4}\right)}$$

$$\frac{a - 4 + \sqrt{(8ap - 16p + a^2 - 8a + 16)}}{2a-4}$$

$$= \frac{a - 4 + \sqrt{(8(a-2)p + (a-4)^2)}}{2a-4}$$

obti-

obtinet nimirum signum +, quia radix major est quam $a - 4$

Sit ex. gr. $a = 3$, erit latus numeri triangularis $\frac{-1 + \sqrt{(8p+1)}}{2}$

Sit $a = 5$, erit latus pentagoni $\frac{1 + \sqrt{(24p+1)}}{6}$

Sit $a = 6$, erit latus hexagoni $\frac{2 + \sqrt{(32p+4)}}{8}$

Sit $a = 7$, erit latus heptag. $\frac{3 + \sqrt{(40p+9)}}{10}$

&c. &c.

DEFINITIO XVIII.

214. Summæ numerorum Polygonorum eodem modo collectæ, quo ex progressionibus arithmeticis ipsi Polygoni eliciuntur, dicuntur *Pyramidales primi*: Summæ Pyramidalium primorum *Pyramidales secundi*: summæ Pyramidalium secundorum *Pyramidales tertii* &c. in infinitum. Speciatim *Pyramidales triangulares primi* vocantur, si ex triangularibus ortum ducant; *Pyramidales pentagoni primi*, si ex pentagonis oriuntur &c.

Ex. gr. Num. triang.	= 1, 3, 6, 10, 15, 21
Pyram. triang. pr.	= 1, 4, 10, 20, 35, 56
secundi	= 1, 5, 15, 35, 70, 126
tertii	= 1, 6, 21, 56, 126, 252
&c.	&c.

COROLLARIUM.

215. Cum igitur summare docuerimus numeros Polygonos (§. 212), evidens jam est, quomodo numeri pyramidales primi inveniantur. Nempe $((a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n) : 6$ exprimit numeros pyramidales primos, *vi §. cit.*

PROBLEMA LXXXII.

216. *Invenire summam numerorum Pyramidalium superioris ordinis cujuscunque, seu dato quolibet inferiore proxime superiorem.*

Non alia re opus est, quam ut juxta methodum superius traditam (§. 200) numeri Pyramidales proxime inferioris ordinis summentur: ita enim habentur eorum summæ. Quare cum numerus Pyramidalis primi ordinis sit $((a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n) : 6$ (§. 215): erit summa Pyramidalium primi ordinis $((a-2)\int n^3 + 3\int n^2 - (a-5)\int n^1) : 6$. Sed $\int n^3 = (n^4 + 2n^3 + n^2) : 4$, $\int n^2 = (2n^3 + 3n^2 + n) : 6$, $\int n^1 = (n^2 + n) : 2$, (§. 205). Ergo summa Pyramidalium primi ordinis, seu numerus Pyramidalis secundi ordinis $= ((a-2)(n^4 + 2n^3 + n^2) + 2(2n^3 + 3n^2 + n) - (a-5)(2n^2 + 2n)) : 24$ $= (an^4 + 2an^3 - an^2 - 2an - 2n^4 + 14n^2 + 12n) : 24 = ((a-2)n^4 + 2an^3 - (a+14)n^2) - (2a+12)n) : 24$.

Sit ex. gr. $a = 3$, hoc est quæratur summa Pyramidalium triangularium primi ordinis; erit ea $(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) : 24$. Quoniam vero summa inventa generalis exprimit numerum quemcunque Pyramidalem secundi ordinis (§. 214); si ea porro eundem in modum summetur, prodibit summa Pyramidalium secundi ordinis, seu numerus Pyramidalis [illegible] (§. *cit.*). Et ita progredi licet, quousque libet.

COROLLARIUM I.

217. Cum summa unitatum sit n, summa laterum $\frac{n^2+n}{2} = \frac{n.\,n+1}{1.\,2.}$ (§. 205), summa triangularium $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n.\,n+1\,.\,n+2}{1\,.\,2\,.\,3}$ (§. 215), summa Pyramidalium primi ordi-

ordinis $\frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{24} = \frac{n.n+1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n+2 . n+3}{3 \cdot 4}$ (§. 216) &c. evidens est lex, qua numeri Pyramidales ex triangularibus orti in infinitum summentur. Nimirum numerus fractionum in se invicem ducendarum excedit numerum ordinis tribus unitatibus, fractionum earundem numeratores progrediuntur in serie naturali numerorum, sed terminus primus progressionis est latus numeri figurati, denominatores sunt numerorum naturalium progressio ab unitate incipiens. Nempe dato latere n, erit numerus Pyramidalis triangularis indeterminatus $\frac{n+0 . n+1 . n+2 . n+3 . n+4 . n+5 . \&c.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \quad \&c.}$ in infinit.

COROLLARIUM II.

218. Hinc apparet, quales numeri sint unciæ Potentiarum (§. 95).

PROBLEMA LXXXIII.

219. *Dato numero quantitatum, una cum numero indicante quot earum invicem combinari debeant; invenire numerum combinationum.*

Quantitas una nullam; duæ a & b nonnisi unam combinationem ab admittunt. Trium combinationes sunt tres, nempe ab, ac, bc; quatuor vero sex: ab, ac, ad, bc, bd, cd; quinque decem ab, ac, ad, ae; bc, bd, be; cd, ce; de, & ita porro. Unde apparet, numeros combinationum progredi ut 1, 3, 6, 10, &c. hoc est, esse numeros triangulares (§. 206), quorum latus differt unitate a numero quantitatum datarum. Si nempe hic foret q, erit latus numeri combinationum $q-1$, adeoque numerus combinationum $\frac{q-1 . q+0.}{1 \cdot 2}$ (§. 217).

Si quantitates tres invicem combinandæ & numero itidem tres fuerint, erit combinatio tantum unica abc. Si quarta accedat, combinationes reperies quatuor abc, abd, acd, bcd; si quinta, decem abc, abd, abe, acd, ace, ade, bce, bde, cde; si sexta, viginti, & ita porro. Numeri ergo combinationum progrediuntur, ut 1, 4, 10, 20 &c. hoc est, sunt numeri pyramidales triangulares primi (§. 214), quorum latus a numero quantitatum datarum differt duabus unitatibus, seu exponente unitate mulctato. Hinc si numerus quantitatum datarum fuerit q, erit latus $q-2$; adeoque numerus combinationum $\frac{q-2 . q-1 . q+0.}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ (§. 217.)

Si quantitates quatuor invicem combinandæ, numeros combinationum progredi deprehendimus ut numeros pyramidales triangulares secundi ordinis 1, 5, 15, 35 &c. (§. 214), quorum latus a numero quantitatum differt tribus unitatibus, seu exponente unitate mulctato. Quare si numerus quantitatum fuerit q, erit latus $q-3$, adeoque numerus combinationum $\frac{q-3 . q-2 . q-1 . q+0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ (§. 217.)

Hinc facile abstrahitur regula generalis determinandi numerum combinationum in casu quocunque. Sit nempe numerus quantitatum combinandarum q, exponens combinationis n, erit numerus combinationum $\frac{q-n+1 . q-n+2 . q-n+3 . q-n+4 . q-n+5.}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5.}$ &c. donec numerus addendus fit ipsi n æqualis.

Ex. gr.

Ex. gr. Sit numerus quantitatum combinandarum $= 6$, exponens combinationis 4; erit numerus combinationum $\frac{6-4+1.}{1.} \frac{6-4+2.}{2.} \frac{6-4+3.}{3.} \frac{6-4+4.}{4.} = \frac{6-3.\ 6-2.\ 6-1.\ 6+0}{1\ .\ 2\ .\ 3.\ \ 4.} = \frac{3.4.5.6}{1.2.3.4} = 15.$

COROLLARIUM.

220. Quodsi quantitatum datarum omnes combinationes possibiles scire desideres, incipiendo nempe a combinationibus singularum binarum; addi oportet $\frac{q-1.\ q+0,}{1\ .\ 2}$ $\frac{q-2.\ q-1.\ q+0}{1\ .\ 2\ .\ 3}$, $\frac{q-3.\ q-2.\ q-1.\ q+0}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}$ &c. Unde numerus omnium combinationum possibilium erit $\frac{q.q-1.}{1.\ 2} + \frac{q.q-1.\ q-2}{1.\ 2.\ 3} + \frac{q.q-1.q-2.\ q-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} + \frac{q.q-1.\ q-2.\ q-3.\ q-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$ &c. Quæ est summa unciarum binomii ad dignitatem q evecti, mulctata exponente dignitatis unitate aucto $q + 1$ (§. 95). Quare cum hæ unciæ prodeant $1 + 1$ ad dignitatem q evehendo *per Probl.* 29. (§.*cit.*) sit vero $1 + 1 = 2$; erit $2^q - q - 1$ numerus omnium combinationum possibilium. Ex. gr. Si numerus quantitatum 5, erit numerus combinationum possibilium $2^5 - 6 = 32 - 6 = 26$.

SCHOLION.

221. *Uncias prodire debere, pro binomio* $1 + 1$ *ad eam dignitatem elevando, ad quam elevatur binomium* a + b; *patet exinde, quod uncia partium* a & b *sit* 1, *atque adeo ut facta litteralia ex* a & b, *ita unciæ ex* 1 & 1 *in se invicem ductis prodire debeant. Vide calculum:*

$1 + 1$ *Unc. Rad.*
$1 + 1$
$+ 1 + 1$
$1 + 1$
$1 + 2 + 1$ *Unc. Quadr.*
$1 + 1$ *Unc. Rad.*
$+ 1 + 2 + 1$
$1 + 2 + 1$
$1 + 3 + 3 + 1$ *Unc. Cubi.*
&c. &c.

PROBLEMA LXXXIV.

222. *Dato numero quantitatum; invenire numerum omnium variationum, quas quantitates omnibus modis possibilibus combinatæ ac permutatæ subire possunt.*

Sint quantitates duæ a & b, erunt variationes permutationum 2 (§. 129), consequenter cum earum quælibet etiam cum seipsa combinari possit, istis addendæ adhuc sunt variationes 2. Ergo numerus omnium est, $2 + 2 = 4$.

Quodsi tres fuerint & exponens variationis 2, combinationes erunt 3 & permutationes 3, nempe *ab*, *ac*, *bc*, & *ba*, *ca*, *cb* (§. 129): quibus si addas combinationes tres uniuscujusque quantitatis cum seipsa, *aa*, *bb*, *cc*; habebis numerum variationum $3 + 3 + 3 = 9$.

Eodem modo patet, si quantitates fuerint quatuor, & exponens 2, numerum combinationum fore 6, & numerum permutationum itidem 6, numerum combinationum cum seipsa 4, adeoque numerum variationum 16. Si manente exponente, quantitates fuerint quinque, numerum variationum fore 25, &c. & in genere si numerus quantitatum fuerit n, numerum variationum fore n^2.

Sint quantitates tres & exponens variationis 3; reperitur numerus variationum $27 = 3^3$, nempe *aaa*, *aab*, *aba*, *baa*, *aac*, *aca*, *caa*, *abb*, *bab*, *bba*, *abc*, *bac*, *bca*, *acb*, *cab*, *cba*, *acc*, *cac*, *cca*, *bbb*, *bbc*, *cbb*, *bcb*, *bcc*, *cbc*, *ccb*, *ccc*.

 Nec

Nec abſimili modo conſtabit, ſi quantitates fuerint quatuor & exponens 3; fore numerum variationum $64 = 4^3$: & in genere, ſi fuerit quantitatum numerus $= n$, exponens 3, fore numerum variationum n^3.

Quodſi ita progredi libuerit, reperietur tandem, ſi quantitatum numerus fuerit n; & exponens n, fore numerum variationum n^n.

Quare ſi antecedentes omnes addas, ubi exponens minor; reperietur numerus omnium variationum poſſibilium $n^n + n^{n-1} + n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + n^{n-5} + n^{n-6}$ &c. donec numerus ex n ſubtractus relinquat 1, quia initium fit a quantitatibus ſingulis ſemel poſitis.

Cum adeo numerus omnium variationum poſſibilium ſit progreſſio geometrica, cujus terminus primus ſeu minimus n^1, maximus n^n, denominator n (§. 332 *Arithm. &* 113 *Analyſ.*); erit is $= (n^{n+1} - n) : (n - 1)$, (§. 122).

Sit ex. gr. $n = 4$; erit numerus variationum poſſibilium $(4^5 - 4) : (4 - 1) = 1020 : 3 = 340$. Sit $n = 24$, erit numerus omnium variationum poſſibilium $(24^{25} - 24) : (24 - 1) = 3200965864440681898677795534825060 0 : 23 = 139172428888725299942512849340220 0$. Tot ergo modis 24 literæ inter ſe componi poſſunt.

CAPUT II.

De Algebra ad Problemata Arithmetica indeterminata applicata.

PROBLEMA LXXXV.

223. *Invenire duos numeros, quorum ſumma, una cum facto eorundem, æquatur numero dato.*

Sit numerus datus $= a$, quæſitorum unus $= x$, alter $= y$: erit, per conditionem Problematis

$$xy + x + y = a$$
$$y \text{ ſub.}$$
$$xy + x = a - y$$
$$y + 1 \text{ div.}$$
$$x = (a - y) : (y + 1)$$

Sit $a = 30$, $y = 2$; erit $x = (30 - 2) : (2 + 1) = 28 : 3 = 9\frac{1}{3}$. Sit $a = 20$, $y = 2$; erit $x = (20 - 2) : (2 + 1) = 18 : 3 = 6$. Sit $a = 19$, $y = 4$: erit $x = (19 - 4) : (4 + 1) = 15 : 5 = 3$.

Sit numerus datus $= a$, quæſitorum unus $= x + y$, alter $= x - y$ (§. 6), erit, per conditionem Problematis,

$$x^2 - y^2 + 2x = a$$
$$y^2 \text{ add.}$$
$$x^2 + 2x = y^2 + a$$
$$1 \quad\quad 1 \text{ (§. 143)}$$
$$x^2 + 2x + 1 = y^2 + a + 1$$
$$\text{Ext. Rad.}$$
$$x + 1 = \sqrt{(y^2 + a + 1)}$$
$$\text{ſub.}$$
$$x = \sqrt{(y^2 + a + 1)} - 1$$

Unde apparet, ut ex $y^2 + a + 1$ radix extrahi poſſit, $a + 1$ eſſe debere differentiam duorum quadratorum, quorum unum eſt y^2.

Ex. gr.

Ex. gr. Sit $a = 19$, $y = \frac{1}{2}$; erit $x = \sqrt{(\frac{1}{4} + 19 + 1)} - 1 = \sqrt{\frac{81}{4}} - 1 = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$. Ergo $x + y = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$, & $x - y = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 3$. Sit $a = 20$, $y = 2$; erit $x = \sqrt{(4 + 20 + 1)} - 1 = \sqrt{25} - 1 = 5 - 1 = 4$. Ergo $x + y = 4 + 2 = 6$, & $x - y = 4 - 2 = 2$.

PROBLEMA LXXXVI.

224. *Invenire quatuor numeros ejus conditionis, ut summa primi & secundi æquetur tertio, differentia vero primi & secundi quarto.*

Sit numerus primus $= x$, secundus $= y$, tertius $= z$, quartus $= t$; erit, per conditiones Problematis,

$$y + x = z \quad \text{(y sub.)} \qquad x - y = t \quad \text{(y add.)}$$

$$x = z - y \qquad x = t + y$$

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$t + y = z - y \quad \text{(y add.)}$$

$$t + 2y = z \quad \text{(t sub.)}$$

$$2y = z - t \quad \text{(2 div.)}$$

$$y = (z - t) : 2$$

Ergo $x = (z - t) : 2 + t = (z + t) : 2$.

Unde apparet, si numeri integri desiderentur, pro z & t assumi debere vel numeros pares, vel impares: nequaquam alterum parem, alterum imparem (§. 72, 74).

Sit $z = 8$, $t = 2$: erit $y = (8 - 2) : 2 = 6 : 2 = 3$, & $x = (8 + 2) : 2 = 4 + 1 = 5$. Similiter sit $z = 5$, $t = 1$: erit $x = (5 + 1) : 2 = 3$, & $y = (5 - 1) : 2 = 2$.

PROBLEMA LXXXVII.

225. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut unusquisque cum partibus suis aliquotis efficiat unam summam.*

Sit unus $= mx$, alter $= ny$; erit, per conditionem Problematis,

$$1 + m + mx + x = 1 + n + ny + y$$

$$mx + x = 1 + n + (n + 1)y - (1 + m)$$

$$x = (1 + n + (n + 1)y - 1 - m) : (m + 1)$$

Apparet ergo, $1 + n$ denotare summam partium aliquotarum denominatoris multipli ipsius y, & $1 + m$ summam partium aliquotarum denominatoris multipli ipsius x: posse autem non modo y, sed & utrumque denominatorem pro arbitrio assumi, sed ut y sit numerus impar, isque primus.

Sit ex. gr. $m = 1$, $n = 2$, $y = 3$. Erunt partes aliquotæ ipsius n, 1 & 2, ipsius m autem 1: consequenter $x = 2 + 1 + (2 + 1)y - 1 = 2 + 3y = 2 + 9 = 11$. Sit $m = 4$, $n = 8$, $y = 13$: erit $1 + n = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$, & $1 + m = 1 + 2 + 4 = 7$; consequenter $x = (15 + 15y - 7) : 7 = (210 - 7) : 7 = 203 : 7 = 29$.

PROBLEMA LXXXVIII.

226. *Invenire duos numeros, quorum summa æquetur quadrato minoris.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$; erit, per conditionem Problematis,

$$x + y = y^2 \quad \text{(y sub.)}$$

$$x = y^2 - y = (y - 1)y$$

Unde apparet, numerum majorem esse factum ex minore in eundem minorem unitate mulctatum.

Sit $y = 3$; erit $x = 2 . 3 = 6$. Sit $y = 5$; erit $x = 4 . 5 = 20$. Sit $y = 9$; erit $x = 8 . 9 = 72$.

PROBLEMA LXXXIX.

227. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut summa quadratorum æquetur cubo minoris.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$: erit, per conditionem Problematis,

$x^2 +$

$$x^2 + y^2 = y^3$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; y^2 \text{ subt.}$$
$$x^2 = y^3 - y^2 = y^2(y - 1)$$
$$x = y\sqrt{(y - 1)}$$

Apparet adeo, pro y assumendum esse numerum, qui unitate quadratum excedit, hoc est, quadratum quodlibet unitate auctum.

Ex. gr. Sit $y = 5$, erit $x = 5\sqrt{(5-1)} = 5\sqrt{4} = 5 . 2 = 10$. Sit $y = 17$, erit $x = 17\sqrt{(17-1)} = 17\sqrt{16} = 17 . 4 = 68$.

PROBLEMA XC.

228. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum æquale sit cubo, cujus radix facto ex numero primo in quadratum secundi æquatur.*

Sit numerus primus $= x$, secundus $= y$, radix cubica $= v$; erit, per conditiones Problematis,

$$v = xy^2 \qquad xy = v^3$$
$$\overline{\qquad\quad} \; y^2 \text{ div.} \qquad \overline{\qquad\quad} \; y \text{ div.}$$
$$v : y^2 = x \qquad x = v^3 : y$$
$$v : y^2 = v^3 : y$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; y^2 \text{ mult.}$$
$$v = yv^3$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; v \text{ div.}$$
$$1 = yv^2$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; v^2 \text{ div.}$$
$$1 : v^2 = y$$

Ergo $x = v^3 : (1 : v^2) = v^5$

Sit $v = 2$; erit $x = 32$, $y = \frac{1}{4}$. Sit $v = 3$; erit $x = 243$, $y = \frac{1}{9}$.

PROBLEMA XCI.

220. *Invenire duos numeros quorum quadrata differunt quadrato.*

Sit numerus unus $= x + y$, alter $= x - y$: erit, per conditionem Problematis.

$$x^2 + 2xy + y^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 \text{ subt.}$$
$$4xy = v^2$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; (4y \text{ div.}$$
$$x = v^2 : 4y$$

Patet adeo, pro y assumendum esse numerum per cujus quadruplum dividi potest quadratum aliquod.

Sit ex. gr. $v^2 = 16$, $y = 1$: erit $x = 16 : 4 = 4$. Ergo $x + y = 4 + 1 = 5$ & $x - y = 4 - 1 = 3$. Sit $v^2 = 36$, $y = 3$: erit $x = 36 : 12 = 3$. Ergo $x + y = 6$ & $x - y = 0$. Sit $v^2 = 36$, $y = 9$: erit $x = 36 : 36 = 1$. Ergo $x + y = 10$ & $x - y = 8$.

PROBLEMA XCII.

230. *Summam duorum quadratorum in duo alia quadrata dividere.*

Sit latus quadrati majoris $= a$, minoris $= b$. Sit porro latus quadrati unius ex quæsitis minus quam a, adeoque $a - z$; erit quadrati alterius latus majus quam b. Poterat itaque dici $y - b$. Enimvero, ut in calculo irrationalitas evitetur, rectius id nuncupatur $yz - b$. Quare per conditionem Problematis.

$$a^2 - 2az + z^2 + y^2z^2 - 2byz + b^2 = a^2 + b^2$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; a^2 + b^2 \text{ sub.}$$
$$z^2 + y^2z^2 - 2az - 2byz = 0$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; z \text{ div.}$$
$$z + y^2z - 2a - 2by = 0$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; 2a + 2by \text{ add.}$$
$$y^2z + z = 2a + 2by$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; (y^2 + 1 \text{ div.}$$
$$z = (2a + 2by) : (y^2 + 1)$$

Sit ex. gr. $a = 3$, $b = 2$, $y = 2$: erit $z = (6 + 8) : (4 + 1) = 14 : 5 = 2\frac{4}{5}$. Ergo $a - z = 3 - 2\frac{4}{5} = \frac{15}{5} - \frac{14}{5} = \frac{1}{5}$ & $yz - b = \frac{28}{5} - 2 = \frac{28}{5} - \frac{10}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$.

SCHOLION.

231. *Dum quadratorum quæsitorum latera assumuntur, valores eorum quantitates* a *&* b *in-*

ingredi debent, ut in utroque æquationis membro fit $a^2 + b^2$. *Porro vero in valore lateris alterius,* y *multiplicari debet per* z, *ut sublato utrinque* $a^2 + b^2$ *residuum sit divisibile per* z. *Ita enim* z *reducitur ad unam dimensionem, sicque æquatio in terminis rationalibus est reducibilis.*

PROBLEMA XCIII.

232. *Invenire duos quadratos numeros, qui differunt numero dato.*

Sit latus quadrati minoris $= x$, majoris $= y + x$, differentia quadratorum $= d$: erit quadratum majus $= x^2 + 2xy + y^2$, minus $= x^2$, consequenter per conditionem Problematis.

$$\begin{array}{ll} 2xy + y^2 = d & y^2 \text{ sub.} \\ \hline 2xy = d - y^2 & 2y \text{ div.} \\ \hline x = (d - y^2) : 2y & \end{array}$$

Unde apparet, pro y assumi debere numerum, qui sit minor quam $\sqrt{d}$.

Sit ex. gr. $d = 10$, $y = 3$: erit $x = (10 - 9) : 6 = \frac{1}{6}$, & $x + y = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$. Sit $d = 11$, $y = 1$: erit $x = (11 - 1) : 2 = 10 : 2 = 5$, & $x + y = 5 + 1 = 6$. Sit $d = 48$, $y = 4$: erit $x = (48 - 16) : 8 = 6 - 2 = 4$, & $x + y = 4 + 4 = 8$.

PROBLEMA XCIV.

233. *Numerum datum dividere in duos alios, quorum factum est numerus quadratus.*

Sit numerus datus $= 2a$, differentia $= 2y$: erit major $a + y$, minor $a - y$ (§. 5), factum $= aa - yy$. Ut calculus ab irrationalitate liberetur, pro latere quadrati assumendus est valor, quem ingreditur y & qui diversis gaudet signis. Sit ergo $= xy - a$: erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{ll} aa - y^2 = aa - 2axy + x^2y^2 & a^2 \text{ sub.} \\ \hline -y^2 = -2axy + x^2y^2 & y \text{ div.} \\ \hline -y = -2ax + x^2y & y + 2ax \text{ add.} \\ \hline 2ax = x^2y + y & x^2 + 1 \text{ div.} \\ \hline 2ax : (x^2 + 1) = y & \end{array}$$

Sit ex. gr. $2a = 10$, $x = 2$: erit $y = 20 : (4 + 1) = 20 : 5 = 4$. Ergo $a + y = 5 + 4 = 9$; $a - y = 5 - 4 = 1$. Sit $2a = 10$, $x = 3$: erit $y = 30 : (9 + 1) = 30 : 10 = 3$. Ergo $a + y = 8$, $a - y = 2$.

PROBLEMA XCV.

234. *Datum numerum dividere in duos numeros, quorum differentia est numerus quadratus.*

Sit numerus datus $= a$, quæsitorum major $= x$, minor $= y$: erit, per conditiones Problematis,

$$\begin{array}{ll} x + y = a \quad y \text{ sub.} & x - y = v^2 \quad y \text{ add.} \\ \hline x = a - y & x = v^2 + y \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a - y = v^2 + y & y \text{ add.} \\ \hline a = v^2 + 2y & v^2 \text{ subt.} \\ \hline a - v^2 = 2y & 2 \text{ div.} \\ \hline (a - v^2) : 2 = y & \end{array}$$

Pro v^2 itaque assumendus est numerus quadratus, qui ex numero dato a subductus parem relinquit.

Sit ex. gr. $a = 40$, $v^2 = 16$: erit $y = (40 - 16) : 2 = 24 : 2 = 12$. Ergo $x = 40 - 12 = 28$. Sit $a = 40$, $v^2 = 4$: erit $y = (40 - 4) : 2 = 36 : 2 = 18$. Ergo $x = 40 - 18 = 22$. Sit $a = 35$, $v^2 = 9$: erit $y = (35 - 9) : 2 = 26 : 2 = 13$, & $x = 35 - 13 = 22$.

PROBLEMA XCVI.

235. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut unus additus quadrato alteri efficiat numerum quadratum, cujus radix æquatur summæ numerorum.*

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$: erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{ll} x^2 + y = x^2 + 2xy + y^2 & x^2 \text{ sub.} \\ \hline y = 2xy + y^2 & y \text{ div.} \\ \hline 1 = 2x + y & y \text{ subt.} \\ \hline 1 - y = 2x & 2 \text{ div.} \\ \hline (1 - y) : 2 = x & \end{array}$$

Numeri adeo quæsiti unitate minores, consequenter fracti esse debent, & y numerus quilibet fractus esse potest.

Sit $y = \frac{1}{2}$; erit $x = (1 - \frac{1}{2}) : 2 = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$. Sit $y = \frac{1}{3}$; erit $x = (1 - \frac{1}{3}) : 2 = \frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$. Sit $y = \frac{1}{4}$; erit $x = (1 - \frac{1}{4}) : 2 = \frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$.

PROBLEMA XCVII.

236. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut differentia ipsorum habeat ad differentiam quadratorum rationem datam.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$, ratio data $= a : b$; erit, per conditionem Problematis,

$$x - y : x^2 - y^2 = a : b$$

hoc est $1 : x + y = a : b$ (§. 124).

$$ax + ay = b \qquad \text{a div.}$$

$$x + y = b : a \qquad \text{y sub.}$$

$$x = b : a - y$$

Sit $b : a = 9$, $y = 4$; erit $x = 5$. Vel sit $y = 3$; erit $x = 6$.

PROBLEMA XCVIII.

237. *Invenire numerum, qui, si multiplicetur per duos numeros datos, quadrata duo producat.*

Sit numerus datus unus $= a$, alter $= b$, quæsitus $= x$, erit, per conditiones Problematis,

$$ax = y^2 \qquad \text{a div.} \qquad bx = v^2 \qquad \text{b div.}$$

$$x = y^2 : a \qquad x = v^2 : b$$

$$y^2 : a = v^2 : b \qquad \text{a mult.}$$

$$y^2 = av^2 : b \qquad \text{ext. Rad.}$$

$$y = v\sqrt{(a : b)}$$

Quodsi ergo numerus rationalis desideretur, $a : b$ quadratum esse debet.

Sit $a = 32$, $b = 8$; erit $\sqrt{(a : b)} = 2$. Sit porro $v = 5$, erit $y = 10$, consequenter $x = \frac{25}{8}$.

PROBLEMA XCIX.

238. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si unus quadrato alterius addatur, summa sit latus quadrati aggregato numerorum æquale.*

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$; erit

$$x^2 + y = \sqrt{(x + y)} \qquad \text{quadr.}$$

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = x + y \qquad x^4 + y \text{ subt.}$$

$$2x^2y - y + y^2 = x - x^4$$

h. e. $yy + (2x^2 - 1)y = x - x^4$

$$(x^2 - \tfrac{1}{2})^2 \qquad x^4 - x^2 + \tfrac{1}{4} \text{ ad.}$$

$$y^2 + (2x^2 - 1)y + (x^2 - \tfrac{1}{2})^2 = x - x^2 + \tfrac{1}{4} \qquad \text{ext. Rad.}$$

$$y + x^2 - \tfrac{1}{2} = \sqrt{(x + \tfrac{1}{4} - x^2)} \qquad x^2 - \tfrac{1}{2} \text{ subt.}$$

$$y = \sqrt{(x + \tfrac{1}{4} - x^2)} + \tfrac{1}{2} - x^2$$

Quodsi numerus rationalis desideratur; $\frac{1}{4} + x - x^2$ numerus quadratus esse debet. Sit itaque hujus latus, ob rationes in Schol. Probl. 92 (§. 231) allatas, $= zx - \frac{1}{2}$: erit

$$z^2x^2 - zx + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + x - x^2 \qquad \tfrac{1}{4} \text{ sub.}$$

$$z^2x^2 - zx = x - x^2 \qquad \text{x div.}$$

$$z^2x - z = 1 - x \qquad x + z \text{ add.}$$

$$z^2x + x = 1 + z \qquad z^2 + 1 \text{ div.}$$

$$x = (1 + z) : (z^2 + 1)$$

Sit $z = 2$, erit $x = (1 + 2) : (4 + 1) = \frac{3}{5}$, consequenter $y = \frac{1}{2} - \frac{9}{25} + \sqrt{(\frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{9}{25})} = \frac{25 - 18}{50} + \sqrt{\frac{(60 + 25 - 36)}{100}} = \frac{7}{50} + \sqrt{(49 : 100)} = \frac{7}{50} + \frac{7}{10} = \frac{7 + 35}{50} = \frac{42}{50} = \frac{21}{25}$.

PRO-

PROBLEMA C.

239. *Invenire duos numeros quadratos ejus conditionis, ut, si unus addatur facto eorundem, aggregatum utrumque sit numerus quadratus.*

Sit numerus quadratus unus $= x^2$, alter $= y^2$, erit factum $= x^2y^2$. Quare $x^2y^2 + x^2$ & $x^2y^2 + y^2$ sunt numeri quadrati; consequenter & $y^2 + 1$ & $x^2 + 1$ sunt numeri quadrati: numerus enim quadratus efficit quadratum, si in quadratum ducitur. Sit latus quadrati primi $z - y$; secundi $t - x$: erit

$$y^2 + 1 = z^2 - 2zy + y^2 \quad y^2 \text{ subt.}$$
$$1 = z^2 - 2zy \quad 2zy - 1 \text{ add.}$$
$$2zy = z^2 - 1 \quad 2z \text{ div.}$$
$$y = (z^2 - 1) : 2z$$

$$x^2 + 1 = t^2 - 2tx + x^2 \quad x^2 \text{ subt.}$$
$$1 = t^2 - 2tx \quad 2tx - 1 \text{ add.}$$
$$2tx = t^2 - 1 \quad 2t \text{ div.}$$
$$x = (t^2 - 1) : 2t$$

Sit $z = 2$, $t = 3$; erit $y = (4-1) : 4 = \frac{3}{4}$ & $x = (9-1) : 6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Sit $z = 3$, $t = 4$; erit $y = (9-1) : 6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ & $x = (16-1) : 8 = \frac{15}{8}$.

PROBLEMA CI.

240. *Invenire duos numeros quadratos ejus conditionis, ut summa addita facto efficiat quadratum.*

Sit quadratus numerus unus $= x^2$, alter $= y^2$: erit $x^2y^2 + x^2 + y^2$ numerus quadratus. Quoniam vero $x^2y^2 + x^2 = x^2(y^2 + 1)$: fiat primum $y^2 + 1$ æquale quadrato, cujus latus $t - y$, ut ablato ex utroque æquationis membro y^2 perveniatur ad unam ipsius y dimensionem, cum valor rationalis desideretur, nempe

$$t^2 - 2ty + y^2 = y^2 + 1 \quad y^2 \text{ sub.}$$
$$t^2 - 2ty = 1 \quad 2ty - 1 \text{ add.}$$
$$t^2 - 1 = 2ty \quad 2t \text{ div.}$$
$$(t^2 - 1) : 2t = y$$

Ponatur porro $\sqrt{(y^2 + 1)} = t - y = t - (t^2 - 1) : 2t = (t^2 + 1) : 2t = v$; erit $x^2y^2 + x^2 + y^2 = v^2 x^2 + y^2$. Atque adeo Problema præsens reductum est ad casum similem præcedentis. Sit ergo quadrati, cui $v^2x^2 + y^2$ æquale esse debet, latus $= z - vx$, erit

$$v^2x^2 + y^2 = z^2 - 2zvx + v^2x^2 \quad v^2x^2 \text{ s.}$$
$$y^2 = z^2 - 2zvx \quad 2zvx - y^2 \text{ add.}$$
$$2zvx = z^2 - y^2 \quad 2zv \text{ div.}$$
$$x = (z^2 - y^2) : 2zv$$

Hic valores z & t pro lubitu determinari possunt.

Sit ex. gr. $z = 2$, $t = 3$; erit $y = (9-1) : 6 = 8 : 6 = \frac{4}{3}$, & hinc $v = t - y = 3 - \frac{4}{3} = \frac{9-4}{3} = \frac{5}{3}$, consequenter $x = (4 - \frac{16}{9}) : \frac{4 \cdot 5}{3} = \frac{36-16}{9} : \frac{20}{3} = \frac{20 \cdot 20}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

PROBLEMA CII.

241. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si factum addatur aggregato quadratorum, numerus quadratus prodeat.*

Sit summa numerorum quæsitorum $= 2x$, differentia $= 2y$, erit major $x + y$, minor $x - y$ (§. 6). Sit latus quadrati ipsi $3x^2 + y^2$ æqualis $= t + y$: erit,

erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{l} x^2 + 2xy + y^2 \\ x^2 - 2xy + y^2 \\ x^2 \quad - y^2 \\ \hline 3x^2 + y^2 = t^2 + 2ty + y^2 \quad y^2 \text{ sub.} \\ \hline 3x^2 = t^2 + 2ty \quad t^2 \text{ sub.} \\ \hline 3x^2 - t^2 = 2ty \quad 2t \text{ div.} \\ \hline (3x^2 - t^2) : 2t = y \end{array}$$

Sit $x = 4$, $t = 6$, erit $y = (48 - 36) : 12 = 12 : 12 = 1$, consequenter $x + y = 4 + 1 = 5$, $x - y = 4 - 1 = 3$.

PROBLEMA CIII.

242. *Invenire duos numeros quadratos, quorum summa est numerus quadratus.*

Sint numeri quadrati quaesiti x^2 & y^2; latus quadrati, cui isti junctim sumti aequantur, $vx - y$: erit

$$\begin{array}{l} x^2 + y^2 = v^2x^2 - 2vxy + y^2 \quad y^2 \text{ sub.} \\ \hline x^2 = v^2 x^2 - 2vxy \quad x \text{ div.} \\ \hline x = v^2 x - 2vy \quad 2vy - x \text{ add.} \\ \hline 2vy = v^2 x - x \quad v^2 - 1 \text{ div.} \\ \hline 2vy : (v^2 - 1) = x \end{array}$$

Sit $v = 2$, $y = 3$; erit $x = 12 : (4 - 1) = 12 : 3 = 4$.

PROBLEMA CIV.

243. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si unus ducatur in cubum alterius, productum sit numerus quadratus.*

Sint duo numeri x & y: erit, per conditionem Problematis; xy^3, consequenter etiam xy numerus quadratus. Habemus ergo

$$\begin{array}{l} xy = z^2 \quad y \text{ div.} \\ \hline x = z^2 : y \end{array}$$

Pro z itaque assumendum est quadratum per y divisibile, si numeri integri desiderentur.

Sit ex. gr. $z = 6$, $y = 3$: erit $x = 36 : 3 = 12$.

PROBLEMA CV.

244. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si factum quadratorum addatur facto ex cubo unius in alterum, summa sit numerus quadratus.*

Sit numerus unus $= x$; alter $= y$; erit $xy^3 + x^2y^2$, consequenter & $xy + x^2$ numerus quadratus. Ponatur latus hujus quadrati $= yv - x$: erit

$$\begin{array}{l} xy + x^2 = y^2 v^2 - 2xyv + x^2 \quad x^2 \text{ sub.} \\ \hline xy = y^2 v^2 - 2xyv \quad y \text{ div.} \\ \hline x = yv^2 - 2xv \quad 2xv \text{ add.} \\ \hline 2xv + x = yv^2 \quad 2v + 1 \text{ div.} \\ \hline x = yv^2 : (2v + 1) \end{array}$$

Sit ex. gr. $y = 6$, $v = 1$: erit $x = 6 : 3 = 2$.

Sit $y = 15$, $v = 2$: erit $x = 15 . 4 : (4 + 1) = 15 . 4 : 5 = 3 . 4 = 12$.

PROBLEMA CVI.

245. *Invenire duos numeros, quorum unus subductus ex facto eorundem relinquat cubum.*

Sit numerus unus x, alter y: erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{l} xy - y = v^3 \quad x - 1 \text{ div.} \\ \hline y = v^3 : (x - 1) \end{array}$$

Assumendus ergo est cubus, qui sit per $x - 1$ divisibilis.

Ex. gr. Sit $x = 6$, $v = 10$; erit $y = 1000 : 5 = 200$. Sit $x = 3$, $v = 6$; erit $y = 216 : 2 = 108$.

PROBLEMA CVII.

246. *Invenire duos numeros, quorum unus in quadratum alterius ductus cubum efficit.*

Sit numerus unus y, alter x; erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{l} yx^2 = z^3 x^3 : v^3 \quad x^2 \text{ div.} \\ \hline y = z^3 x : v^3 \quad v^3 \text{ mult.} \\ \hline yv^3 = z^3 x \quad z^3 \text{ div.} \\ \hline yv^3 : z^3 = x \end{array}$$

Si

Si adeo numeri integri desiderantur, assumendus est valor ipsius y per cubum aliquem z^3 divisibilis, seu cubi multiplus.

Sit ex. gr. $y = 16$, $v = 3$, $z = 2$; erit $x = 16 . 27 : 8 = 2 . 27 = 54$.

PROBLEMA CVIII.

247. *Numerum datum in duas partes dividere, ita ut earundem factum aequale sit cubo radice sua mulctato.*

Sit numerus datus $= a$, pars una $= x$; erit altera $= a - x$. Sit latus cubi, cui factum partium $ax - x^2$ aequatur, $yx - 1$: erit cubus $= y^3 x^3 - 3y^2x^2 + 3yx - 1$, unde si subtrahatur $yx - 1$, relinquitur

$$y^3 x^3 - 3y^2x^2 + 2yx = ax - x^2 \quad x \text{ div.}$$
$$y^3 x^2 - 3y^2 x + 2y = a - x \quad x - 2y \text{ add.}$$
$$y^3 x^2 - 3y^2 x + x = a - 2y.$$

Facile jam apparet, si valor ipsius x rationalis desideretur, fieri debere $2y = a$: quo facto erit

$$\frac{a^3 x^2}{8} - \frac{3a^2 x}{4} + x = 0 \quad 8 \text{ mult.}$$
$$a^3 x^2 - 6a^2 x + 8x = 0 \quad x \text{ div.}$$
$$a^3 x - 6a^2 + 8 = 0 \quad 6a^2 - 8 \text{ add.}$$
$$a^3 x = 6a^2 - 8 \quad a \text{ div.}$$
$$x = (6a^2 - 8) : a^3$$

Apparet adeo, si numeri rationales desiderentur, Problema ex indeterminato fieri determinatum.

Sit $a = 6$, erit $x = (216 - 8) : 216 = 208 : 216 = \frac{26}{27}$, & $a - x = 6 - \frac{26}{27} = \frac{162 - 26}{27} = \frac{136}{27}$.

PROBLEMA CIX.

248. *Invenire numerum perfectum, hoc est, omnibus suis partibus aliquotis aequalem.*

Sit numerus quaesitus $y^n x$, ut nempe in partes aliquotas seu factores resolvi possit: erunt partes aliquotae $1, y, y^2, y^3$ &c. donec exponens evadat $= n$, & $x, yx, y^2 x, y^3 x$, &c. donec exponens fiat $= n - 1$. Quamobrem ex natura numeri perfecti

$$1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c} + x + yx + y^2 x + y^3 x \text{ \&c.} = y^n x$$
$$1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c.} = y^n x - x - yx - y^2 x - y^3 x \text{ \&c.}$$
$$\frac{1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c.}}{y^n - 1 - y - y^2 - y^3 \text{ \&c.}} = x.$$

Jam ut x sit numerus integer, nec in casu speciali, si y per numerum explicetur, numerus partium aliquotarum diversus sit a numero earundem in formula generali; necesse est ut $y^n - 1 - y - y^2 - y^3$ &c. $= 1$: quod cum non alio in casu contingat, nisi cum $y = 2$ (§. 121); erit $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3$ &c. $= 1 + 2 + 4 + 8$ &c. & numerus perfectus $2^n x$. Quoniam vero x est numerus primus, necesse est ut $1 + 2 + 2^2 + 2^3$ &c. in omni casu sit numerus primus; consequenter series terminetur prope terminum, qui unitate mulctatus est numerus primus (*§. cit.*), & n notat numerum terminorum, qui istiusmodi terminum praecedunt. Quare Problema, quod speciem indeterminati mentiebatur, determinatum est.

Patet autem simul

Theorema 1. Si numerorum series in ratione dupla ab unitate continue proportionalium continuetur, donec eorum summa fit numerus primus; summa in maximum multiplicata faciet numerum perfectum.

Theorema 2. Si in numerorum serie in ratione dupla ab unitate continue proportionalium occurrat terminus, qui unitate mulctatus est numerus primus; numerus iste primus in proxime præcedentem ductus efficit numerum perfectum.

In serie numerorum ab unitate in ratione dupla continue proportionalium

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096.

4 − 1 = 3, 8 − 1 = 7, 32 − 1 = 31, 128 − 1 = 127, 2048 − 1 = 2047 &c. sunt numeri primi. Ergo 2. 3 = 6; 4. 7 = 28; 31. 16 = 496; 127. 64 = 8128; 2047. 1024 = 2096128; &c. &c. sunt numeri perfecti.

SCHOLION.

249. *Problemata indeterminata, qualia plurima solvit* DIOPHANTUS, *difficiliora sunt determinatis, nisi simplicia fuerint. Unde Tyrones sub initium ea prætermittere possunt, quæ difficultatem creant, ad sequentia pedem promoventes. Non tamen prorsus negligenda sunt, cum maximus eorum sæpe sit usus in Problematibus Geometriæ sublimioris solvendis. Ceterum Ars resolvendi Problemata indeterminata numerica* Analysis Diophantea *appellari solet.*

CAPUT III.

De Algebra ad Geometriam elementarem applicata.

PROBLEMA CX.

250. *Problema geometricum algebraice resolvere:*

RESOLUTIO.

1. Observentur ea omnia, quæ in Probl. 36 (& 41) fieri præcepimus.
2. Cum vero rarissime ad æquationem eodem modo in Problematis geometricis perveniatur, quo in numericis usi sumus; hic ulterius quædam peculiaria notanda sunt. Nempe

α) Concipiatur jam factum, quod ad faciendum proponitur.

β) Omnium linearum in schemate depictarum relationes, nullo habito discrimine inter cognitas & incognitas, excutiantur; ut appareat, quomodo aliæ ab aliis dependeant, seu quibus datis, aliæ una dentur, sive per triangula similia (§. 175 *Geom.*), sive per rectangula (§. 417 *Geom.*), sive per alia (quod tamen raro fieri solet) Theoremata.

γ) Ut igitur triangula similia & rectangula obtineas, sæpius producendæ sunt lineæ, donec vel directe vel indirecte datis fiant æquales, vel alias secent; sæpius lineæ parallelæ atque perpendiculares ducendæ; sæpius puncta quædam connectenda; sæpius anguli

anguli datis æquales construendi; quæ fieri posse, ex Geometria elementari manifestum est. Eum in finem probe tenenda sunt Theoremata de æqualitate angulorum & similitudine triangulorum (§. 156, 183, 201, 207, 233, 267, 268, 269, 329 *Geom.*)

δ) Quodsi in æquationem non satis concinnam incideris; alio adhuc modo excutiendæ sunt linearum relationes; ac interdum sufficit, non directe quærere eam, quæ quæritur, sed aliam, qua data ipsa quoque innotescit.

3. Reductione æquationis facta, ex ultima, quæ prodit, elicienda est constructio geometrica variis quidem modis pro diversitate æquationum.

SCHOLION.

251. *Quoniam nunc tantum simplicissimos regulæ Algebræ casus exemplis geometricis illustramus; suffecerit nobis ostendisse, quomodo æquationes simplices & quadraticæ construantur.*

PROBLEMA CXI.

252. *Æquationem simplicem construere.*

RESOLUTIO.

Omne artificium in eo consistit, ut fractiones, quibus quantitas incognita æqualis, in terminos proportionales resolvantur: id quod exemplis rectius ostenditur, quam multis regulis docetur.

1. Sit nempe $x = \frac{ab}{c}$; erit $c : a = b : x$ (§. 302 *Arithm.*). Reperietur adeo x (§. 271 *Geom.*).

2. Sit $x = \frac{abc}{de}$, fiat $d : a = b : \frac{ab}{d}$. Hæc quarta proportionalis inventa (§. 271 *Geom.*) dicatur g; erit $x = \frac{gc}{e}$: quæ adeo ut in casu primo invenitur.

3. Sit $x = \frac{aa-bb}{c}$. Quoniam $aa - bb = (a+b)(a-b)$, (§. 86); erit $c : a + b = a - b : x$ (§. 302 *Arithm.*).

4. Sit $x = \frac{a^2b-bcc}{ad}$. Invenitur *per casum* 1. $g = \frac{ab}{d} = \frac{a^2b}{ad}$ & $h = \frac{bc}{d}$, ut sit $\frac{bcc}{ad} = \frac{hc}{a}$; denique, *per casum* 1, $i = \frac{hc}{a}$: erit $x = g-i$, differentia nempe linearum g & i. *Brevius.* Fiat $a : a + c = a - c : g$, *per casum* 3, & $d : g = b : \frac{bg}{d}$, *per cas.* 1, quæ erit x.

5. Sit $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{be}$. Inveniatur, ut in casu præcedente, $g = \frac{ab}{c}$ & $f = \frac{adc}{be}$: erit $x = g+f$, summa linearum g & f.

6. Sit $x = \frac{a^2b + bad}{af + cg} = \frac{ab + bd}{f + cg:a} = \frac{(a+d)b}{f + cg:a}$. Quæratur $\frac{cg}{a}$ & fiat $\frac{cg}{a} = h$; erit $f + h : a + d = b : x$; consequenter $x = \frac{(a+d)b}{f+h}$. Reductus adeo est casus præsens ad primum.

7. Sit $x = \frac{a^2b-bad}{af+bc}$. Quæratur $\frac{af}{b}$ & fiat $\frac{af}{b} = h$, erit $x = \frac{a(a-d)}{h+c}$; consequenter $h + c$: $a - d = a : x$.

8. Sit $x = (a^2 + b^2) : c$. Construatur triangulum ABC, cujus crus AB $= a$, BC $= b$, (§. 180 *Geom.*); erit AC $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$, (§. 417 *Geom.*). Dicatur AC $= m$, erit $a^2 + b^2 = m^2$, adeoque $x = \frac{m^2}{c}$, consequenter $c : m = m : x$. Tab. I. Fig. 3.

9. Sit $x = \frac{a^2-b^2}{c}$. Super AB $= a$ describatur semicirculus & in eo applicetur AC $= b$. Cum triangulum ACB sit rectangulum (§. 317 *Geom.*); erit CB $=$ $\sqrt{(a^2}$ Tab. I. Fig. 4.

$\sqrt{(a^2 - b^2)}$, (*§.417 Geom.*). Dicatur $CB = m$: erit $x = m^2 : c$, consequenter $c : m = m : x$.

Tab.I. *Fig.5.* 10. Sit $x = \frac{a_2 b + bcd}{af + bc} = \frac{a^2 + cd}{c + af : b}$. Inferatur $b : a = f : \frac{fa}{b}$ & fiat $\frac{fa}{b} = b$: erit $x = \frac{a^2 + cd}{b + c}$. Quæratur inter $AC = c$ & $CB = d$ media proportionalis $CD = \sqrt{cd}$, (*§. 327 Geom.*). Fiat $CE = a$; erit $DE = \sqrt{(a^2 + cd)}$. Dicatur hæc m: erit $x = \frac{m^2}{b + c}$; consequenter $b + c : m = m : x$.

PROBLEMA CXII.

253. *Æquationem quadraticam geometrice construere.*

RESOLUTIO.

Cum æquationes quadraticæ ad simplices reduci possint (*§. 143*); ipsas quoque, *per Probl. præced.* (§.252) construere licet.

Tab.I. *Fig.5.* Sit enim æquatio pura $x^2 = ab$; erit $a : x = x : b$, (*§. 299 Arithm.*). Invenitur adeo $x = \sqrt{ab}$, si inter $AC = a$ & $CB = b$ quæratur media proportionalis DC (§.327 *Geom.*). Si æquatio affecta $x^2 . ax = . b^2$; erit $x = .\frac{1}{2}a . \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 . b^2)}$, hoc est, vel $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$, vel $x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a$, vel $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$, vel $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$. Omne igitur artificium construendi has æquationes huc redit, ut inveniatur valor ipsius $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$, itemque ipsius $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$.

Tab.I. *Fig.3.* Utrumque vero jam docuimus in Problemate præcedente. Nimirum si in triangulo rectangulo fiat $AB = \frac{1}{2}a$ & $BC = b$; erit $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ (*§. 417 Geom.*). Sed *Fig.4.* si super $AB = \frac{1}{2}a$, describatur semicirculus & in eo applicetur $AC = b$; erit $CB = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$, ut in Problemate præcedente demonstratum.

SCHOLION.

254. *Quamvis omnes æquationes simplices & quadraticæ eum in modum construi possint, quo eas construere docuimus: minime tamen consultum est, ut iis stricte inhæreamus. Hac enim ratione in constructiones parum commodas sæpe incideremus, cum singulares Problematis specialis circumstantiæ multo concinniorem meditanti insinuent. Immo in genere notandum est, ex calculo analytico difficillime erui constructiones concinnas, cum tamen in iis unice ingenium spectetur, solutione arithmetica ad praxin sufficiente. Ratio hæc est, quod in algebraica solutione Problema tanquam unicum in rerum possibilium regione consideretur, independens ab omnibus reliquis; cum tamen ex Veterum methodo appareat & ipsa ratio suadeat, solutionem unius a solutione alterius pendere.*

PROBLEMA CXIII.

255. *Data perimetro* AB+BC+CA, *& area trianguli rectanguli; invenire hypothenusam.*

Sit $AB + BC + CA = a$, $AC = x$, area $= b^2$, erit $BC + BA = a - x$.

Jam cum sit $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§.417 *Geom.*) & $AB^2 + BC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB.BC$ (*§.261 Arithm.*): erit $AC^2 = (AB+BC)^2 - 2AB.BC$ (§.87 *Arithm.*). Est vero $AC^2 = x^2$ & $(AB + BC)^2 = a^2 - 2ax + x^2$, $2AB.BC = 4b^2$ (§.392 *Geom.*). Quare

$$x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4b^2$$

$$2ax = a^2 - 4b^2$$

$$x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$$

Quodsi triangulum construi debet, dicatur altitudo BD, hoc est perpendiculum in hypothenusam AC demissum (§. 227 *Geom.*), y; erit (§. 392 *Geom.*).

$$\frac{1}{2}xy = b^2$$

$$y = b^2 : \frac{1}{2}x$$

Constructio. Erigatur ad $BD = a$ perpendicularis $AB = 2b$, fiatque $BC = b$ & quæratur

ratur (§. 271 *Geom.*) quarta proportionalis BH $= 2b^2 : a$. Fiat CB $= \frac{1}{2}a$, & CI $=$ BH; erit BI $= \frac{1}{2}a - 2b^2 : a = x$. Dividatur BI bifariam in O, quæraturque ad BO $= \frac{1}{2}x$, & BE $=$ BG $= b$ tertia proportionalis BK, quæ erit altitudo trianguli quæsita $= b^2 : \frac{1}{2}x$. Quare, si super BI describatur semicirculus, & ex K agatur eidem parallela KL secans semicirculum in L; ductis rectis BL & LI erit BLI triangulum quæsitum.

Æquatio secunda in hanc resolvitur analogiam:

$$2a : a + 2b = a - 2b : x$$

seu $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2}a - b : x$ (§. 185 *Arith.*). habetur adeo

Theorema. In omni triangulo rectangulo est ut dimidia perimeter ad compositam ex dimidia perimetro & quadrati latere, quod triangulo æquale, ita differentia hujus lateris a perimetro dimidia ad hypothenusam.

SCHOLION.

256. *Cum areas figurarum in Geometria metiamur investigando earum rationem ad quadratum aliquod datum* (§. 118 Geom.); *ideo quoque tum in Geometria, tum in Algebra dantur per latus quadrati ipsis æquale.*

PROBLEMA CXIV.

Tab. I. Fig. 3. 257. *Data area trianguli rectanguli, cujus latera* AC, AB, & BC *in proportione continua; invenire latera.*

Sit area $= a^2$ BC $= x$

AB $= y$

erit AC $= y^2 : x$

Ergo

(§. 417 *Geom.*) (§. 392 *Geom.*)

$y^4 : x^2 = y^2 + x^2$ $\frac{1}{2}xy = a^2$

x^2

$$y^4 = x^4 + x^2y^2 \qquad xy = 2a^2$$

$$y^4 = \frac{16a^8}{y^4} + 4a^4 \qquad x = 2a^2 : y$$

y^4

$$y^8 = 16a^8 + 4a^4y^4 \qquad x^2 = 4a^4 : y^2$$

$$x^4 = 16a^8 : y^4$$

$$y^8 - 4a^4y^4 = 16a^8 \qquad x^2y^2 = 4a^4$$

$$+4a^8 \quad + \quad 4a^8$$

$$y^8 - 4a^4y^4 + 4a^8 = 20a^8$$

$$\left.\begin{matrix} y^4 - 2a^4 \\ 2a^4 - y^4 \end{matrix}\right\} = 2a^4\sqrt{5}$$

$$y^4 = 2a^4 + 2a^4\sqrt{5} = a^4(2 + 2\sqrt{5})$$

$$y = a\sqrt[4]{(2 + 2\sqrt{5})}$$

Nempe quia $2a^4 < 2a^4\sqrt{5}$, radix $2a^4 - y^4$ est falsa.

Similiter reperitur valor ipsius x. Est enim, vi æquationis $xy = 2a^2$, $y = 2a^2 : x$, adeoque $y^4 = 16a^8 : x^4$, & hinc ob $y^4 = x^2y^2 + x^4$ porro

$$16a^8 : x^4 = 4a^4 + x^4$$

$$16a^8 = 4a^4x^4 + x^8$$

$$20a^8 = 4a^8 + 4a^4x^4 + x^8$$

$$2a^4\sqrt{5} = 2a^4 + x^4$$

$$x^4 = 2a^4\sqrt{5} - 2a^4$$

$$x = a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)}$$

Constructio. Jungantur AB $= a$ & AC $= 2a$ ad angulos rectos, erit BC $= a\sqrt{5}$. Fiat BD $=$ AB, erit DC $= a\sqrt{5} - a$. Fiat porro CE $=$ CD, & ducta per C recta NL ad AK perpendiculari describatur super AE semicirculus; erit CN $= \sqrt{(2a^2\sqrt{5} - 2a^2)} = a\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}$. Factis CH $= a$ & CG $=$ CN, descriptoque semicirculo super HG; erit CI $= \sqrt{(a^2\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)})} = a\sqrt{\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}} = a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)}$. Tab. XII. Fig. 11.

Tab. XII. Fig. 114. Similiter fiat $CK = CB + CH = a + a\sqrt{5}$; erit, descripto super AK semicirculo, $CL = \sqrt{(2a^2 + 2a^2\sqrt{5})} = a\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})}$. Fiat porro $CO = CL$; erit descripto super HO semicirculo $CM = \sqrt{(a^2\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})})} = a\sqrt[4]{(2 + 2\sqrt{5})}$.

Quodsi itaque tandem fiat CF= CI; ducta FM erit CMF triangulum quæsitum.

Quodsi exponens rationis $= y$, BC $= x$, erit $AB = xy$, $AC = xy^2$, adeoque (§.417 *Geom.*):

$$x^2y^4 = x^2y^2 + x^2 \quad x^2 \text{ div.}$$
$$y^4 = y^2 + 1 \quad y^2 \text{ subt.}$$
$$y^4 - y^2 = 1$$
$$\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{4} \quad \text{add.}$$
$$y^4 - y^2 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4}$$
$$\left.\begin{matrix} y^2 - \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} - y^2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$y^2 = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5})}$$

Patet adeo rationem laterum esse constantem.

PROBLEMA CXV.

Tab. ... 258. *Datam rectam* AB *media & extrema ratione secare in* C, *hoc est*, *ut sit* AB : AC = AC : CB.

Sit $AB = a$, $AC = x$; erit $CB = a - x$; consequenter, per conditionem Problematis,

$$a : x = x : a - x$$
$$x^2 = a^2 - ax \text{ (§.297 *Arithm.*)} \quad ax \text{ add.}$$
$$x^2 + ax = a^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 \text{ add.}$$
$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2 \quad \text{Ext. Rad.}$$
$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$
$$x = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$$

Constructio. 1°. Jungantur $AB = a$ & $BD = \frac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit $AD = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. 2°. Fiat $DF = \frac{1}{2}a$ & AF= AC; erit $AC = x$. Tab. Fig.

Alia ex æquatione tertia elicitur constructio. Nimirum radio $AC = \frac{1}{2}a$ describatur circulus, & in A erigatur perpendicularis $= a$. Si enim porro ducatur BD per centrum C; erit $ED = a$ & $BE = x$. Quare si fiat BF= BE; recta AB erit in F media & extrema ratione secta. Etenim $BD = a + x$, adeoque $BE \cdot BD = ax + x^2$; consequenter $ax + x^2 = a^2$ (§.379 *Geom.*). T. Fi.

PROBLEMA CXVI.

259. *Rectam datam* AC, *utcunque divisam in* B, *iterum secare in* D, *ita ut sit* AD : DC = DC : BD. Ta. Fi.

Sit $AB = a$, $BD = x$,
$BC = b$, erit $DC = b - x$,
$AD = a + x$.

Quare, per conditionem Problematis,

$$a + x : b - x = b - x : x$$
$$ax + x^2 = b^2 - 2bx + x^2 \quad x^2 - 2bx \text{ subtr.}$$
$$ax + 2bx = b^2 \quad a + 2b, \text{ div.}$$
$$x = b^2 : (a + 2b)$$

Invenitur adeo x ob analogiam

$$a + 2b : b = b : x \text{ (§.272 *Geom.*).}$$

Aliter.

Analogia prima, ex qua æquatio elicitur, etiam per leges rationum ad eam reduci potest, a qua constructio pendet. Quoniam enim

$$a + x : b - x = b - x : x$$

erit $a + b : b - x = b : x$ (§.190 *Arithm.*)

$$a + b : b = b - x : x \text{ (§.173 *Arithm.*)}$$
$$a + 2b : b = b : x \text{ (§.190 *Arith.*).}$$

PRO-

PROBLEMA CXVII.

b. I. g. 8. 260. *Datam rectam* AC *divisam in* B *denuo secare in* D, *ita ut sit* CB : DB = DA : BA.

Sit $CB = a$, $DB = x$,
$BA = b$, erit $DA = b + x$.

Quare, per conditionem Problematis,

$$a : x = b + x : b$$

$$ab = bx + x^2$$

$\frac{1}{4}b^2$ $\frac{1}{4}b^2$ add. (§. 143).

$$\frac{1}{4}b^2 + ab = \frac{1}{4}b^2 + bx + x^2$$

Ext. Rad.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab)} = \tfrac{1}{2}b + x$$

$\frac{1}{2}b$ subt.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab)} - \tfrac{1}{2}b = x$$

ab. I. g. 9. *Constructio.* Inter $EG = b$ & $GE = a$ quæratur media proportionulis HG, quæ erit $= \sqrt{ab}$. Fiat $GI = \frac{1}{2}b$, & ducatur HI; erit $HI = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + ab)}$. Fiat denique $KI = GI$: erit $KH = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + ab)} - \frac{1}{2}b$. Invenitur etiam $\sqrt{(\frac{1}{4}bb + ab)}$, si inter $\frac{1}{4}b + a$ & b quæratur media proportionalis (§. 327, 330 *Geom.*).

ab. I. g. 4. Item, quia $\frac{1}{4}bb + ab$ est differentia quadratorum $\frac{1}{4}bb + ab + a^2$ & a^2; super AB $= \frac{1}{2}b + a$ describatur semicirculus & in eo applicetur $AC = a$; erit $CB = \sqrt{(\frac{1}{4}bb + ab)}$, (§. 317, 417 *Geom.*).

DEFINITIO XIX.

261. Si quatuor fuerint *lineæ* proportionales, extremæ mediis, mediæ extremis *reciprocæ* dicuntur.

PROBLEMA CXVIII.

b. I. g. 10. 262. *Datam rectam* AB *ita secare in* C, *ut partes* AC *&* CB *sint duabus datis* DE *&* FG *reciprocæ.*

Sit $AB = a$, $AC = x$,
$DE = b$, $CB = a - x$.
$FG = c$,

Ergo (§. 261).

$$x : b = c : a - x$$

$$ax - x^2 = cb$$

mut. sig.

$$-cb = x^2 - ax$$

$\frac{1}{4}aa$ $\frac{1}{4}aa$ add. (§. 143).

$$\tfrac{1}{4}aa - cb = \tfrac{1}{4}a^2 - ax + x^2$$

Ext. Rad.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - cb)} \left(\begin{array}{l} = \frac{1}{2}a - x \\ = x - \frac{1}{2}a \end{array} \right.$$

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - cb)}$$

Constructio. Quæratur inter $HI = b$ & $IK = c$ media proportionalis $MI = \sqrt{cb}$ (§. 327 *Geom.*). Radio $IL = \frac{1}{2}a$ describatur arcus, & ducatur PM ipsi IK parallela (§. 258 *Geom.*); erit $NM = x$ & $MP = a - x$. Nam demisso ex centro L perpendiculo LO, erit $NO = OP$ (§. 291 *Geom.*) & $OL = MI = \sqrt{cb}$ (§. 226 *Geom.*). Sed $NL = LI$ (§. 40 *Geom.*) $= \frac{1}{2}a$. Ergo $NO = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - cb)}$ (§. 417 *Geom.*); consequenter, ob $MO = IL$ (§. 238 *Geom.*) $= \frac{1}{2}a$, M[illegible] $= \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - cb)} = x$, & $PM = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - cb)} = a - x$. Tab. I. Fig. 11.

COROLLARIUM.

263. Construere ergo æquationem quadraticam affectam $ax - x^2 = cb$, idem est, ac datis duabus rectis c & b, vel si $c = b$, eidem rectæ b reciprocas x & $a - x$ invenire.

PROBLEMA CXIX.

264. *Datis duabus rectis* DE *&* FG *reciprocas invenire, quarum differentia sit datæ rectæ* AC *æqualis.* Tab. I. Fig. 10.

Sit $DE = a$, reciproca minor
$FG = b$, $= x$,
$AC = c$, erit major $= c + x$.

Ergo (§. 261)

$$x : a = b : c + x$$

$$ab = cx + x^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc \qquad \tfrac{1}{4}cc$$

$$\tfrac{1}{4}cc + ab = \tfrac{1}{4}cc + cx + x^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + ab)} = \tfrac{1}{2}c + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + ab)} - \tfrac{1}{2}c = x$$

Tab.I. Fig. 5. *Constructio.* Quæratur inter AC $= b$ & CB $= a$ media proportionalis DC. Fiat CE $= \tfrac{1}{2}c$; erit DE $= \sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + ab)}$. Unde si subtrahitur $\tfrac{1}{2}c =$ EF, relinquitur DF $= x$.

Tab.I. Fig. 12. Alia magis ingeniosa ex æquatione $ab = cx + x^2$ eruitur. Describatur nimirum ex centro C, radio arbitrario, majori tamen quam $\tfrac{1}{2}c$ & $\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b$, circulus. In eo applicentur chordæ IQ $= c$ & IP $= a - b$. Prolongetur PI in O, donec PO $= b$. Tandem per O describatur circulus priori concentricus: erit HI $= x$. Demissa enim ex centro C perpendiculari CL; erit LI $=$ LQ & LH $=$ LM (§. 291 *Geom.*), adeoque QM $=$ IH (§. 91 *Arithm.*). Eodem modo ostenditur esse NI $=$ PO $= b$. Ergo NI. IO $= ab$; consequenter $ab =$ HI. IM $=$ HI. $(c +$ HI$)$ (§. 381 *Geom.*). Est vero etiam $ab = x(c + x)$. Ergo HI $= x$.

Sint omnia ut ante, & pars major $= x$, erit minor $x - c$; consequenter (§. 261)

$$x : a = b : x - c$$

$$x^2 - cx = ab.$$

Constructio. Eadem est, quæ precedens. Sed hic MI $= x$, ita enim HI $=$ QM $= x - c$, consequenter NI. NO $= ab$ & HI. IM $= x^2 - cx$.

COROLLARIUM.

265. Construere ergo æquationes quadraticas $x^2 + cx = ab$ & $x^2 - cx = ab$, idem est ac datis duabus rectis a & b, vel, si $a = b$, eidem rectæ b reciprocas ibi x & $x + c$, hic x & $x - c$ reperire.

PROBLEMA CXX.

266. *Datam rectam* AB *ita secare in* C, *ut rectangulum sub tota* AB *& segmento minore* AC *æquale sit rectangulo sub majore* CB *& differentia utriusque* CB — AC.

Sit AB $= a$, AC $= x$,

erit CB $= a - x$,

CB — AC $= a - 2x$.

Quare, per conditionem Problematis,

$$ax = a^2 - 3ax + 2x^2$$

$$-a^2 = -4ax + 2x^2$$

$$-\tfrac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax$$

$$+a^2 \qquad + a^2$$

$$\tfrac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a - x$$

$$x + \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a$$

$$x = a - \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2}$$

Constructio. Quæratur inter $\tfrac{1}{2}a$ & a media proportionalis, quæ erit pars major $a - x$, adeoque subducta ex a relinquit minorem x.

Aliter.

Quoniam, per conditionem Problematis,

$$ax = (a - x)(a - 2x)$$

erit $a : a - 2x = a - x : x$ (§. 299 *Arithm.*)

$$2a - 2x : a = a : a - x$$

$$a - x : \tfrac{1}{2}a = a : a - x$$

$$\tfrac{1}{2}a : a - x = a - x : a$$

SCHOLION.

267. *His resolutionibus per analogias, & reductionibus æquationum quadraticarum ad lineas reciprocas opus est, si geometricas more Veterum mediteris demonstrationes.*

PRO-

PROBLEMA CXXI.

Tab.I. Fig.13. 268. *Dato radio circuli* ED; *invenire latus Trigoni regularis ipsi inscribendi* AB.

Ducatur latus Hexagoni EB, & sit BD=BE (§. 356 *Geom.*) $=a$, AB$=x$; erit BF$=\frac{1}{2}x$ (§. 291 *Geom.*). Et quoniam anguli ad F recti (*per* §. *cit.*) BE =BD, *per demonstr.* BF=BF: erit EF =FD (§. 235 *Geom.*) $=\frac{1}{2}a$. Quare (§. 417 *Geom.*) $BD^2 - DF^2 = FB^2$, hoc est

$$\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}x^2$$

$$3aa = x^2$$

$$\sqrt{3aa} = x$$

Est ergo x media proportionalis inter $3a$ & a. Et si fiat $a=1$, erit $=x\sqrt{3}$.

Tab.I. Fig.13. n.2. *Constructio.* Concinnior hæc est: Super diametro AB construatur triangulum æquilaterum AFB, & centrum C cum puncto F connectatur recta CF; erit CF latus trigoni. Cum enim FCB sit triangulum rectangulum (§. 184 *Geom.*) & FB $=2a$, CB $=a$; erit FC $=\sqrt{3aa}$ (§. 417 *Geom.*) $=x$.

Theorema. Quadratum lateris Trigoni est ad quadratum radii ut 3 ad 1.

Aliter.

$$\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}x^2$$

$$\frac{3}{4}a : \frac{1}{4}x = x : a$$

$$3a : x = x : a$$

COROLLARIUM I.

269. Si, dato latere Trigoni regularis b, inveniri debet radius circuli circumscribendi y; erit $3y^2 = b^2$, consequenter $y = \sqrt{\frac{1}{3}b^2}$, quæ est media proportionalis inter $\frac{1}{3}b$ & b.

COROLLARIUM II.

270. Quoniam dimidium latus Trigoni regularis est sinus 60° (§. 2 *Trigon.*), per Problema præsens invenitur sinus 60°.

SCHOLION.

271. *Hujus Problematis solutio usum potius respicit arithmeticum, quam geometricum. Geometrica enim constructio ex Elementis facilior & elegantior deducitur, quamvis eadem ex calculo etiam pateat. Est enim diameter* $AB = 2a$. *Quare si fiat* $AD = a$, *ducaturque* DB, *cum angulus ad* D *rectus sit* (§. 317 Geom.), *adeoque* $AB^2 - AD^2 =$ Tab.I. Fig.13. n.2. DB^2 (§. 417 Geom.) *erit* $DB = \sqrt{3a^2}$.

PROBLEMA CXXII.

272. *Dato radio circuli* AE; *invenire latus Octogoni regularis circulo inscribendi.* Tab.I. Fig.17.

Sit AE$=r$, AF$=y$; erit latus quadrati AB $=\sqrt{2r^2}$ (§. 21 *Trig.*) & AG $=\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$ (§. 291 *Geom.*). Porro cum AEF $=45°$ (§. 342 *Geom.*), & angulus ad G rectus (§. 291 *Geom.*); erit quoque EAG $=45°$ (§. 241 *Geom.*); consequenter EG=AG (§. 253 *Geom.*) $=\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Hinc FG $=r-\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Quare (§. 417 *Geom.*)

$$yy = \frac{1}{2}r^2 + 1\frac{1}{2}r^2 - r\sqrt{2r^2}$$

hoc est $yy = 2r^2 - r\sqrt{2r^2}$

$$y = \sqrt{(2r^2 - r\sqrt{2r^2})}$$

Quod si fiat $r=1$; erit $y=\sqrt{(2-\sqrt{2})}$.

COROLLARIUM.

273. Cum dimidium latus Octogoni sit sinus 22° 30′ (§. 2 *Trigon.*); per hoc ipsum Problema invenitur sinus 22° 30′.

PROBLEMA CXXIII.

274. *Dato latere Octogoni* AF; *invenire radium circuli circumscribendi* AE. Tab.I. Fig.17.

Tab.I. *Fig.*17. Sit AF$=b$, AE$=y$, erit (§. 272)

$$b^2=2y^2-\sqrt{2y^4}$$
$$\sqrt{2y^4}=2y^2-b^2$$
$$2y^4=4y^4-4b^2y^2+b^4$$
$$0=2y^4-4b^2y^2+b^4$$
$$0=y^4-2b^2y^2+\tfrac{1}{2}b^4$$
$$\tfrac{1}{2}b^4 \qquad \tfrac{1}{2}b^4 \text{ (§. 261 Arith.)}$$
$$\tfrac{1}{2}b^4=y^4-2b^2y^2+b^4$$
$$b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}=y^2-b^2$$
$$b^2+b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}=y^2$$
$$\sqrt{(b^2+b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})}=y$$

Est igitur $b : y=y : b+\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$
conseq. $\tfrac{1}{2}b : y=y : 2b+2\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$.

Hinc elicitur sequens geometrica

Constructio. Super latere Octogoni AB$=b$ describatur semicirculus, & ex centro C erigatur perpendicularis indefinita CF, erit recta DB $=\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$ (*§.* 417 *Geom*). Fiat AE $=2b+2b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$, descriptoque semicirculo AFE erit AF$=\sqrt{(b^2+b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})}$, (*§.* 330 *Geom.*); consequenter radius circuli Octogono circumscribendi: quod adeo super recta AB construetur, si radio AF describatur circulus transiens per A & B.

Tab. XII. Fig. I.

PROBLEMA CXXIV.

Tab.I. *Fig.*14. 275. *Dato radio circuli* AC; *invenire latus Decagoni regularis inscribendi* AB.

Quoniam AB est $\tfrac{1}{10}$ totius peripheriæ, angulus ACB$=36^\circ$ (§. 57, 59 *Geom.*); consequenter, ob AC$=$BC (§. 40 *Geom.*), ABC$=$CAB$=72^\circ$ (§. 248 *Geom.*); adeoque DAC$=$108 (§. 149 *Geom.*). Fiat AD$=$AC, erit ADC$=$ACD$=36^\circ$ (§. 248 *Geom.*); consequenter DCB$=72^\circ$. Sunt ergo triangula ABC & BDC æquiangula & hinc BD : BC$=$BC : AB (§. 267 *Geom.*).

Sit jam AC$=$BC$=a$, AB$=x$; erit BD$=a+x$; consequenter per demonstrata,

$$a+x : a=a : x$$
$$ax+x^2=a^2$$

Est ergo a media & extrema ratione secanda, cujus pars major x (§. 258). Vel radio a quærendæ sunt reciprocæ $a+x$ & x (*§.* 265).

Theorema. Latus Decagoni regularis circulo inscripti est pars major radii media & extrema ratione secti.

Constructio. Quoniam $x=\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}-\tfrac{1}{2}a$ (§. 258); radio a describatur circulus & in centro E erigatur perpendicularis IE $=a$. Fiat EF$=\tfrac{1}{2}a$: erit FI$=\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$. Quare si ex F, radio IF, describatur arcus KI, erit KE$=\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}-\tfrac{1}{2}a$.

SCHOLION.

276. *Hanc ipsam constructionem tradit* PTOLEMÆUS *in suo* Almagesto.

COROLLARIUM.

277. Invenitur ergo per Problema præsens sinus 18° (*§.* 2. *Trigon.*).

PROBLEMA CXXV.

278. *Dato latere Decagoni regularis circulo inscribendi* AB; *invenire radium* AC.

Sit AB$=a$, AC$=x$; erit BD$=a+x$, & *per demonstrata in Probl. præc.*

$a+$

$a+x:x=x:a$

$ax+a^2=x^2$

$a^2=x^2-ax$

$\frac{5}{4}a^2=x^2-ax+\frac{1}{4}a^2$

$\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=x-\frac{1}{2}a$, ob $x>\frac{1}{2}a$ (§. 275).

$\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=x.$

I. 6. *Constructio.* Construatur triangulum rectangulum MLN, in quo ML $=a$ & MN $=\frac{1}{2}a$: erit LN $=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 417 *Geom.*). Producatur MN in O, donec NO = LN; erit MO $=x$. Ex centro itaque O per M circulus describi potest.

Aliter.

$a+x:x=x:a$

$a:x=x-a:a$

Quærendæ adeo sunt ipsi a reciprocæ x & $x-a$.

PROBLEMA CXXVI.

I. 17. 279. *Dato radio circuli* AE *& latere Decagoni* AF; *invenire latus Pentagoni* AB.

Sit AE $=a$, AB $=x$,
AF $=b$, AG $=\frac{1}{2}x$, (§. 291 *Geom.*)
GE $=\sqrt{(a^2-\frac{1}{4}x^2)}$
FG $=a-\sqrt{(a^2-\frac{1}{4}x^2)}$
Quare (§. 417 *Geom.*)

$b^2=\frac{1}{4}x^2+a^2-2a\sqrt{(a^2-\frac{1}{4}x^2)}+a^2-\frac{1}{4}x^2$

$b^2=2a^2-2a\sqrt{(a^2-\frac{1}{4}x^2)}$

$2a\sqrt{(a^2-\frac{1}{4}x^2)}=2a^2-b^2$

$4a^4-a^2x^2=4a^4-4a^2b^2+b^4$

$-a^2x^2=-4a^2b^2+b^4$

$4a^2b^2-b^4=a^2x^2$

$4b^2-b^4:a^2=x^2$

Est vero $b=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}-\frac{1}{2}a$ (§. 275)

$b^2=\frac{6}{4}a^2-a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

$b^4=\frac{14}{4}a^4-3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

Ergo

$$x^2=\frac{24}{4}a^2-4a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}-(\frac{14}{4}a^4-3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}):a^2$$
$$=\frac{24}{4}a^2-4a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}-\frac{14}{4}a^2+3a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$
$$=\frac{10}{4}a^2-a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=a^2+\frac{6}{4}a^2-a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$
$$=a^2+b^2.$$

Constructio: Quæratur latus Decagoni EK (§. 275); erit KI latus Pentagoni. Tab. I. Fig. 15.

Theorema. Latus Pentagoni regularis potest latera Hexagoni & Decagoni eidem circulo inscriptorum simul.

SCHOLION.

280. *Eandem prorsus constructionem dedit* PTOLEMÆUS.

COROLLARIUM.

281. Per præsens adeo Problema inveniri potest sinus 36° (§. 2 *Trigon.*).

PROBLEMA CXXVII.

282. *Datis summa crurum Trianguli rectanguli* AB+BC, *una cum perpendiculo* BD *ex angulo recto* B *in hypothenusam* AC *demisso; invenire latera.* Tab. I. Fig. 3.

Sit AB+BC $=a$, BD $=b$, AB—BC $=y$, AC $=x$; erit AB $=\frac{1}{2}(a+y)$, BC $=\frac{1}{2}(a-y)$; consequenter

(§. 417 *Geom.*)

$x^2=\frac{1}{2}(aa+yy)$

$2x^2=aa+yy$

$2x^2-a^2=y^2$

(§. 330 *Geom.*)

BA:BD=AC:BC

$\frac{1}{2}(a+y):b=x:\frac{1}{2}(a-y)$

$\frac{1}{4}(a^2-y^2)=bx$

$a^2-y^2=4bx$

$a^2-4bx=y^2$

Quare

Quare (§. 87 *Arithm.*).

$$2x^2 - a^2 = a^2 - 4bx$$

$$2x^2 + 4bx = 2a^2$$

$$x^2 + 2bx = a^2$$

$$x^2 + 2bx + b^2 = a^2 + b^2$$

$$x = \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$$

Constructio nihil difficultatis habet. Quodsi enim triangulum construi debet, ad $AB = a$ excitetur in A perpendicularis $AC = b$ (§. 249 *Geom.*), erit $BC = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Quare si fiat $CD = AC$, erit $DB = \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$. Fiat jam porro $BE = BD$, &, descripto super EB semicirculo ex C, ducatur CH ipsi AB parallela (§. 258 *Geom.*) secans semicirculum in F. Ductis enim rectis EF & FB, erit EFB triangulum quaesitum.

Tab. XII. *Fig.* 116.

PROBLEMA CXXVIII.

Tab. I. *Fig.* 18. 283. *Datis, pro triangulo rectangulo* BAC, *hypothenusa* BC *& differentia crurum* DC; *invenire crura.*

Sit $BC = c$, $DC = f$, $\frac{1}{2}(AB + AC) = x$; erit $AC = x + \frac{1}{2}f$, $AB = x - \frac{1}{2}f$ (§. 6); consequenter (§. 417 *Geom.*).

$$2x^2 + \tfrac{1}{2}f^2 = c^2$$

$$2x^2 = c^2 - \tfrac{1}{2}f^2$$

$$x^2 = \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}f^2$$

$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}f^2)}$$

Constructio. Construatur rectangulum triangulum AFE, in quo $AF = FE = \frac{1}{2}c$, erit $AE = \sqrt{\frac{1}{2}cc}$. Super AE describatur semicirculus, ob $AF = FE$, transiturus per F, & in eo applicetur $EG = \frac{1}{2}f$; erit $AG = x$; consequenter si fiat $GD = GC = GE$, crus majus AC, minus $AB = AD$.

PROBLEMA CXXIX.

Tab. I. *Fig.* 19. 284. *In dato circulo aptare rectam datam* KL, *quae producta transeat per datum punctum* H *tangentis* HI.

Sit $LK = m$, $HI = n$, $LH = y$; erit (§. 379 *Geom.*).

$$y^2 + my = n^2$$

$$\tfrac{1}{4}m^2 \quad \tfrac{1}{4}m^2$$

$$y^2 + my + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 + n^2$$

$$y + \tfrac{1}{2}m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + n^2)}$$

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + n^2)} - \tfrac{1}{2}m$$

Constructio. In puncto tangentis I erigatur perpendicularis $MI = \frac{1}{2}m$; erit $HM = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + n^2)}$. Fiat $NM = MI = \frac{1}{2}m$; erit $HN = y$. Quare si ex centro H, radio HN, describatur arcus LN; erit L punctum, per quod recta HK ducenda, ut LK sit chorda in circulo aptanda.

PROBLEMA CXXX.

285. *Datis duobus quadratis; invenire duo alia reciproca, quorum summa aequatur quadrato dato.*

Sint quadrata data bb, cc dd, quaesita yy & $dd - yy$. Erit, per conditionem Problematis,

$$yy : bb = cc : dd - yy$$

$$ddy^2 - y^4 = bbcc$$

$$y^4 - ddy^2 + \tfrac{1}{4}d^4 = \tfrac{1}{4}d^4 - bbcc$$

$$\tfrac{1}{2}dd - y^2 = \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^4 - bbcc)}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{2}dd - \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^4 - bbcc)}$$

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2}dd - \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^4 - bbcc)})}$$

Constructio. Quaeratur ad $AB = d$, $AC = b$, & $BD = c$ quarta proportionalis $CE = bc : d$. Describatur semicirculus super $CF = \frac{1}{2}d$, & in eo applicetur $CG = CE$; erit $FG = \sqrt{(\frac{1}{4}d^4 - bbcc)} : d$. Fiat $HC = d$ & $CI = \frac{1}{2}d - \sqrt{(\frac{1}{4}d^4 - bbcc)} : d$; erit media proportionalis $CK = y$. Denique super $CH = d$ describatur semicirculus, & in eo applicetur $CL = CK$, erit $LH = \sqrt{(d^2 - y^2)}$ latus alterius quadrati quaesiti.

PRO-

PROBLEMA CXXXI.

286. *Datis duobus quadratis; invenire duo alia reciproca, quorum differentia æquatur quadrato dato.*

Sint quadrata data ff, gg, hh, quæsita yy & $hh+yy$. Erit, per conditionem Problematis,

$$yy : ff = gg : hh + yy$$

$$y^4 + hhyy = ffgg$$

$$\tfrac{1}{4}h^4 \qquad \tfrac{1}{4}h^4$$

$$y^4 + hhyy + \tfrac{1}{4}h^4 = ffgg + \tfrac{1}{4}h^4$$

$$y^2 + \tfrac{1}{2}hh = \surd(ffgg + \tfrac{1}{4}h^4)$$

$$y^2 = -\tfrac{1}{2}hh + \surd(ffgg + \tfrac{1}{4}h^4)$$

$$y = \surd(-\tfrac{1}{2}hh + \surd(ffgg + \tfrac{1}{4}h^4))$$

Constructio. Eadem fere, quæ Problematis præcedentis.

PROBLEMA CXXXII.

287. *Datis tribus lateribus trianguli cujuscunque* HL, LI *&* IH; *invenire altitudinem* ML.

Sit HL $= c$, LI $= d$, HI $= g$, HM $= z$, erit MI $= g - z$. Quare (§. 417 *Geom.*) bis invento valore ipsius MI^2

$$cc - zz = dd - gg + 2gz - zz$$

$$cc = dd - gg + 2gz$$

$$cc - dd = 2gz - gg$$

$$cc + gg - dd = 2gz$$

$$\frac{cc + gg - dd}{2g} = z$$

Geometrica constructio non desideratur, utpote ex Elementis manifesta; sed tantum regula arithmetica.

COROLLARIUM.

288. Vi æquationis tertiæ $dd - cc = gg - 2gz$. Sed $gg - 2gz$ est differentia inter zz & $gg - 2gz + zz$. Ergo in omni triangulo differentia quadratorum crurum HL & LI æquatur differentiæ quadratorum segmentorum basis HM & MI. Tab. II. Fig. 21. n. 1.

PROBLEMA CXXXIII.

289. *Triangulo dato* HLI *æquale & alteri dato* NOP *simile construere.* Tab. II. Fig. 21. n. 1. & 2.

Sit HI $= f$, LM $= e$, NP $= m$, QO $= n$, basis trianguli quæsiti $= y$, altitudo $= z$: erit

(§. 396 *Geom.*) (§. 392 *Geom.*)

$$m : n = y : z \qquad fe = zy$$

$$mz = ny \qquad fe : y = z$$

$$mfe : y = mz$$

$$ny = mfe : y$$

$$ny^2 = mfe$$

$$y^2 = mfe : n$$

$$y = \surd(mfe : n)$$

Constructio. Producatur altitudo OQ trianguli NOP in M, donec altitudini alterius LM æqualis fiat. Producantur itidem crura trianguli in R & S, & per M agatur ipsi NP parallela: erit RS $= me : n$. Quæratur inter RS & SI $= f$ media proportionalis TS $= \surd(mfe : n)$, super qua, ob angulos N & P datos, triangulum TSV construi potest (§. 264 *Geom.*).

Aliter.

$n : m = z : y \qquad fe = zy$

Fiat $n : m = e : r \qquad f : z = y : e$ (§. 299 *Arithm.*)

erit $z : y = e : r$ (§. 167 *Arithm.*)

Ergo $f : y = y : r$ (§. 194 *Arithm.*).

Est ergo y media proportionalis inter f & r, seu inter f & $em : n$, ut ante.

PROBLEMA CXXXIV.

Tab.II. Fig.22. 290. *Ex angulo* C *rhombi dati* ABDC *ducere rectam* CG *lateri* AB *continuato occurrentem in* G, *ita ut* EG *sit æqualis lineæ datæ.*

Ducatur diagonalis CB & in E constituatur angulus CEF = CBG (§.208 *Geom.*), cujus latus EF producatur, donec diagonali continuatæ in F occurrat.

Sit AB = b, CB = c, EG = d, BG = z, CF = y: erit BF = $y - c$. BG : GE = AB : EC (§. 268 *Geom.*). Unde reperitur EC = $bd : z$. Quoniam angulus CEF = CBG *per construct.* erit ob angulum communem C (§. 267 *Geom.*) CB : BG = CE : EF. Unde reperitur EF = $zbd : cz = bd : c$. Porro $o = x$ (§. 156 *Geom.*) & $x = u$ (§. 99, 204 *Geom.*). Ergo $o = u$ (§. 87 *Arithm.*); consequenter CBG = EBF (§. 88 *Arithm.*) = CEF (§. *Arithm.*). Ergo, ob angulum communem F (§. 267 *Geom.*),

$$CF : FE = FE : BF$$

$$y : \frac{bd}{c} = \frac{bd}{c} : y - c$$

$$cy : bd = bd : cy - cc$$

$$ccy^2 - c^3 y = bbdd$$

$$y^2 - cy = bbdd : cc$$

$$y^2 - cy + \tfrac{1}{4}cc = \tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc$$

$$y - \tfrac{1}{2}c = \sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc)}$$

$$y = \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc)}$$

Ex æquatione prima statim liquet, inveniendas esse ipsi $bd : c$ reciprocas y & $y - c$. Ex ultima autem hæc elicitur

Constructio. Fiat BM = EG = d, & ducatur LM ipsi AC parallela; erit LM = $bd : c$ (§. 268 *Geom.*). Dividatur BC bifariam in N & in C erigatur perpendicularis CO = LM; erit ON = $\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc)}$ (§. 417 *Geom.*). Translata ergo ON ex N in F; erit CF = y. Denique cum EF = $bd : c$ = LM; ex puncto F, intervallo EF, determinetur punctum E. Quodsi jam ex C ducatur recta per E occurrens ipsi AB continuatæ in G, erit EG æqualis lineæ datæ.

PROBLEMA CXXXV.

291. *A dato puncto* E *ducere rectam, quæ circulum datum tangat.*

Quia punctum E positione, circulus GDFG & positione & magnitudine datur; dantur etiam EG & GC. Sit itaque EG = a, GC = b, ED = x; erit EF = $a + 2b$ & (§. 379 *Geom.*)

$$aa + 2ab = x^2$$

$$\sqrt{(aa + 2ab)} = x$$

Constructio. Connectantur centrum circuli C & punctum datum E recta EC. Super ea describatur semicirculus CDE, ducanturque chordæ CD & DE; erit D rectus (§. 317 *Geom.*). Est vero $CE^2 = aa + 2ab + bb$, $CD^2 = bb$: ergo DE = $\sqrt{(2ab + aa)} = x$ (§. 417 *Geom.*).

PROBLEMA CXXXVI.

292. *Examinare regulam* Renaldinianam, *Polygonum regulare quodcunque circulo inscribendi.*

Regula *Caroli* RENALDINI (*a*) hæc est. Dividatur diameter AB in tot partes æquales, in quot peripheria dividi debet. Super AB construatur triangulum æquilaterum AFB. Ex F per secundum divisionis punctum D ducatur recta FG. Erit ex ipsius mente BG latus Polygoni.

Fal-

(*a*) De Resolutione & Compositione Mathematica lib. 2. f. 367.

Falſitatem Regulæ una inſtantia oſtendiſſe ſufficit.

Sit BG latus Octogoni, & fiat BH $=$ BG; erit HG latus Quadrati. Sit porro CB $= 1$, EG $= x$; erit CD $= \frac{1}{2}$, per Regulam RENALDINI, FC $= \sqrt{3}$ (§. 417 *Geom.*). Quoniam angulus ad C rectus (*§.* 184 *Geom.*) & is ad E itidem rectus (§. 291 *Geom.*), præterea verticales ad D æquales (§. 156 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*) FC : CD $=$ EG : DE, hoc eſt, $\sqrt{3} : \frac{1}{2} = x : \frac{\frac{1}{2}x}{\sqrt{3}}$. Hinc CE $= \frac{\sqrt{3}+x}{2\sqrt{3}}$. Unde tandem ob $CE^2 + EG^2 = CG^2$ (§. 417 *Geom.*) reperitur

$$\frac{3 + 2x\sqrt{3} + x^2}{12} + x^2 = 1$$

$$3 + 2x\sqrt{3} + 13x^2 = 12$$

$$2x\sqrt{3} + 13x^2 = 9$$

$$\frac{2}{13}x\sqrt{3} + x^2 = \frac{9}{13}$$

$$\frac{3}{13:13} \qquad \frac{3}{13.13} \quad \text{add.}$$

$$\frac{3}{13.13} + \frac{2}{13}x\sqrt{3} + x^2 = \frac{9}{13} + \frac{3}{13.13} = \frac{120}{13.13}$$

$$\frac{1}{13}\sqrt{3} + x = \frac{1}{13}\sqrt{120}.$$

$$x = \frac{1}{13}\sqrt{120} - \frac{1}{13}\sqrt{3}$$

$$= \frac{2}{13}\sqrt{30} - \frac{1}{13}\sqrt{3}$$

Foret adeo ſemilatus Quadrati, ſi vera eſſet Regula RENALDINI, $(2\sqrt{30} - \sqrt{3}) : 13$. Sed idem ex veris principiis elicitur $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (§. 21 *Trigon.*) $= \sqrt{\frac{1}{2}}$: quod diverſum a *Renaldiniano* eſſe extractio radicis probat. Fallit ergo regula RENALDINI in Octogono, adeoque non univerſalis.

SCHOLION.

293. *Eodem prorſus modo oſtenditur, quod etiam fallat in aliis Polygonis.*

PROBLEMA CXXXVII.

294. *Data diagonali Pentagoni regularis* AD; *invenire latus Pentagoni* AE.

Sit AE $= x$, AD $= a$. Quoniam anguli AEC menſura eſt arcus AB (§. 314 *Geom.*) & ipſius EFA ſemiſumma arcuum AE & CD (§. 316 *Geom.*), hoc eſt, arcus AE (§. 342 *Geom.*), eſt vero AB $=$ AE (§. *cit. Geom.*); erit AEF $=$ AFE (§. 142 *Geom.*), conſequenter AF $=$ AE (§. 253 *Geom.*) $= x$, adeoque FD $= a - x$. Porro anguli AED menſura eſt AB $+ \frac{1}{2}$ BC (§. 314 *Geom.*) & ipſius EFD menſura itidem AB $+ \frac{1}{2}$ BC (§. 316 *Geom.*) & angulus ADE utrique triangulo AED & EFD communis. Quare (§. 267 *Geom.*) Tab. II. Fig. 25.

$$AD : ED = ED : FD$$

$$a : x = x : a - x$$

$$a^2 - ax = x^2$$

$$a^2 = x^2 + ax$$

Eſt adeo x pars major ipſius a media & extrema ratione ſectæ (§. 258).

COROLLARIUM.

295. Quod ſi AD $= x$, ED $= a$, reperietur $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Unde patet, quomodo ex dato latere diagonalis inveniatur.

PROBLEMA CXXXVIII.

296. *Invenire circulum ſuperficiei Cylindri æqualem.*

Sit ratio radii ad peripheriam $r : p$; peripheria Cylindri $= p$; altitudo a; erit ſuperficies $= ap$ (§. 516 *Geom.*).

 Sit

Sit radius circuli $= x$; erit $r : p = x : \frac{px}{r}$, quæ est ejusdem peripheria (§. 425 *Geom.*). Unde habemus (§. 429 *Geom.*)

$$px^2 : 2r = ap \quad 2r \text{ mult.}$$
$$px^2 = 2rap \quad p \text{ div.}$$
$$x^2 = 2ar$$
$$x = \sqrt{2ar}$$

Theorema. Superficies Cylindri æquatur circulo, cujus radius est medius proportionalis inter diametrum & altitudinem Cylindri.

PROBLEMA CXXXIX.

297. *Invenire Cylindrum, cujus superficies sit circulo dato æqualis.*

Sit circuli radius $= r$, peripheria $= p$, altitudo Cylindri $= x$, radius basis $= y$; erit peripheria ejus $py : r$ (§. 425 *Geom.*), consequenter (§. 516 *Geom.*).

$$pyx : r = \tfrac{1}{2}pr \quad r$$
$$pyx = \tfrac{1}{2}pr^2 \quad p$$
$$yx = \tfrac{1}{2}r^2 \quad y$$
$$x = r^2 : 2y$$

Est adeo Problema indeterminatum, ita ut radius pro arbitrio assumi possit vel, quod perinde est, altitudo.

PROBLEMA CXL.

298. *Data diametro Sphæræ & altitudine Cylindri ipsi æqualis; invenire diametrum Cylindri.*

Sit diameter Sphæræ $= d$, altitudo Cylindri $= a$, diameter ejus $= x$, ratio diametri ad peripheriam $b : c$; erit soliditas Sphæræ $cd^3 : 6b$ (§. 556 *Geom.*), & soliditas Cylindri $= acx^2 : 4b$ (§ 541 *Geom.*). Quare, per conditionem Problematis,

$$cd^3 : 6b = acx^2 : 4b$$
$$4d^3 = 6ax^2$$
$$2d^3 : 3a = x^2$$
$$\sqrt{(2d^3 : 3a)} = x.$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$3a : 2d = d^2 : x^2$$

resoluta sequens suppeditat

Theorema: Quadratum diametri Sphæræ est ad quadratum diametri Cylindri ipsi æqualis, ut tripla Cylindri altitudo ad diametrum Sphæræ duplam.

PROBLEMA CXLI.

299. *Data diametro Sphæræ* AB; *invenire latus Tetraëdri ipsi inscribendi* AD.

Sit diameter Sphæræ AB $= a$, latus Tetraëdri AD $= x$, erit CD radius circuli, cui unum e triangulis Tetraëdri inscribi potest $= \sqrt{\tfrac{1}{3}x^2}$ (§. 269). Sit AC $= y$, erit CB $= a - y$; consequenter (§. 327 *Geom.*)

$$AC : CD = CD : CB$$
$$y : \sqrt{\tfrac{1}{3}x^2} = \sqrt{\tfrac{1}{3}x^2} : a - y$$
$$ay - y^2 = \tfrac{1}{3}x^2$$
$$ay - \tfrac{2}{3}x^2 = \tfrac{1}{3}x^2$$
$$ay = x^2$$
$$a\sqrt{\tfrac{2}{3}x^2} = x^2$$
$$\tfrac{2}{3}a^2 x^2 = x^4$$
$$\tfrac{2}{3}a^2 = x^2$$
$$\sqrt{\tfrac{2}{3}a^2} = x$$

(§. 417 *Geom.*)

$$AD^2 = AC^2 + CD^2$$
$$x^2 = y^2 + \tfrac{1}{3}x^2$$
$$\tfrac{2}{3}x^2 = y^2$$
$$\sqrt{\tfrac{2}{3}x^2} = y$$

Est ergo $x^2 : a^2 = 2 : 3$.

Theorema. Quadratum lateris Tetraëdri est ad quadratum diametri Sphæræ, cui inscribi potest, in ratione subsesquialtera.

COROL-

COROLLARIUM I.

300. Eſt ergo latus Tetraëdri ad diametrum Sphæræ, cui inſcribitur, ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{3}$, conſequenter huic incommenſurabile.

COROLLARIUM II.

b.II. 301. Porro quoniam $y^2 = \frac{2}{3}x^2 = \frac{2}{3}ay$,
7. erit $y = \frac{2}{3}a$. Patet adeo Tetraëdrum ſphæræ inſcribi, ſi diameter AB in tres partes æquales dividatur, fiatque $AC = \frac{2}{3}AB$.

PROBLEMA CXLII.

b.II. 302. *Data diametro Sphæræ; inve-*
28. *nire latus Cubi ſeu Hexaëdri ipſi inſcribendi* FG.

Sit diameter Sphæræ, quæ diagonali Cubi FH æquatur, $= a$, latus Cubi $= x$; erit (§. 417 *Geom.*) $FI^2 = 2x^2$, & $FH^2 = 3x^2$; conſequenter

$$3x^2 = a^2$$

$$x^2 = \frac{1}{3}a^2$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$$

Theorema. Quadratum lateris Hexaëdri eſt ad quadratum diametri Sphæræ circumſcriptæ in ratione ſubtripla.

COROLLARIUM I.

303. Eſt ergo latus Hexaëdri ad diametrum Sphæræ cui inſcribitur, ut 1 ad $\sqrt{3}$; conſequenter huic incommenſurabile.

COROLLARIUM II.

.II. 304. Sit in diametro Sphæræ $AC = \frac{2}{3}a$,
27. & $CB = \frac{1}{3}a$; erit $AD = \sqrt{\frac{2}{3}a^2}$; conſequenter $DB = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$, ſeu latus Hexaëdri.

PROBLEMA CXLIII.

.II. 305. *Data diametro Sphæræ; inve-*
29. *nire latus Octaëdri inſcripti* ML.

Sit $LM = x$, diameter Sphæræ circumſcriptæ $HL = b$. Quoniam ML quadrantem ſubtendit (§. 342, 475 *Geom.*); erit (§. 417 *Geom.*)

$$\frac{2}{4}bb \text{ ſeu } \frac{1}{2}bb = x^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}b^2} = x$$

Theorema. Quadratum lateris Octaëdri eſt ad quadratum diametri Sphæræ circumſcriptæ in ratione ſubdupla.

COROLLARIUM I.

306. Eſt ergo latus Octaëdri ML ad diametrum Sphæræ circumſcriptæ ut 1 ad $\sqrt{2}$; adeoque huic incommenſurabile.

COROLLARIUM II.

307. Si ex centro Sphæræ E erigatur perpendicularis EF, erit $FA = \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$, adeoque latus Octaëdri inſcribendi; id quod in ipſo calculo ſuppoſuimus, in futuros tamen uſus ſigillatim enunciandum. Tab. Fig. 27.

PROBLEMA CXLIV.

308. *Data diametro Sphæræ; invenire latus Dodecaëdri* AB. Tab. II. Fig. 30.

Quoniam puncta A, C, F, H ſunt in Sphæra: planum per ea tranſiens eſt circulus, ut inferius in Sphæricis independenter a Dodecaëdro dem[illegible]bitur. Quoniam anguli B, M, G & L, itemque latera AB, BC, CM, M[illegible] FG, GH, HL & LA inter ſe æquantur (§. 475, 106 *Geom.*); AC = C[illegible] = HF = HA (§. 179 *Geom.*) adeoque AHFC Quadratum (§. 342 & 98 *Geom.*). Jam cum Pentagona 12 in 36 triangula reſolvantur per lineas diagonales, quadratum vero AHFC nonniſi 6 ſubtendat; omnia iſta triangula a ſex quadratis ſubtendantur neceſſe eſt; conſequenter diagonalis AC eſt lateri Hexaëdri ſive Cubi eidem Sphæræ inſcripti æqualis (§. 460 *Geom.*).

Sit latus Dodecaëdri $AB = x$, diameter Sphæræ $= d$, erit $AC = \sqrt{\frac{1}{3}d^2}$ (§. 302), conſequenter

Tab.II. Fig.30.

$$AC : AB = AB : AC - AB$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} : x = x : \sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} - x \quad (\text{§}.294).$$

$$\tfrac{1}{3}d^2 - x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = x^2$$

$$\tfrac{1}{3}d^2 = x^2 + x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2}$$

$$\tfrac{1}{12}d^2 \qquad\qquad \tfrac{1}{12}d^2$$

$$\tfrac{5}{12}d^2 = x^2 + x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} + \tfrac{1}{12}d^2$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{12}d^2} = x + \sqrt{\tfrac{1}{12}d^2}$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{12}d^2} - \sqrt{\tfrac{1}{12}d^2} = x$$

h. e. $\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{3}d^2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = x.$

Æquatio altera hoc ſuppeditat *Theorema.* Quadratum diametri Sphæræ æquatur rectangulo ex aggregato lateris Dodecaëdri & Hexaëdri eidem inſcriptorum in triplum latus Dodecaëdri.

COROLLARIUM I.

309. Si diameter Sphæræ fuerit 1, erit latus Dodecaëdri inſcripti $\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}}$; conſequenter illa ad hoc, ut 2 ad $\sqrt{\tfrac{5}{3}} - \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, & quadratum illius ad quadratum hujus [illegible] 5 ad $3 - \sqrt{5}$. Eſt ergo diameter Sphæræ lateri Dodecaëdri inſcripti tum in ſe, tum potentia incommenſurabilis.

COROLLARIUM II.

Tab.II. Fig.30. 310. Latus Dodecaëdri eſt portio major lateris Hexaëdri DB eidem Sphæræ inſcripti media & extrema ratione ſecti in G (§. 258).

PROBLEMA CXLV.

Tab.II. Fig.31. 311. *Data diametro Sphæræ* HM; *invenire latus Icoſaëdri inſcripti.*

Sit ABCDEA circulus ſubtendens angulum ſolidum Icoſaëdri H; erit latus Icoſaëdri æquale lateri Pentagoni AB huic circulo inſcripti (§. 475 *Geom.*). Concipiatur eidem circulo inſcriptum Decagonum regulare DKEFA &c. & alterum circulo alii, qui iſti parallelus & ab eo diſtat intervallo radii CG; erit DN = DC (§. 279). Quodſi ergo anguli Pentagonorum lineis tranſverſis DN, DI, EI &c. connectantur; decem prodibunt triangula æquilatera juncta decem aliis, quorum quinque a circulo ſuperiore, quinque ab inferiore ſubtenduntur.

Sit $HM = b$, $HC = x$, $GC = y$. Quoniam GC eſt latus Hexagoni; erit HG latus Decagoni (§. 279) adeoque $= \sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} - \tfrac{1}{2}y$, (§. 275). Habemus ergo

$$2HG + BC = HM \qquad HC^2 = HG^2 + GE^2$$

$$2\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} - y + y = b \qquad x^2 = y^2 + \tfrac{5}{4}y^2 - y\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} + \tfrac{1}{4}y^2$$

h. e. $2\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} = b$

$$5y^2 = b^2 \qquad x^2 = \tfrac{5}{2}y^2 - y\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{5}b^2 \qquad x^2 = \tfrac{1}{2}b^2 - \sqrt{\tfrac{1}{20}b^4}$$

seu $\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{5}b^2} = b : \sqrt{5}$$

$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2})}$$

Conſtructio. Fiat $AH = AB = b$, erit $EH = \sqrt{\tfrac{5}{4}b^2}$ (§. 417 *Geom.*) & ob $EH : AH = EK : IK$, hoc eſt, $\tfrac{1}{2}b\sqrt{5} : b = \tfrac{1}{2}b : \frac{b}{\sqrt{5}}$ (§. 268 *Geom.*) $IK = b : \sqrt{5}$. Eſt ergo IK radius circuli, cui Pentagonum Icoſaëdri inſcribitur. Porro $EI = b : 2\sqrt{5} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$ (§. *cit. Geom.*) & hinc $AI = \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$. Unde tandem $AK = \sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2})} = x$ (§. 330 *Geom.*).

Tab.II. Fig.31.

COROLLARIUM I.

312. Quoniam $5y^2 = b^2$; quadratum diametri Sphæræ eſt in ratione quintupla ad quadratum radii circuli angulum ſolidum Icoſaëdri ſubtendentis.

COROLLARIUM II.

313. Liquet etiam, latus Icoſaëdri diametro Sphæræ circumſcriptæ tum in ſe, tum potentia incommenſurabile eſſe.

SCHO-

SCHOLION I.

314. *Si diameter Sphæræ fuerit* 100000 *erit* (§. 299, 305, 302, 311, 308) *latus Tetraëdri inscripti* 81649, *Octaëdri* 70710, *Hexaëdri* 57736, *Icosaëdri* 52573, *Dodecaëdri* 35682 (*a*).

SCHOLION II.

315. *Cum ex diametro Sphæræ corporibus regularibus circumscripta invenire possimus latera eorum; non difficile foret, inde ulterius elicere tum superficies, tum soliditates eorundem, easque tum inter se, tum cum Quadrato & Cubo diametri Sphæræ conferre: sed quoniam hæc doctrina rarissimi est usus, eam prætermittendam esse judicamus.*

CAPUT IV.

De Algebra ad Trigonometriam planam applicata.

PROBLEMA CXLVI.

316. *Datis basi* HI *trianguli cujuscunque, & angulis ad basin* H *&* I; *invenire altitudinem.*

Tab. II. Fig. 21. Sit HI $=a$, LM $=x$, sinus anguli MIL $=s$, ejus cosinus $=c$; sinus anguli LHM $=p$, ejus cosinus $=q$. Erit (§. 33 *Trigon.*) $s:x=c:$ MI & $p:x=q:$HM. Unde reperitur MI $=cx:s$ & HM $=qx:p$ (§. 302 *Arithm.*). Quare (§. 87 *Arithm.*).

$$cx:s+qx:p=a \quad | \; sp$$

$$pcx+sqx=asp \quad | \; pc+sq$$

$$x=asp:(pc+sq).$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$pc+sq:sp=a:x$$

resoluta sequens exhibet

Theorema. In omni triangulo HIL basis HI est ad altitudinem ML, ut summa rectangulorum ex sinu anguli obliqui ad basin unius in cosinum alterius se habet ad rectangulum ex sinibus angulorum ad basin.

Aliter.

Sumatur ML pro sinu toto, erunt HM & MI tangentes angulorum HLM & MLI, seu cotangentes datorum H & I. Sint sinus totus $=t$, cotangentes $=m$ & n, LM $=x$, HI $=a$; erit $t:m=x:$ HM, & $t:n=x:$MI (§. 40 *Trigon.*); consequenter HM $=mx:t$, MI $=nx:t$, adeoque (§. 87 *Arithm.*). Tab. II. Fig. 21. n. 1.

$$a=(mx+nx):t \quad | \; t$$

$$at=mx+nx \quad | \; m+n$$

$$at:(m+n)=x$$

Theorema. Basis trianguli est ad altitudinem ut summa cotangentium angulorum ad basin ad sinum totum.

PROBLEMA CXLVII.

317. *Datis summa crurum* HL + LI, *una cum angulis ad basin* H *&* I; *invenire crura* HL *&* LI.

Sit HL + LI $=a$, sinus H $=m$, sinus I $=n$, HL $=x$, erit IL $=a-x$. Quare (§. 33 *Trigon.*).

(*a*) HERIGONIUS *Curs. Mathem.* Tom. I. p. 779.

$x:n$

Tab.II. Fig.21. fi. 1.

$x : n = a - x : m$

$mx = na - nx$

$mx + nx = na$

$m + n$ div.

$x = na : (m + n)$

$a - x = (ma + na - na) : (m + n) = ma : (m + n)$

Theorema. Summa crurum trianguli HL + LI est ad crus unum HL ut summa sinuum angulorum ad basin H & I ad sinum anguli I cruri isti HL oppositum.

PROBLEMA CXLVIII.

318. *Datis angulis ad basin* H *&* I, *una cum segmento baseos uno* HM; *invenire segmentum alterum* MI.

Sit HM $= a$, MI $= x$, sinus anguli H $= m$, ejus cosinus $= n$; sinus anguli I $= p$, ejus cosinus $= q$. Erit (§.33 *Trigon.*) $n : a = m :$ ML. Reperitur adeo ML $= am : n$. Porro, *vi* §. *cit.* $q : x = p :$ ML. Reperitur itaque ML $= px : q$. Quare (§.81 *Arithm.*),

$px : q = am : n$

nq

$pnx = amq$

pn

$x = amq : pn$

Est adeo $pn : mq = a : x$.

Theorema. Si ex vertice trianguli L in basin HI perpendiculum demittitur; segmentum unum HM est ad alterum MI ut rectangulum ex sinu anguli segmento MI adjacentis in cosinum anguli segmento HM adjacentis ad rectangulum ex sinu anguli H in cosinum anguli I.

PROBLEMA CXLIX.

Tab. I. Fig. 3. 319. *Datis area trianguli rectanguli* ABC, *una cum angulo* C; *invenire crura* AB *&* BC.

Sit area $= b^2$ BC $= x$

Sinus totus $= r$, erit BA $= 2b^2 : x$ (§.394 Geom.)

Tangens anguli C $= t$

Quare (§. 40 *Trigon.*)

$x : \frac{2b^2}{x} = r : t$

$x^2 : 2b^2 = r : t$

$x^2 = 2rb^2 : t$

$x = \sqrt{(2rb^2 : t)}$

Theorema: Area trianguli rectanguli est ad quadratum cruris unius BC ut tangens dimidia anguli adjacentis C ad sinum totum.

Constructio: Intra crura anguli dati ADM erigatur perpendicularis FE, puncto E pro lubitu assumto, erit DE $= r$ & FE $= t$ (§.7 *Trigon.*). Fiat DG = FE, DH $= b$, & agatur ipsi EG parallela HI: erit DI $= br : t$ (§.271 *Geom.*). Fiat MI $= 2b$ & quæratur inter MI & DI media proportionalis IK (§. 327 *Geom.*), quæ erit crus unum. Dividatur MI bifariam in L & fiat IN = LI, ducaturque NO ipsi MK parallela, erit IO $= 2b^2 : x$ (§. 271 *Geom.*), adeoque crus alterum, consequenter KOI, triangulum quæsitum.

Aliter. Sit EDA angulus datus. Fiat DA $= 2b$ & erigatur AE perpendicularis ad DA: erit simul DA $= r$ & AE $= t$ (§.7 *Trigon.*). Producatur EA in infinitum, & in D erigatur ad ED perpendicularis DG, erit AG $= \frac{2br}{t}$ (§.327 *Geom.*). Fiat AH $=$ AG, & AI $= \frac{1}{2}$AD $= b$, erit, descripto super IH semicirculo, AL $= \sqrt{\frac{2b^2r}{t}}$. Fiat denique AB $=$ AL, & ducatur BC cruri anguli dati DE parallela; erit triangulum BAC quæsitum.

PROBLEMA CL.

320. *Data subtensa arcus* AB *quadrante minoris, una cum radio circuli* CE; *invenire subtensam* CB *arcus compositi ex arcu* AB *& ejus complemento dimidio ad semicirculum.*

Applicetur AB diametro CD parallela & fiat DF = AB, ducanturque rec-

rectæ EB, AD & BF. Quoniam $x = o$ (§. 315 *Geom.*), & ob parallelismum linearum AD & BF (§. 257 *Geom.*) $x = y$ (§. 233 *Geom.*); erit $o = y$ (§. 87 *Arithm.*). Est vero etiam, ob CE = EB (§. 40 *Geom.*) $u = o$ (§. 184 *Geom.*) $= y$; consequenter CF : CB = CB : CE (§. 267 *Geom.*). Sit jam AB $= a$, CE $= r$, CB $= x$; erit CF $= a + 2r$; consequenter

$$a + 2r : x = x : r$$
$$ar + 2r^2 = x^2$$
$$\sqrt{(ar + 2r^2)} = x$$

COROLLARIUM I.

321. Cum angulus CBD sit rectus (§. 317 *Geom.*); erit $BD^2 = 4r^2 - ar - 2r^2 = 2r^2 - ar$ (§. 417 *Geom.*); consequenter BD subtensa dimidii complementi ad semicirculum arcus AB $= \sqrt{(2r^2 - ar)}$.

COROLLARIUM II.

322. Quadratum ergo chordæ DB arcum quadrante minorem subtendentis æquatur rectangulo ex radio CE in differentiam chordæ diametro parallelæ ex puncto B ductæ AB a diametro CD.

COROLLARIUM III.

323. Quadrata chordarum CB & BD, quæ ambæ simul semicirculum subtendunt, sunt inter se ut $2r^2 + ar$ ad $2r^2 - ar$ (§. 320, 321), hoc est, ut $2r + a$ ad $2r - a$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, ut aggregatum ex diametro CD & chorda AB ex puncto concursus B eidem parallela ducta, ad differentiam hujus chordæ a diametro.

PROBLEMA CLI.

Tab. II. Fig. 4. 324. *Datis in quadrilatero circulo inscripto lateribus* AE, EB, BC *&* AC, *una cum diagonali* EC; *invenire diagonalem* AB.

Sit AE $= a$, EB $= b$, BC $= c$, AC $= d$, EC $= f$; AB $= y$. Ducatur EF, ita ut sit $o = x$ (§. 208 *Geom.*). Quoniam præterea ACE = ABE (§. 315 *Geom.*); erit EC : AC = EB : BF, hoc est, $f : d = b$: BF (§. 267 *Geom.*). Reperitur ergo BF $= bd : f$. Quoniam porro EAB = ECB (§. 315 *Geom.*), & AEF = CEB (§. 88 *Arithm.*); erit EC (f) : CB (c) = EA (a) : AF $(ac : f)$ (§. 267 *Geom.*). Quare (§. 86 *Arithm.*).

$$(bd + ac) : f = y$$
$$bd + ac = fy$$

Theorema. In quadrilatero circulo inscripto AEBC rectangulum ex diagoniis EC & AB æquatur rectangulis ex lateribus oppositis EB in AC & EA in BC.

PROBLEMA CLII.

325. *Dato sinu anguli simpli, invenire sinus & cosinus angulorum multiplorum.*

Sit angulus quicunque A, fiat AB = BD = DF = FH = HL = LM = MP = PQ = QT = TV: erit A = ADB (§. 184 *Geom.*), EBD = A + ADB (§. ... *Geom.*) = 2A, *per demonstr.* Eodem modo ostenditur, esse FDH = A + DFA = 3A; HFL = A + AHF = 4A; LHK = A + ALH = 5A; PLM = A + AML = 6A &c. Demittantur perpendiculares BC, DE, FG, IH, LK, MN &c. Quodsi AB sumatur pro sinu toto; erit BC sinus, AC cosinus anguli simpli A; ED sinus, BE cosinus anguli dupli; FG sinus, DG cosinus anguli tripli, &c. (§. 2, 11 *Trigon.*). Tab. III. Fig. 5.

Sit AB $= r$, BC $= b$, AC $= a$, erit, ob angulum A utrique △△ BAC &

& EAD communem, & rectos ad C & E æquales (§. 267 *Geom.*):

$$AB : BC = AD : DE$$

$$r : b = 2a : \frac{2ab}{r}$$

$$AB : AC = AD : AE$$

$$r : a = 2a : \frac{2a^2}{r}$$

Ergo $BE = AE - AB = 2a^2 : r - r = (2a^2 - r^2) : r$. Est vero $r^2 = a^2 + b^2$ (§. 417 *Geom.*). Ergo $BE = (2a^2 - a^2 - b^2) : r = (a^2 - b^2) : r$ & $AF = AE + EF = (3a^2 - b^2) : r$.

$$AB : BC = AF : FG \text{ (§. 268 Geom.)}$$

$$r : b = \frac{3a^2 - b^2}{r} : \frac{3ab^2 - b^3}{r^2}$$

$$AB : AC = AF : AG$$

$$r : a = \frac{3a^2 - b^2}{r} : \frac{3a^3 - ab^2}{r^2}$$

Ergo $DG = AG - AD = (3a^3 - ab^2) : r^2 - 2a = (3a^3 - ab^2 - 2ar^2) : r^2 =$ (substituto valore ipsius $r^2 = a^2 + b^2$), $(a^3 - 3ab^2) : r^2$; consequenter $AH = AG + GH = (4a^3 - 4ab^2) : r^2$

$$AB : BC = AH : HI$$

$$r : b = \frac{4a^3 - 4ab^2}{r^2} : \frac{4a^3b - 4ab^3}{r^3}$$

$$AB : AC = AH : AI$$

$$r : a = \frac{4a^3 - 4ab^2}{r^2} : \frac{4a^4 - 4a^2b^2}{r^3}$$

Quia $FA = (3a^2 - b^2) : r = (3a^2 - b^2) r^2 : r^3 = (3a^2 - b^2)(a^2 + b^2) : r^3 = (3a^4 + 2a^2b^2 - b^4) : r^3$ ideo erit $FI = AI - AF = (a^4 - 6a^2b^2 + b^4) : r^3$.

Eodem prorsus modo reperitur

$KL = (5a^4b - 10a^2b^3 + b^5) : r^4$

& $HK = (a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4) : r^4$;

$MN = (6a^5b - 20a^3b^3 + 6ab^5) : r^5$

& $LN = (a^6 - 15a^4b^2 + 15a^2b^4 - b^6) : r^5$;

$PO = (7a^6b - 35a^4b^3 + 21a^2b^5 - b^7) : r^6$

& $QR = (a^7 - 21a^5b^2 + 35a^3b^4 - 7ab^6) : r^6$

Si itaque radius seu sinus totus $= r$, erit sinus anguli

simpli b

dupli $2ba : r$

tripli $(3ba^2 - b^3) : r^2$

quadrupli $(4ba^3 - 4b^3a) : r^3$

quintupli $(5ba^4 - 10b^3a^2 + b^5) : r^4$

sextupli $(6ba^5 - 20b^3a^3 + 6b^5a) : r^5$

septupli $(7ba^6 - 35b^3a^4 + 21b^5a^2 - b^7) : r^6$

&c.

Hinc patet lex progressionis in infinitum. Componitur nimirum formula pro sinu anguli multipli ex termino secundo, quarto, sexto, octavo &c. binomii ex cosinu a & sinu anguli simpli b compositi ad eam dignitatem evecti, cujus exponens idem est cum exponente multipli, signis + & — alternantibus (§. 95).

Hinc formula generalis in casu indefinito emergit

$$\frac{m}{1 . r^{m-1}} b a^{m-1} - \frac{m . m-1 . m-2}{1 . 2 . 3 . r^{m-1}} b^3 a^{m-3} + \frac{m . m-1 . m-2 . m-3 . m-4}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . r^{m-1}} b^5 a^{m-5} - \frac{m . m-1 . m-2 . m-3 . m-4 . m-5 . m-6}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . r^{m-1}} b^7 a^{m-7} \text{ \&c.}$$

Similiter si sinus totus $= r$, erit cosinus anguli

simpli a

dupli $(a^2 - b^2) : r$

tripli $(a^3 - 3ab^2) : r^2$

quadrupli $(a^4 - 6a^2b^2 + b^4) : r^3$

quintupli $(a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4) : r^4$

sextupli $(a^6 - 15a^4b^2 + 15a^2b^4 - b^6) : r^5$

septupli $(a^7 - 21a^5b^2 + 35a^3b^4 - 7ab^6) : r^6$

&c.

Unde denuo patet lex progressionis in infinitum. Nimirum formulæ componuntur ex terminis primo, tertio, quinto, septimo, nono &c. binomii ex cosinu a & sinu anguli simpli b compositi ad eam

eam dignitatem evecti, cujus exponens eſt idem cum exponente multipli anguli deſiderati, ſignis + & — alternantibus (§. 95). Erit ergo formula generalis in caſu indefinito

$$\frac{a^m}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1}{1.2.r^{m-1}}b^2a^{m-2}$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4.r^{m-1}}b^4a^{m-4}$$
$$- \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6.r^{m-1}}b^6a^{m-6} +$$
$$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6.m-7}{1.2.3.4.5.6.7.8.r^{m-1}}b^8a^{m-8}$$

&c. Quoniam $b^2 = r^2 - a^2$ (§. 16 *Trig.*) & ipſius b^2 potentiæ ſunt etiam rationales; ſubſtituto hoc valore, ſive in formula generali, ſive in ſpecialibus, prodit coſinus anguli multipli per ſolum coſinum ſimpli & radium determinatus. Ita reperietur coſinus anguli

dupli, $\frac{a^2-b^2}{r} = \frac{a^2-r^2+a^2}{r} = \frac{2a^2}{r} - r$

tripli, $\frac{a^3-3ar^2+3a^3}{r^2} = \frac{4a^3}{r^2} - 3a$

quadrup. $\frac{a^4-6a^2r^2+6a^4+r^4-2a^2r^2+a^4}{r^3}$

$$= \frac{8a^4}{r^3} - \frac{8a^2}{r} + r$$

quint. $\frac{a^5-10a^3r^2+10a^5+5ar^4-10a^3r^2+5a^4}{r^4}$

$$= \frac{16a^5}{r^4} - \frac{20a^3}{r^2} + 5a.$$

Similiter ex ſinuum formula excluditur coſinus, ſi valor ipſius $a = \surd(r^2-b^2)$ ſubſtituitur: quamvis ea non ſit ab irrationalitate libera.

COROLLARIUM

326. Cum ſinus ſit chordæ dimidium (§. 2 *Trigon.*), ſi chorda arcus ſimpli dicatur b, & chorda ejus complementi ad quadrantem a, & diameter r; per eaſdem formulas chordæ arcuum multiplorum determinantur. Quoniam vero data chorda datur etiam arcus; per eaſdem formulas arcus per datum numerum multiplicari poteſt.

PROBLEMA CLIII.

327. *Data tangente arcus ſimpli, invenire tangentem arcus multipli.*

Cum ſit ut coſinus $\frac{a^m}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1}{1.2.r^{m-1}}b^2a^{m-2}$ +&c. ad ſin. $\frac{m}{r^{m-1}}ba^{m-1} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.r^{m-1}}b^3a^{m-3}$ &c. ita radius r ad tangentem (§. 26 *Trigon.*); erit tangens (aſſumtis ad abbreviandum calculum pro coëfficientibus coſinuum A, B, C, D, E, pro coëfficientibus ſinuum P, Q, R, S, T, excluſo tamen in diviſoribus r^{m-1}) =

$$\frac{Prba^{m-1} - Qrb^3a^{m-3} + Rrb^5a^{m-5} - Srb^7a^{m-7}}{a^m - Ab^2a^{m-2} + Bb^4a^{m-4} - Cb^6a^{m-6}} \&c.$$

Sit tangens anguli ſimpli t, erit (§. *cit. Trigon.*) $a:b = r:t$, conſequenter $a = br:t$. Quodſi hic valor in locum ipſius a ſubſtituatur, prodit formula tangentis

$$\frac{\frac{Pb^mr^m}{t^{m-1}} - \frac{Qb^mr^{m-2}}{t^{m-3}} + \frac{Rb^mr^{m-4}}{t^{m-5}} - \frac{Sb^mr^{m-6}}{t^{m-7}}}{\frac{b^mr^m}{t^m} - \frac{Ab^mr^{m-2}}{t^{m-2}} + \frac{Bb^mr^{m-4}}{t^{m-4}} - \frac{Cb^mr^{m-6}}{t^{m-6}}} \&c.$$

Quodſi ulterius hæc formula dividatur per b^m & multiplicetur per t^m, prodibit tangens indefinita

$$\frac{Pr^mt - Qr^{m-2}t^3 + Rr^{m-4}t^5 - Sr^{m-6}t^7}{r^m - Ar^{m-2}t^2 + Br^{m-4}t^4 - Cr^{m-6}t^6} \&c.$$

Subſtitutis tandem valoribus P, Q, R, S & A, B, C, &c. tangentium formula erit

$$\Big(\frac{m}{1}r^mt - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}r^{m-2}t^3 +$$
$$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}r^{m-4}t^5 -$$
$$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6}{1.2.3.4.5.6.7}r^{m-6}t^7 \&c.\Big)$$

 :(r^m

$:\left(r^m - \frac{m.m-1}{1.2} r^{m-2} t^2 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3} r^{m-4} t^4 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6.} r^{m-6} t^6 \text{ \&c.}\right)$

Apparet adeo, si binomium ex radio & tangente $r + t$ ad dignitatem indeterminatam elevetur (§. 95), fractionis, quæ tangentem indefinitam exprimit, denominatorem componi ex terminis imparibus, numeratorem vero ex terminis paribus, sed per radium multiplicatis & utrobique signis + atque — alternantibus.

PROBLEMA CLIV.

328. *Data secante arcus simpli, invenire secantem multipli.*

Quoniam secans est tertia proportionalis ad cosinum & radium (§. 26 *Trigon.*), erit (§. 325) assumtis pro coëfficientibus cosinus (excluso tamen in divisoribus r^{m-1}) A, B, C, D &c. secans indeterminata.

$$\frac{r^{m+1}}{a^m - Ab^2a^{m-2} + Bb^4a^{m-4} - Cb^6a^{m-6} \text{ \&c.}}$$

Est vero $r : b = f : t$ (§. *cit. Trig.*): unde eruitur $r = bf : t$. Hoc valore in formula secantis substituto, mutatur ea in sequentem:

$$\frac{rb^m f^m}{a^m t^m - Ab^2 a^{m-2} t^m + Bb^4 a^{m-4} t^m \text{ \&c.}}$$

Porro $a : b = r : t$ (§. *cit. Trigon.*), adeoque $a = br : t$. Substituto itaque valore ipsius a in formula proxime præcedente; prodibit

$$\frac{rb^m f^m}{b^m r^m - Ab^m r^{m-2} t^2 + Bb^m r^{m-4} t^4 \text{ \&c.}}$$

Si tandem hæc formula dividatur per rb^m, determinabitur valor secantis indefinitæ ex tangente & secante anguli simpli

$$\frac{f^m}{r^{m-1} - Ar^{m-3}t^2 + Br^{m-5}t^4 - Cr^{m-7}t^6 \text{ \&c.}}$$

CAPUT V.

De Extractione Radicum ex Æquationibus altioribus.

PROBLEMA CLV.

329. *Explicare naturam æquationum.*

1. Assumantur tot valores quantitatis incognitæ, quot libuerit; formenturque inde simplices æquationes, sed nihilo æquales.
2. Æquationes simplices in se invicem ducantur; ita prodibunt æquationes altiores, quarum consideratio earum proprietates manifestabit.

Sit $x = 2$	$x = a$
$x = -3$	$x = -b$
$x = 4$	$x = c$
erit $x - 2 = 0$. I	$x - a = 0$
$x + 3 = 0$. II	$x + b = 0$
$x - 4 = 0$. III	$x - c = 0$

Multiplicetur primo æquatio I per æquationem II, & factum denuo per æquationem III.

$x-2$

$$\begin{array}{r} x - 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \\ \hline +3x - 6 \\ x^2 - 2x \\ \hline x^2 + x - 6 = 0 \\ x - 4 = 0 \\ \hline -4x^2 - 4x + 24 \\ x^3 + x^2 - 6x \\ \hline x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - a = 0 \\ x + b = 0 \\ \hline x^2 + bx - ab = 0 \\ - ax \\ x - c = 0 \\ \hline x^3 - cx^2 - bcx + abc = 0 \\ + bx^2 + acx \\ - ax^2 - abx \end{array}$$

Ad has æquationes attendens (quæ facile ad ſuperiores gradus evehi poſſunt) ſequentia obſervabit.

1. *Quantitatem cognitam ſecundi termini eſſe ſummam radicum, ſed ſigno contrario affectarum ; quantitatem cognitam tertii eſſe ſummam productorum ex ſingulis binis ; quantitatem cognitam quarti eſſe ſummam productorum ex ſingulis ternis &c terminum denique ultimum eſſe factum omnium radicum.* Ex gr. in æquatione quadratica termini ſecundi quantitas cognita $1 = 3 - 2$. Radices vero ſunt $+ 2$ & $- 3$. Similiter in cubica quantitas cognita ſecundi termini $- 3 = + 3 - 4 - 2$. Radices ſunt $- 3$, $+ 4$ & $+ 2$. Quantitas cognita termini tertii in æquatione cubica $- 10 = - 6 + 8 - 12$. Radices ſunt, $+ 2$, $- 3$ & $+ 4$. In eadem terminus ultimus $+ 24 = 2 . 3 . 4$.
2. *Quamlibet æquationem tot habere radices, quot quantitas incognita primi termini dimenſiones, ſeu exponens unitates.* Ex. gr. in æquatione quadratica x^2 duas habet dimenſiones : radices duæ ſunt $+ 2$ & $- 3$. In æquatione cubica x^3 tres habet dimenſiones, radices tres ſunt $+ 2$, $- 3$ & $+ 4$.
3. *In qualibet æquatione tot eſſe radices veras, quot ſunt ſignorum permutationes; tot eſſe falſas, quot eorundem ſucceſſiones.* Ex. gr. in æquatione quadratica $+ x^2 + x - 6 = 0$, una eſt ſignorum ſucceſſio $+ +$, una permutatio $+ -$. Æquatio vero habet radices duas, alteram veram $+ 2$, alteram falſam $- 3$. In æquatione cubica $+ x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ duæ ſunt ſignorum permutationes $+ -$ & $- +$; una ſucceſſio $- -$. Radices vero tres habet, duas quidem veras $+ 2$ & $+ 4$, unam falſam $- 3$.

SCHOLION I.

330. *Theoremata duo priora ex ipſa æquationum geneſi haud difficulter demonſtrantur : tertium vero, quod* HARRIOTUS *per inductionem invenit, nemo hactenus demonſtrare potuit.*

SCHOLION II.

331. *Ceterum non eſt, quod mi[illegible] unam æquationem multas habere poſſe radices. Unius enim ejuſdemque Problematis varii eſſe poſſunt caſus & in ſingulis caſibus ad eandem pervenitur æquationem : quemadmodum exempla in Quadraticis ſupra habuimus (§. 269, 262). Quoniam tamen caſus quidam interdum impoſſibiles ſunt ; radices quoque impoſſibiles eſſe debent.*

COROLLARIUM.

332. Radices veræ mutantur in falſas & falſæ in veras, ſi ſigna terminorum alternorum mutentur. E. gr. æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ duas habet radices veras, unam falſam; ſed ſi ſcribas $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$, duæ ſunt ſignorum ſucceſſiones $+ +$ & $- -$, una vero permutatio $+ -$; adeoque æquatio duas radices falſas, veram unam habet.

PROBLEMA CLVI.

333. *Radicem æquationis augere vel minuere quantitate data.*

Sit æquatio $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$. Invenienda eſt æquatio alia, in qua radix $x + 3$.

Fiat $x + 3 = y$

erit $x = y - 3$

$$x^2 = y^2 - 6y + 9$$

$$x^3 = y^3 - 9y^2 + 27y - 27$$
$$-6x^2 = -6y + 36y - 54$$
$$+13x = +13y - 39$$
$$-10 = -10$$

$$0 = y^3 - 15y^2 + 76y - 130$$

En æquationem novam, in qua $y = x + 3$!

Sit e contrario in æquatione modo inventa radix minuenda binario.

Fiat $y - 2 = x$

$y = x + 2$

$$y^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$y^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$
$$-15y^2 = -15x^2 - 60x - 60$$
$$+76y = +76x + 152$$
$$-130 = -130$$

$$0 = x^3 - 9x^2 + 28x - 30$$

En æquationem novam, in qua $x = y - 2$!

COROLLARIUM I.

334. Quodſi radicem augeas quantitate radice falſa maxima majore, radices falſæ evadunt veræ; & contra ſi radicem minuas quantitate radice vera maxima majore, veræ evadunt falſæ. Si enim $y = -4$, & fiat $y + 5 = x$; erit $x = 5 - 4 = 1$. Contra ſi $y = 3$ & fiat $y - 4 = x$; erit $3 - 4 = -1 = x$. Dum itaque radicem minuimus quantitate quadam data, facile accidit ut radices veræ in falſas mutentur.

COROLLARIUM II.

335. Dum radices veræ augentur, falſæ minuuntur. Nam ſi $y = 3$ & $= -5$, fiatque $y + 4 = x$; erit $x = 3 + 4 = 7$ & $= 4 - 5 = -1$. Similiter ſi fiat $y - 2 = x$; erit $x = 3 - 2 = 1$ & $= -5 - 2 = -7$.

PROBLEMA CLVII.

336. *Radicem æquationis per quantitatem datam multiplicare.*

Sit ex. gr. radix æquationis $x^3 + px^2 + qx - r = 0$ multiplicanda per a.

Fiat $ax = y$

erit $x = y : a$

$$x^2 = y^2 : a^2$$

$$x^3 = y^3 : a^3$$
$$+px^2 = +py^2 : a^2$$
$$+qx = +qy : a$$
$$-r = -r$$

$$\frac{y^3}{a^3} + \frac{py^2}{a^2} + \frac{qy}{a}\ r = 0$$

$$y^3 + apy^2 + a^2qy - a^3r = 0$$

En æquationem novam, in qua $y = ax$!

COROLLARIUM I.

337. Hinc manifeſtum eſt, æquationem datam tantum multiplicari debere per progreſſionem geometricam, in qua terminus primus 1, denominator rationis quantitas per quam radix multiplicari jubetur. Sit ex. gr. in æquatione $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ radix multiplicanda per 2. Ita ergo procedendum.

$x^4 + 4x^3$	$-19x^2$	$-106x$	$-120 = 0$	
1	2	4	8	16

$$y^4 + 8y^3 - 76y^2 - 848y - 1920 = 0$$

En

En æquationem, in qua $y = 2x$!

Similiter sit radix æquationis $x^3 - 3x + 1 = 0$ multiplicanda per 3.

$$x^3 * - 3x + 1 = 0$$
$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$$
$$y^3 * - 27y + 27 = 0$$

En æquationem, in qua $y = 3x$!

SCHOLION.

338. *Stellula repleri solent loca vacua, in quibus termini æquationis deficiunt.*

PROBLEMA CLVIII.

339. *Radicem æquationis per quantitatem datam dividere.*

Sit æquationis $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ radix dividenda per a.

Fiat $x : a = y$

erit $x = ay$

$$x^2 = a^2y^2$$
$$x^3 = a^3y^3$$
$$-px^2 = -a^2py^2$$
$$+qx = +aqy$$
$$-r = -r$$
$$a^3y^3 - a^2py^2 + aqy - r = 0$$
$$y^3 - \frac{py^2}{a} + \frac{qy}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0$$

En æquationem novam, in qua $y = x : a$!

COROLLARIUM.

340. Apparet adeo, non alia re opus esse, quam ut æquatio data dividatur per progressionem geometricam, cujus terminus primus 1, denominator rationis quantitas, per quam radix dividenda. Sit ex.gr. radix æquationis $x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$ dividenda per 2. Ita igitur procedendum:

$$x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$$
$$y^4 + 4y^3 - 19y^2 - 106y - 120 = 0$$

In hac æquatione $y = \frac{1}{2}x$.

Similiter si radix æquationis $x^3 * - 36x - 54 = 0$ dividatur per 3; erit

$$x^3 * - 36x - 54 = 0$$
$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$$
$$y^3 * - 4y - 2 = 0$$

In hac æquatione $y = \frac{1}{3}x$.

PROBLEMA CLIX.

341. *Complere æquationem, in qua termini quidam deficiunt.*

Radix æquationis augenda est quantitate data.

Sit e.gr. æquatio $x^3 * - 23x - 70 = 0$.

Fiat $x + 1 = y$

erit $x = y - 1$

$$x^2 = y^2 - 2y + 1$$
$$x^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1$$
$$-23x = \quad -23y + 23$$
$$-70 = \quad -70$$
$$y^3 - 3y^2 - 20y - 48 = 0.$$

Habetur hic æquatio completa, in qua $y = x + 1$.

SCHOLION.

342. *Idem Problema solvi potest radicem æquationis quantitate data minuendo: sed cum hac ratione metuendum sit, ne radices veræ in falsas mutentur (§. 334) consultius est, ut radicem æquationis augeamus.*

PROBLEMA CLX.

343. *Secundum terminum ex æquatione tollere.*

Sit in æquatione $x^3 \mp px^2 - qx + r = 0$ tollendus secundus terminus px^2.

Fiat

Fiat $\underline{x + t = y}$

erit $x = y - t$

$$\underline{x^2 = y^2 - 2ty + t^2}$$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 3ty^2 + 3t^2y - t^3 \\ \mp px^2 &= \mp py^2 \pm 2pty \mp pt^2 \\ -qx &= \quad -qy + qt \\ +r &= \quad +r \end{aligned}$$

Ut secundus terminus tollatur, si fuerit $-px^2$ fieri debet,

$$\underline{-3t - p = 0}$$

Unde erit $\underline{-3t = p} \; 3$

$$t = -\tfrac{1}{3}p$$

Quodsi fuerit $+px^2$, erit

$$\underline{-3t + p = 0}$$

$$\underline{-3t = -p} \; 3$$

$$t = +\tfrac{1}{3}p$$

Et in genere, si fuerit $x^m \mp px^{m-1}$ &c. & fiat $x = y - t$, erit

$$x^m = y^m - mty^{m-1} \text{ \&c.}$$
$$\mp px^{m-1} = \mp py^{m-1} \text{ \&c.}$$

consequenter in casu primo

$$\underline{-mt - p = 0}$$

$$\underline{-mt = p}$$

$$t = -p : m$$

in casu autem altero

$$\underline{-mt + p = 0}$$

$$\underline{-mt = -p}$$

$$t = p : m$$

Unde patet

Regula: Si terminus secundus sit positivus, augeatur; si privativus, minuatur radix quantitate cognita secundi termini per exponentem primi divisa.

Sit ex. gr. ex æquatione $x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0$ tollendus secundus terminus.

Fiat $\underline{x - 8 : 3 = y}$

erit $x = y + 8 : 3$

$$\underline{x^2 = y^2 + 16y : 3 + 64 : 9}$$

$$\begin{aligned} x &= y^3 + 8y^2 + 64y : 3 + 512 : 27 \\ -8x^2 &= -8y^2 - 128y : 3 - 512 : 9 \\ -x &= \quad -y - 8 : 3 \\ 8 &= \quad +8 \end{aligned}$$

$$y^3 * -67y : 3 - 880 : 27 = 0$$

In hac æquatione $y = x - 8 : 3$.

Corollarium I.

344. Quodsi ex æquatione quadratica affecta secundus terminus aufertur, ad puram reducitur, sicque ea alio adhuc modo resolvi potest. Si ex. gr. $x^2 - 8x + 15 = 0$,

Fiat $\underline{x - 4 = y}$

erit $\underline{x = y + 4}$

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 + 8y + 16 \\ -8x &= -8y - 32 \\ +15 &= \quad +15 \end{aligned}$$

$$\underline{y^2 - 1 = 0}$$

$$y = 1$$

Consequenter $x = 1 + 4 = 5$.

Corollarium II.

345. Secundo termino sublato, æquationes cubicæ ad tres casus reducuntur. Nimirum

$$x^3 * - px - r = 0$$
$$x^3 * + px - r = 0$$
$$x^3 * - px + r = 0$$

Pro-

PROBLEMA CLXI.

346. *Ex æquatione terminum tertium tollere.*

Si in æquatione $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$

Fiat $x = y - m$

erit $x^2 = y^2 - 2my + m^2$

$x^3 = y^3 - 3my^2 + 3m^2y - m^3$

$-4x^2 = -4y^2 + 8my - 4m^2$

$+4x = + 4y - 4m$

$-6 = -6$

Quoniam æquatio ſiniſtra dextræ æqualis; ſi tertius terminus deficere debet, talis aſſumendus eſt valor ipſius m, ut ſit

$$3m^2 + 8m + 4 = 0$$

erit ergo $m^2 + \frac{8}{3}m = -\frac{4}{3}$

$\frac{16}{9} \quad \frac{16}{9}$

$m^2 + \frac{8}{3}m + \frac{16}{9} = \frac{4}{9}$

$m + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

$m = -\frac{2}{3}$

Fiat ergo $x = y + \frac{2}{3}$

erit $x^2 = y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}$

$x^3 = y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27}$

$-4x^2 = -4y^2 - \frac{16}{3}y - \frac{16}{9}$

$+ 4x = + 4y + \frac{8}{3}$

$-6 = -6$

$y^3 - 2y^2 * - 130 : 27 = 0.$

En æquationem, in qua terminus tertius deficit, & $y = x - \frac{2}{3}$.

SCHOLION.

347. *Eodem artificio in aliis quoque caſibus utemur. Sed terminus quartus, quintus &c. hac methodo tolli nequeunt, quia radices altiores extrahendæ forent.*

PROBLEMA CLXII.

348. *Ex æquatione terminum penultimum tollere, ſi ſecundus deficiat.*

Pro quantitate incognita ſubſtituendus eſt terminus ultimus per y diviſus.

Sit ex. gr. in æquatione $x^3 - 3x + 1 = 0$ tollendus terminus penultimus $- 3x$. Operatio talis erit

$x^3 = \frac{1}{y^3}$

$- 3x = - \frac{3}{y}$

$+ 1 = + 1$

$1 - \frac{3}{y} + \frac{1}{y^3} = 0$

$y^3 - 3y^2 + 1 = 0$

PROBLEMA CLXIII.

349. *Æquationem datam a fractionibus liberare.*

Radix multiplicetur per factum ex omnibus denominatoribus fractionum occurrentium, aut per numerum, qui omnes denominatores metitur.

Exempla.

$y^3 * - \frac{67}{3}y - \frac{880}{27} = 0$

$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$

$x^3 * - 201x - 880 = 0$

In hac æquatione $x = 3y$.

$x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x - 64 = 0$

$1 \quad 12 \quad 144 \quad 1728$

$y^3 - 8y^2 + 108y - 110592 = 0$

In hac æquatione $y = 12x$.

PROBLEMA CLXIV.

350. *Æquationem datam ab irrationalitate liberare.*

Interdum id fieri poteſt per multiplicationem: interdum per diviſionem radicis. Neutra tamen regula univerſalis eſt.

Si radix fuerit quadrata, quæ tolli debet, radix æquationis multiplicatur per ipſam; ſi vero cubica aut altior quædam, per radicem cubicam ex quadrato quantitatis ſub ſigno radicali tollendæ poſitæ, aut in genere per radicem ejuſdem gradus, quæ tolli debet, ſed ex quantitate ſub ſigno radicali tollendæ poſita ad gradum proxime inferiorem elevata. Interdum circumſtantiæ ſingulares aliud ſuadent.

Exempla.

$$x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2$$
$$1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{8} \quad 4$$
$$y^4 + 4ay^3 + 16aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0.$$

In hac æquatione $y = a\sqrt{2}$.

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - aab = 0$$
$$1 \quad \sqrt[3]{4} \quad \sqrt[3]{16} \quad 4$$
$$y^3 - 2ay^2 + 8aby - 4aab = 0$$

In hac æquatione $y = x\sqrt[3]{4}$

Diviſio exemplis rectius, quam regulis docetur.

$$x^3 - 3x^2\sqrt{3} \; * \; - 6\sqrt{3} = 0$$
$$1. \quad \sqrt{3}. \quad 3. \quad 3\sqrt{3}$$
$$y^3 - 3y^2 \; * \; - 2 = 0$$

In hac æquatione $y = x : \sqrt{3}$

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$$
$$1 \quad \sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{4} \quad 2$$
$$y^3 - ay^2 + 2aby - \tfrac{1}{2}a^2b = 0$$

In hac æquatione $y = x : \sqrt[3]{2}$.

$$x^3 - x^2\sqrt{2} + 3\tfrac{1}{2}x - 3\sqrt{2} = 0$$
$$1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad 2\sqrt{2}$$
$$y^3 - y^2 + \tfrac{7}{4}y - \tfrac{3}{2} = 0$$

Quodſi ulterius fractiones tollere volueris; multiplicatio fieri debet per 2.

$$y^3 - y^2 + \tfrac{7}{4}y - \tfrac{3}{2} = 0$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8$$
$$z^3 - 2z^2 + 7z - 12 = 0$$

In hac æquatione $z = 2y = 2x : \sqrt{2}$.

PROBLEMA CLXV.

351. *Invenire utrum æquatio data habeat radices rationales, nec ne; & ſi quas habet, quænam eæ ſint.*

Cum æquationis terminus ultimus ſit factum omnium radicum (§. 329), reſolvatur is in ſuos factores, & hi ſucceſſive ſubſtituantur pro x in æquatione data: in quibus enim caſibus numeri poſitivi & negativi ſe mutuo deſtruunt, in iis factor ſubſtitutus eſt valor ipſius x.

Sit ex. gr. $x^2 - 6x + 8 = 0$. Terminus ultimus 8 factores habet 2 & 4. Ponatur $x = 2$; erit

$$x^2 = 4$$
$$-6x = -12$$
$$+8 = +8$$
$$0 = 0$$

Eſt ergo 2 radix vera æquationis. Fiat quoque $4 = x$; erit

$$x^2 = 16$$
$$-6x = -24$$
$$+8 = +8$$
$$0 = 0$$

Eſt ergo 4 radix altera vera æquationis.

Sit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$. Factores termini ultimi 15 ſunt 1, 3, 5.

Subſtituatur 1 pro x; erit

$$x^3 = 1$$
$$-3x^2 = -3$$
$$-13x = -13$$
$$+15 = +15$$
$$0 = 0$$

Eſt

Eſt ergo 1 una ex radicibus veris. Subſtituatur porro 3 pro x; erit

$$x^3 = 27$$
$$-3x^2 = -27$$
$$-13x = -39$$
$$+15 = +15$$
$$0 = -24$$

Eſt ergo 3 nulla ex radicibus veris. Subſtituatur ergo -3 pro x.

$$x^3 = -27$$
$$-3x^2 = -27$$
$$-13x = +39$$
$$+15 = +15$$
$$0 = 0$$

Eſt itaque -3 radix falſa æquationis. Subſtituatur denique 5 pro x; erit

$$x^3 = 125$$
$$-3x^2 = -75$$
$$-13x = -65$$
$$+15 = +15$$
$$0 = 0$$

Eſt ergo 5 radicum verarum altera.

Aliter.

Cum æquationes compoſitæ ex multiplicatione ſimplicium oriantur (§. 329); ſi radix aliqua fuerit rationalis, æquatio per ſimplicem ex aliquo factore termini ultimi & x conflatam diviſibilis ſit neceſſe eſt. Quare diviſio hæc tentanda.

Sit data æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Factores termini ultimi ſunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12: unde æquationes ſimplices conflantur $x-1=0$, $x+1=0$; $x-2=0$, $x+2=0$; $x-3=0$, $x+3=0$; $x-4=0$, $x+4=0$; $x-6=0$, $x+6=0$; $x-8=0$, $x+8=0$; $x-12=0$, $x+12=0$. Diviſio fruſtra tentatur per $x-1$ & $x+1$. Quare 1 nec radix falſa eſt, nec verarum una: ſuccedit autem diviſio per $x-2$.

$$x-2)\ x^3 - 3x^2 - 10x + 24\ (x^2 - x - 12$$
$$x^3 - 2x^2$$
$$-x^2 - 10x$$
$$-x^2 + 2x$$
$$-12x + 24$$
$$-12x + 24$$
$$0$$

Eſt adeo 2 una ex radicibus veris, cumque terminus ultimus ſit 12 in quotiente, 8 & 12 non ſunt in numero radicum. Diviſio æquationis quadraticæ $x^2 - x - 12 = 0$ per $x-3$ fruſtra tentatur; ſed per $x+3$ ſuccedit.

$$x+3)\ x^2 - x - 12\ (x - 4$$
$$x^2 + 3x$$
$$-4x - 12$$
$$-4x - 12$$
$$0$$

Eſt ergo 3 radix falſa æquationis & ob $x-4=0$, 4 verarum altera.

Similiter ſit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$: erunt factores termini ultimi 1, 3, 5; conſequenter diviſores tentandi $x-1=0$, $x+1=0$; $x-3=0$, $x+3=0$; $x-5=0$, $x+5=0$. Tentetur diviſio per

$$x-1)\ x^3 - 3x^2 - 13x + 15\ (x^2 - 2x - 15$$
$$x^3 - x^2$$
$$-2x^2 - 13x$$
$$-2x^2 + 2x$$
$$-15x + 15$$
$$-15x + 15$$
$$0$$

Eſt ergo 1 radicum verarum una. Diviſio in æquatione quadratica per $x-3$ non ſuccedit: ſuccedit tamen per $x+3$.

$$x+3)\ \begin{array}{l} x^2 - 2x - 15\ (x-5 \\ x^2 + 3x \\ \hline -5x - 15 \\ -5x - 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

Eſt itaque 3 radix falſa, & ob $x-5 = 0$, 5 verarum altera.

COROLLARIUM.

352. Ex modo allatis exemplis manifeſtum eſt, Problema præſens hanc quoque admittere ſolutionem:

1. Numerus, quem radicem eſſe ſuſpicamur, ſubducendus eſt ex coëfficiente ſecundi termini.
2. Reſiduum multiplicandum eſt per illum ipſum numerum, & factum ex coëfficiente termini tertii ſubtrahendum.
3. Quod relinquitur, denuo per illum numerum multiplicetur; factum ex coëfficiente termini quarti ſubtrahatur, & ita porro.

$$\begin{array}{lllll} & x^3 & -3x^2 & -10x & +24=0 \\ 2) & & -2 & +2 & +24 \\ \hline & & -1 & -12 & 0 \\ -2 & & & & \\ \hline & & +2 & +24 & \end{array}$$

Quoniam o relinquitur, 2 eſt una radicum verarum.

$$\begin{array}{lllll} & x^3 & -3x^2 & -13x & +15=0 \\ & & -1 & +2 & +15 \\ \hline & & -2 & -15 & 0 \\ -1 & & & & \\ \hline & & +2 & +15 & \end{array}$$

Eſt ergo 1 altera radicum verarum.

SCHOLION.

353. *Ne radicum rationalium inveſtigatio moleſta accidat, conſultum eſt, ut vel æquationem propoſitam in aliam transformemus, in qua terminus ultimus diviſores pauciores habet, vel duos numeros inveſtigemus, intra quos radices continentur: quem in finem ſequentia ſubnectimus Problemata.*

PROBLEMA CLXVI.

354. *Æquationem propoſitam, in qua terminus ultimus plures admittit diviſores, transformare in aliam, in qua terminus ultimus pauciores diviſores habet.*

Fiat $x=1$, vel $x=-1$; vel $x=2$, vel $x=-2$; vel $x=3$, vel $x=-3$; vel $x=4$, vel $x=-4$ &c. &, his valoribus ſucceſſive ſubſtitutis, obſervetur, quo in caſu ſumma relinquat numerum pauciores factores habentem, quam terminus ultimus æquationis: eo enim numero radix æquationis vel augenda eſt, vel minuenda (§. 333).

Sit ex. gr. $x^3 - 3x^2 - 10x^2 + 24 = 0$

$$\begin{array}{rcl} \text{Fiat } x & = & 1 \\ \hline \text{erit } x^3 & = & 1 \\ -3x^2 & = & -3 \\ -10x & = & -10 \\ +24 & = & +24 \\ \hline \text{Summa} & = & +12 \end{array}$$

Cum 12 pauciores diviſores admittat quam 24;

$$\begin{array}{l} \text{Fiat } x = y + 1 \\ \text{erit } x^2 = y^2 + 2y + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ -3x^2 & = & \quad -3y^2 - 6y - 3 \\ -10x & = & \qquad -10y - 10 \\ +24 & = & \qquad\qquad +24 \\ \hline & & y^3 \quad * \quad -13y + 22 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione eſt $y = x - 1$.

SCHO-

SCHOLION.

355. *Eadem æquatio* $y^3 * -13y + 13 = 0$ *habet radicem falsam* -4. *Si enim hunc valorem pro* y *substituas, prodibit* $-64 + 52 + 12 = 0$. *Ergo* $x = y + 1 = -3$. *Reperitur adeo* -3 *radix falsa æquationis propositæ* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$; *prorsus ut supra* (*§.* 351).

PROBLEMA CLXVII.

356. *Invenire limites æquationis, hoc est, duas quantitates, intra quas radix continetur.*

Sit $x^2 + px - q = 0$

erit $x^2 + px = q$

$px < q$ (§. 84 *Arithm.*).

$x < q : p$ (§. 182 *Arithm.*).

Similiter ob $x^2 + px = q$

$q > x^2$ (§. 84 *Arithm.*).

$\sqrt{q} > x$ (§. 246, 180 *Arith.*)

$x\sqrt{q} > x^2$ (*§.* 180 *Arithm.*).

$px \quad px$ add.

$x\sqrt{q} + px > x^2 + px$ (§. 90 *Arithm.*)

adeoque $(\sqrt{q} + p)\,x > q$ (§. 89 *Arith.*)

$x > q : (\sqrt{q} + p)$ (*§.* 182 *Arithm.*).

Sunt adeo limites æquationis $q : p$ & $q : (\sqrt{q} + p)$. Nempe radix minor esse debet quam $q : p$ & major quam $q : (\sqrt{q} + p)$.

Sit $x^2 - px + q = 0$

erit $x^2 + q = px$

$x^2 < px$

$x < p$

Similiter quia $x^2 = px - q$, adeoque differentia inter px & q positiva, erit

$px > q$

$x > q : p$

Sunt adeo limites æquationis p & $q : p$. Nempe radix minor est quam p & major quam $q : p$.

Sit $x^2 - px - q = 0$

erit $x^2 = px + q$

$x^2 > q$

$x > \sqrt{q}$

$x\sqrt{q} > q$

Ergo $px + x\sqrt{q} > px + q$

hoc est, $px + q < px + x\sqrt{q}$

adeoque $x^2 < px + x\sqrt{q}$

$x < p + \sqrt{q}$

Similiter $x^2 > px$

$x > p$

$px > p^2$

$px + q > p^2 + q$

$x^2 > p^2 + q$

$x > \sqrt{(p^2 + q)}$

Sunt adeo limites $p + \sqrt{q}$ & $\sqrt{(p^2 + q)}$. Nimirum radix minor esse debet quam $p + \sqrt{q}$; sed major quam $\sqrt{(p^2 + q)}$.

Sit $x^3 - qx + r = 0$

erit $x^3 + r = qx$

Ergo $qx > r$

$x > r : q$

Similiter $x^3 < qx$

$x^2 < q$

$x < \sqrt{q}$

Sunt adeo limites $r : q$ & $\sqrt{q}$.

Sit $x^3 + qx - r = 0$

erit $x^3+qx=r$

$qx < r$

$x < r:q$

Similiter $r > x^3$

$r^{1:3} > x$

$r^{2:3} > x^2$

$xr^{2:3} > x^3$

$xr^{2:3}+qx > x^3+qx$

$> r$

$x > r:(r^{2:3}+q)$

Sunt adeo limites $r:q$, & $r:(r^{2:3}+q)$,

Sit $x^3-px^2+qx-r=0$

erit $x^3-px^2=r-qx$

Quodsi ergo $x > p$, erit quoque $r > qx$, consequenter $x < r:q$. Sed si $p > x$; erit $qx > r$, consequenter $x > r:q$.

In utroque igitur casu limites sunt p & $r:q$.

Sit $x^3-px^2-qx+r=0$

erit $x^3+r=px^2+qx$

$px^2+qx > r$

$x^2+qx:p > r:p$

$x^2+qx:p+q^2:4p^2 > r:p+q^2:4p^2$

$x^2+q:2p > \sqrt{(r:p+q^2:4p^2)}$

$x > \sqrt{(r:p+q^2:4p^2)}-q:2p$

Similiter $px^2+qx > x^3$

$px+q > x^2$

$q > x^2-px$

$q+\frac{1}{4}p^2 > x^2-px+\frac{1}{4}p^2$

$\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)} > x-\frac{1}{2}p$

$x < \sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}+\frac{1}{2}p$

Sunt adeo limites $\sqrt{(r:p+q^2:4p^2)}-q:2p$ & $\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}+\frac{1}{2}p$.

Sit $x^4-qx^2-rx-s=0$

erit $x^4-qx^2=rx+s$

Ergo $x^4 > qx^2$

$x^2 > q$

$x > \sqrt{q}$

Similiter $x^4-rx=qx^2+s$

ergo $x^3 > r$

$x > r^{1:3}$

Tandem $x^4-s=qx^2+rx$

Ergo $x^4 > s$

$x > s^{1:4}$

$x^3 > s^{3:4}$

$x^3 s^{1:4} > s$

Similiter $x > q^{1:2}$ $\quad$ $x > r^{1:3}$

$xq^{1:2} > q$ $\quad$ $x^2 > r^{2:3}$

$x^3 q^{1:2} > qx^2$ $\quad$ $x^2 r^{1:3} > r$

$x^3 r^{1:3} > rx$

Ergo ob $x^4=qx^2+rx+s$

$x^4 < x^3 q^{1:2}+x^3 r^{1:3}+x^3 s^{1:4}$

$x < q^{1:2}+r^{1:3}+s^{1:4}$

Sunt adeo limites $\sqrt{q}$ vel $r^{1:3}$ vel $s^{1:4}$, & $q^{1:2}+r^{1:3}+s^{1:4}$.

Eodem modo operandum est in casibus aliis.

SCHOLION.

357. *In aequatione* $x^3-3x^2-10x+24=0$ *factores termini ultimi sunt* 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. *Limites reperiuntur* $\sqrt{(\frac{24}{3}+\frac{25}{9})}-\frac{5}{3}=\sqrt{\frac{97}{9}}-\frac{5}{3}=\frac{98-50}{30}=\frac{48}{30}=1\frac{3}{5}$ *fere, &* $\sqrt{(10+\frac{9}{4})}+\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{49}{4}}+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=\frac{10}{2}=5$. *Maxima igitur radicum non potest esse minor quam* $1\frac{3}{5}$ *debet tamen esse minor quam* 5. *Unde apparet divisionem tentandam esse per* $x-2$.

Quo

Quo facto reperitur $x = 2$ *& æquatio reducitur ad quadraticam* $x^2 - x - 12 = 0$ (§. 351). *Unde radix vera altera* $= \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$, *& falsa* $\frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{6}{2} = -3$ (§. 143).

PROBLEMA CLXVIII.

358. *Ex æquatione cubica radicem extrahere.*

Æquationes cubicæ, sublato secundo termino, ad hos tres casus reducuntur (§. 345).

$$x^3 = +px + q$$
$$x^3 = -px + q$$
$$x^3 = +px - q$$

Fiat $x = y + z$

erit $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3$
$px = py + pz$

Quamobrem in casu primo
$y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3 = py + pz + q$

Fiat $3y^2z + 3z^2y = +py + pz$ $(y+z)$

erit $3yz = p$ $3y$

$z = p : 3y$

Erit porro $y^3 + z^3 = q$
hoc est $y^3 + p^3 : 27y^3 = q^3$

$$y^6 + \tfrac{1}{27}p^3 = qy^3$$
$$y^6 - qy^3 = -\tfrac{1}{27}p^3$$
$$\tfrac{1}{4}q^2 \qquad \tfrac{1}{4}q^2$$
$$y^6 - qy^3 + \tfrac{1}{4}q^2 = \tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3$$
$$\left.\begin{matrix} y^3 - \tfrac{1}{2}q \\ \tfrac{1}{2}q - y^3 \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}$$
$$y^3 = \tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}$$
$$y = (\tfrac{1}{2}q \pm)\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}))^{1:3}$$

Est nempe $y = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$ & $z = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$.

Ergo $y + z = x =$
$\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$.

Eodem modo reperitur radix in casu altero $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}$.

Denique in casu tertio $x =$
$\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$.

Ex.gr. Sit $x^3 = 6x + 40$: erit $p = 6$, $q = 40$, adeoque $\frac{1}{2}q = 20$, $\frac{1}{4}q^2 = 400$, $\frac{1}{3}p = 2$, $\frac{1}{27}p^3 = 8$; consequenter $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3 = 392$ & $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)} = \sqrt{392} = \sqrt{2.196} = 14\sqrt{2}$. Unde $\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)} = 20 \pm 14\sqrt{2}$, adeoque $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} = 2 \pm \sqrt{2}$. Quare per regulam primam $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

Sit $x^3 = -3x + 36$. Quia $p = 3$, $q = 36$, adeoque $\frac{1}{2}q = 18$, $\frac{1}{4}q^2 = 324$, $\frac{1}{3}p = 1$, $\frac{1}{27}p^3 = 1$, consequenter $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ [illegible] $= \frac{1300}{4}$ & $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = 10\sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{40}{4}\sqrt{3\frac{1}{4}}$. Unde $\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = 18 \pm \frac{40}{4}\sqrt{3\frac{1}{4}}$, adeoque $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{3\frac{1}{4}}$. Quare per regulam secundam $x = \frac{3}{2} + \sqrt{3\frac{1}{4}} + \frac{3}{2} - \sqrt{3\frac{1}{4}} = 3$.

Sit $x^3 = 6x - 40$. Quoniam $p = 6$, $q = 40$, eodem modo, quo in casu primo, reperitur $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} = -2 \pm \sqrt{2}$, adeoque $x = -2 + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} = -4$.

SCHOLION.

359. *Equidem ex* $20 \pm \sqrt{392}$ *radix cubica extrahitur per regulas communes* (§. 282 Arithm.) *: ut tamen appareat quomodo radix inveniri possit, si regulæ communes com-*

commode applicari nequeant, methodum generalem apponere libet, qua & in aliis casibus similibus utendum. Ceterum formulas illas extrahendi radicem ex æquatione cubica (§. 358) CARDANI *regulas vocat* CARTESIUS (*a*), *quia eas primus publicavit: ipse enim* CARDANUS *inventionis laudem* Scipioni FERREO *tribuit.*

PROBLEMA CLXIX.

360. *Extrahere radicem desideratam ex quantitate irrationali composita.*

Sit ex binomio $3+\sqrt{8}$ extrahenda radix quadrata. Ponamus eam esse $x+\sqrt{y}$, erit $x^2+2x\sqrt{y}+y=3+\sqrt{8}$.

Fiat $x^2+y=3$ $\qquad$ $2x\sqrt{y}=\sqrt{8}$

erit $x^4+2x^2y+y^2=9$ $\qquad$ $4x^2y=8$

$4x^2y=8$

$x^4-2x^2y+y^2=1$

Ext. Rad.

$x^2-y=1$

$x^2=y+1$

Est vero etiam, ob $x^2+y=3$, $x^2=3-y$

Quare $3-y=y+1$

$3=2y+1$

$2=2y$

$1=y$

Ergo $x^2=y+1=2$

$x=\sqrt{2}$

Est ergo $x+\sqrt{y}=\sqrt{(3+\sqrt{8})}=1+\sqrt{2}$.

Sit similiter in Problemate præcedente ex $20+\sqrt{392}$ extrahenda radix cubica. Ponamus radicem esse $x+\sqrt{y}$, erit ejus cubus

$x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+\sqrt{y^3}=20+\sqrt{392}$

Fiat $3x^2\sqrt{y}+\sqrt{y^3}=\sqrt{392}$

erit $9x^4y+6x^2y^2+y^3=392$

Porro $x^3+3xy=20$

$x^6+6x^4y+9x^2y^2=400$

$9x^4y+6x^2y^2+y^3=392$ subt.

$x^6-3x^4y+3x^2y^2-y^3=8$

Ext. Rad.

$x^2-y=2$

$x^2-2=y$

Substituto valore ipsius y in æquatione:

$x^3+3xy=20$

erit $x^3+3x^3-6x=20$

hoc est $4x^3-6x=20$

$x^3 * -\frac{6}{4}x=5$

1 $\quad$ 2 $\quad$ 4 $\quad$ 8 (§. 337).

$z^3 * -6z=40$

Si pro z substituatur 4; erit $64-24=40$. Est ergo 4 radix hujus æquationis (§. 351); consequenter $x=z:2=2$. Quare cum sit

$x^2-2=y$

erit $4-2=y$

$2=y$

Est ergo radix cubica ex $20+\sqrt{392}$ extracta $2+\sqrt{2}$.

Eodem modo operandum est in casibus aliis.

PROBLEMA CLXX.

361. *Æquationem biquadraticam, in qua secundus terminus deficit, reducere ad cubicam.*

Sit æquatio biquadratica $x^4+qx^2+rx+f=0$, ubi retinetur in omnibus terminis signum +, ut omnes casus repræ-

(*a*) *Geom.* Lib. II. p. m. 93, & 94.

repræſententur. Cum æquatio biquadratica ex multiplicatione duarum quadraticarum oriatur (§. 329); aſſumantur duæ quadraticæ $x^2 + yx + z = 0$ & $x^2 - yx + v = 0$, quæ in ſe invicem ductæ generabunt

$$\begin{aligned} x^4 * + zx^2 + yvx + vz = 0 \\ + vx^2 - yzx \\ - y^2x^2 \end{aligned}$$

Quoniam hæc æquatio eadem ſupponitur cum propoſita; erit

$$\begin{array}{ll} z+v-y^2=q & yv-yz=r \quad vz=f \\ q+y^2=z+v & v-z=r:y \\ q+y^2-v=z & v-q-y^2+v=r:y \\ & 2v=q+y^2+r:y \\ & v=(q+y^2+r:y):2 \end{array}$$

Subſtituatur valor ipſius v in æquatione $q+y^2-v=z$, erit

$$q+y^2-(q+y^2+r:y):2=z$$

hoc eſt $z=(2q+2y^2-q-y^2-r:y):2$
$=(q+y^2-r:y):2.$

Ergo $vz = \frac{(q+y^2+r:y)}{2}\frac{(q+y^2-r:y)}{2}$

$$= \frac{q^2+2qy^2+y^4-r^2:y^2}{4} = f$$

$$\begin{array}{r} \overline{} 4y^2 \\ q^2y^2+2qy^4+y^6-r^2=4fy^2 \\ y^6+2qy^4+q^2y^2-r^2=0 \\ -4fy^2 \end{array}$$

Fiat $y^2=t$, erit

$$\begin{aligned} t^3+2qt^2+q^2t-r^2=0. \\ -4ft \end{aligned}$$

Problema CLXXI.

362. *Ex æquatione biquadratica radicem extrahere.*

I. Si æquatio fuerit pura, ex. gr. $x^4 = a^2bc$: extrahatur primum radix quadrata, ut habeatur $x^2 = a\sqrt{bc}$; & hinc denuo educatur radix quadrata: reperietur $x = \sqrt{(a\sqrt{bc})}$

E. gr. Sit $x^4 = 32$; erit $x^2 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, adeoque $x = 2\sqrt{\sqrt{2}}$.

II. Si æquatio fuerit affecta,

1. Tollatur ſecundus terminus, ſi adfuerit (§. 343).
2. Reducatur æquatio ad cubicam (§. 361).
3. Inde extrahatur radix cubica (§. 358).
4. Hac data, ex æquationibus quarum ope biquadraticam ad cubicam reduximus, radices æquationis propoſitæ erui poſſunt.

Ex. gr. Sit $x^4 - 86x^2 + 600x - 851 = 0$; erit $q = -86$, $r = 600$, $f = -851$. Jam cum æquatio cubica, ad quam est reducenda, ſit $t^3 + 2qt^2 + q^2t - r^2 = 0$:
$-4ft$
ſi in ea ſubſtituantur valores quantitatum q, r, f, prodibit

$$t^3 - 172t^2 + 10800t - 360000 = 0$$

Hæc æquatio cum ſit per $t - 100$ diviſibilis (§. 351); erit $t = 100$, adeoque in Problemate præcedente $y^2 = 100$ & hinc $y = 10$.

Hoc valore ſubſtituto in æquatione $\frac{q+y^2-r:y}{2} = z$; reperitur $z = \frac{-86+100-600:10}{2} = -\frac{46}{2} = -23$.

Eodem valore ipſius y ſubſtituto in æquatione $v = \frac{(q+y^2+r:y)}{2}$; invenitur $v = \frac{-86+100+600:10}{2} = \frac{74}{2} = 37$. Tandem valores quantitatum y, z

& v ſubſtituendi ſunt in æquationibus quadraticis $x^2 + yx + z = 0$ & $x^2 - yx + v = 0$ & habebimus:

I. $x^3 + 10x - 23 = 0.$

$$x^2 + 10x = 23$$

$$25 \quad 25$$

$$x^2 + 10x + 25 = 48$$

$$x + 5 = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$$

$$x = \pm 4\sqrt{3} - 5$$

II. $x^2 - 10x^2 + 37 = 0$

$$x^2 - 10x^2 = -37$$

$$25 \quad 25$$

$$x^2 - 10x + 25 = -12$$

$$\left.\begin{matrix} x - 5 = \\ 5 - x = \end{matrix}\right\} = \sqrt{-12} = 2\sqrt{-3}$$

$$x = 5 \pm 2\sqrt{-3}$$

Sunt ergo radices æquationis propoſitæ $4\sqrt{3}-5, -4\sqrt{3}-5, 5+2\sqrt{-3}$ & $5-2\sqrt{-3}$

PROBLEMA CLXXII.

363. *Ex æquatione quacunque extrahere radicem per approximationem.*

Quamvis æquationum quadraticarum radices ſurdæ extrahi poſſint (§. 143), nec difficile ſit inde ulterius radicem prope veram in fractionibus decimalibus elicere (§. 273 *Arithm.*): quoniam tamen methodus, quam nunc explicare intendimus, univerſalis eſt, ab exemplo facillimo æquationis quadraticæ ut ordiamur, conſultum ducimus.

Sit $x^2 - 5x - 31 = 0$. Quoniam $x < 5 + \sqrt{31}$ & $> \sqrt{56}$, ſive $x < 10 +$ & $> 7 +$ (§. 354): ponamus radicem eſſe $8 + y$, ita ut y denotet fractionem, qua numerus aſſumtus 8 radicem vel excedit, vel ab ea deficit: erit

$$x^2 = 64 + 16y + y^2$$

$$-5x = -40 - 5y$$

$$-31 = -31$$

$$-7 + 11y + y^2 = 0$$

Quoniam fractionum potentiæ continuo decreſcunt, & radix tantum deſideratur prope vera, y^2 abjiciatur: quo facto, erit

$$-7 + 11y = 0$$

$$y = \tfrac{7}{11} = \tfrac{6}{10} \text{ fere}, = 0.\,6$$

Ergo $x = 8 + 0.\,6 = 8.\,6$

Ponamus $x = 8.\,6 + y$: erit

$$x^2 = \tfrac{7396}{100} + \tfrac{172}{10}y + y^2$$

$$-5x = -\tfrac{430}{10} - 5y$$

$$-31 = -31$$

$$\tfrac{7396}{100} - \tfrac{430}{10} - 31 + \tfrac{172}{10}y - 5y = 0$$

hoc eſt, reductione ad eandem denominationem facta, (quod in gratiam tyronum ſemel hic exhibere placuit)

$$7396 - 4300 - 3100 + (1720 - 500)y = 0$$

$$-0.\,04 + 12.\,20y = 0$$

$$12.\,20y = 0.\,04$$

$$y = 004 : 1220 = 0.\,0032$$

Ergo $x = 8.6000 + 0.0032 = 8.6032.$

Ponamus $x = 8.\,6032 + y$, erit

$$x^2 = 7{\cdot}401505024 + 17{\cdot}20640000y + y^2$$

$$-5x = -4.301600000 - 5{\cdot}00000000y$$

$$-31 = -3.100000000$$

$$-0.000094976 + 12.20640000y = 0$$

$$y = 0000094976 : 1220640000$$

$$= 0.000077808.$$

Ergo

Ergo $x = 8.6032000000 + 0.0000077808 = 8.603277808$.

Sit similiter ex æquatione cubica $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$ extrahenda radix per approximationem. Ponamus denuo radicem esse $5 + y$ [numerus 5 assumitur vi limitum æquationis (§. 354)]: quoniam termini, in quibus est y^2 & y^3, omittuntur; non opus est, ut in transformatione æquationis exprimantur. Reperitur adeo

$$\begin{aligned} x^3 &= 125 + 75y \ldots \\ +2x^2 &= 50 + 20y \ldots \\ -23x &= -115 - 23y \\ -70 &= -70 \\ \hline -10 + 72y &= 0 \\ \hline y = \tfrac{10}{72} &= 0.1 \end{aligned}$$

Ergo $x = 5 + 0.1 = 5.1$

Ponamus $x = 5.1 + y$: erit

$$\begin{aligned} x^3 &= 132.651 + 78.030y \ldots \\ +2x^2 &= 52.020 + 20.400y \\ -23x &= -117.300 - 23.000y \\ -70 &= -70.000 \\ \hline -2.629 + 75.430y &= 0 \\ \hline 75.430y &= 2.629 \\ \hline y = 2629 : 75430 &= 0.0348 \end{aligned}$$

Ergo $x = 5.1 + 0.0348 = 5.1348$

Eodem modo progredi licet, quousque libuerit.

Nec difficile est eadem methodo regulam generalem investigare. Sit nempe $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + ex^{m-5}$ &c. $+ f = 0$. Ponamus esse $x = t + y$; erit

$$\begin{aligned} x^m &= t^m + mt^{m-1}y + \frac{m.\,m-1}{2} t^{m-2} y^2 \ldots \\ +ax^{m-1} &= at^{m-1} + (m-1)\, at^{m-2} y + \frac{m-1.\,m-2}{2} at^{m-3} y^2 \ldots \\ +bx^{m-2} &= bt^{m-2} + (m-2)\, bt^{m-3} y + \frac{m-2.\,m-3}{2} bt^{m-4} y^2 \ldots \\ +cx^{m-3} &= ct^{m-3} + (m-3)\, ct^{m-4} y + \frac{m-3.\,m-4}{2} ct^{m-5} y^2 \ldots \\ &\text{\&c. \&c.} \\ +f &= +f \end{aligned}$$

Fiat $t^m + at^{m-1} + bt^{m-2} + ct^{m-3}$ &c. $= p$

$mt^{m-1} + (m-1)\, at^{m-2} + (m-2)\, bt^{m-3} + (m-3)\, ct^{m-4}$ &c. $= q$

$\frac{m.\,m-1}{2} t^{m-2} + \frac{m-1.\,m-2}{2} at^{m-3} + \frac{m-2.\,m-3}{2} bt^{m-4} + \frac{m-3.\,m-4}{2} ct^{m-5}$ &c. $= r$

Quoniam termini, in quibus y ad plures dimensiones ascendit, ob parvitatem abjiciuntur, erit

$$p + qy + ry^2 = 0$$

Fiat ut in exemplis specialibus

$$p + qy = 0$$

erit $qy = -p$

$$y = -p : q$$

In applicatione regulæ hujus generalis eadem calculi instauratione opus est, qua in exemplis specialibus paulo ante usi sumus.

Quodsi vero regula desideretur, quæ celerius appropinquat, ex æquatione prima hunc in modum eruitur.

Quoniam $p + qy + ry^2 = 0$

erit $qy + ry^2 = -p$

$(q + ry$

$y = -p : (q + ry)$

Sed $y = -p : q$, per regulam priorem.

Ergo $y = -p : (q - \frac{pr}{q}) = -pq : (q^2 - pr)$.

Vel quia $p + qy + ry^2 = 0$

erit $qy + ry^2 = -p$

$qy : r + y^2 = -p : r$

$q^2 : 4r^2 + qy : r + y^2 = q^2 : 4r^2 - p : r$

$q : 2r + y = \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - pr)} : r$

Habetur adeo x, si valor ipsius y adjiciatur valori t, signo vel positivo, vel privativo, prout repertus fuerit.

SCHOLION.

364. *Duas regulas posteriores methodo ab hac diversa investigavit celeberrimus* HALLEIUS (*a*), *& easdem aliquot exemplis illustravit. Quamvis vero usus earum ex ante allatis exemplis manifestus esse videatur; non inconsultum tamen judicamus ut unum apponamus.*

$x^3 + 438x^2 - \underset{b}{7825}x - \underset{f}{98508430} = 0.$

Fiat $x = t + y = 300 + y$; erit

$x^3 = 27000000 + 270000y + 900y^2 + y^3$
$+ ax^2 = 39420000 + 262800y + 438y^2$
$- bx = -2347500 - 7825y$
$- f = -98508430$

$0 = -34435930 + 524975y + 1338y^2$

Est itaque $p = -34435930$, adeoque $-p = 34435930$, $q = 524975$, $r = 1338$. Quare $y = -p : (q - pr : q) = 34435930 : (524975 + 46075274340 : 524975) = 34435930 : 612741 = 56$, consequenter $x = 300 + 56 = 356$.

Fiat jam $x = 356 + y$; erit

$x^3 = 45118016 + 380208y + 1068y^2 +$
$+ ax^2 = 55510368 + 311856y + 438y^2$
$- bx = -2785700 - 7825y$
$- f = -98508430$

$0 = -665746 + 684239y + 1506y^2.$

Est itaque $p = -665746$, $q = 684239$, $r = 1506$. Quare $y = -p : (q - pr : q) = 665746 : (684239 + 1002613476 : 684239) = 6657460 : 685704 = 0.9708$, consequenter $x = 356 + 0.9708 = 356.9708$.

Per regulam irrationalem radix in pluribus notis per duas operationes inveniri potest, quia rationali accuratior. Possunt quoque plures notæ inveniri per rationalem, si operatio continuetur.

COROLLARIUM.

365. Sit $x^m - f = 0$ & fiat $x = t + y$; erit $x^m - f = t^m + mt^{m-1}y + \frac{m.m-1}{1.2}t^{m-2}y^2$ &c. $- f$. Unde si fiat $t^m + mt^{m-1}y - f = 0$, erit $y = (f - t^m) : mt^{m-1}$, quæ est regula per approximationem extrahendi radicem ex quavis æquatione pura. Si accuratior desideretur, fiat ut ante $t^m = p$, $mt^{m-1} = q$, $\frac{m.m-1}{1.2}t^{m-2} = r$; reperietur ut in problemate $y = -p : (q - pr : q)$. Unde apparet eandem regulam inservire radicum extractioni tum ex æquationibus puris, tum ex affectis.

PROBLEMA CLXXIII.

366. *Ex serie infinita radicem extrahere.*

Sit $v = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5$ &c.

Fiat $x = hv + iv^2 + kv^3 + lv^4 + mv^5 + nv^6$ &c. erit (§. 95),

$x^2 = h^2v^2 + 2hiv^3 + i^2v^4 + 2ikv^5 + k^2$
$+ 2hkv^4 + 2hlv^5 + 2i$
$+ 2h$

$x^3 = h^3v^3 + 3h^2iv^4 + 3hi^2v^5 + i^3v$
$+ 3h^2kv^5 + 3h$
$+ 6h$

$x^4 = h^4v^4 + 4h^3iv^5 + 6h$
$+ 4h$

(*a*) In Transact. Anglican. n. 210. p. 136.

$x^5 = \quad h^5v^5 + 5h^4iv^6$

$x^6 = \quad h^6v^6$

Substituantur valores modo inventi in æquatione $0 = -v + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c. erit

$$\begin{array}{llllllll}
-v = -v & & & & & & & \\
+ax = +ahv & +aiv^2 & +akv^3 & +alv^4 & +amv^5 & +anv^6 & \&c. \\
+bx^2 = & +bh^2.. & +2bhi.. & +bi^2.. & +2bik.. & +bk^2.. & \\
 & & & +2bhk.. & +2bhl.. & +2bil.. & \\
 & & & & & +2bhm.. & \\
+cx^3 = & & +ch^3.. & +3ch^2i.. & +3chi^2.. & +ci^3.. & \\
 & & & & +3ch^2k.. & +3ch^2l.. & \\
 & & & & & +6chik.. & \\
+dx^4 = & & & +dh^4.. & +4dh^3i.. & +6dh^2i^2.. & \\
 & & & & & +4dh^3k.. & \\
+ex^5 = & & & & +eh^5.. & +5eh^4i.. & \\
+fx^6 = & & & & & +fh^6.. &
\end{array}$$

Jam cum æquatio ponatur nihilo æqualis, propterea quod v subducitur ex altero æquationis membro ipsi æquali; omnes terminos v, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6 &c. in nihilum ductos concipere licet.

Fiat ergo in hac æquatione cujuslibet termini coëfficiens nihilo æqualis, erit

$ah - 1 = 0$ $ai + bh^2 = 0$

$h = 1 : a$ $i = -bh^2 : a$

$i = -b : a^3$

$ak + 2bhi + ch^3 = 0$

$k = (-2bhi - ch^3) : a$

$k = (+2b^2 - ac) : a^5$

$al + bi^2 + 2bhk + 3ch^2i + dh^4 = 0$

$l = (-bi^2 - 2bhk - 3ch^2i - dh^4) : a$

consequenter ob

$bi^2 = b^3 : a^6$, $2bhk = (4b^3 - 2abc) : a^6$

$3ch^2i = -3bc : a^5$ $dh^4 = d : a^4$

$l = -b^3 : a^7 - 4b^3 : a^7 + 2abc : a^7 + 3bc : a^6 - d : a^5$

$l = (5abc - 5b^3 - a^2d) : a^7$

$am + 2bik + 2bhl + 3chi^2 + 3ch^2k + 4dh^3i + eh^5 = 0$

Ergo ob

$2bik = (-4b^4 + 2ab^2c) : a^8$, $4dh^3i = -4bd : a^6$

$2bhl = (10ab^2c - 10b^4 - 2a^2bd) : a^8$ $eh^5 = e : a^5$

$3chi^2 = 3b^2c : a^7$ $3ch^2k = (6b^2c - 3ac^2) : a^7$

$m = (14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e) : a^9$

Eodem modo reperitur $n = (-42b^5 + 84ab^3c - 28a^2bc^2 - 28a^2b^2d + 7a^3cd + 7a^3be - a^4f) : a^{11}$, & ita porro.

Quodsi tandem in æquatione assumta $x = hv + iv^2 + kv^3 + lv^4 + mv^5 + nv^6$ &c. valores inventi coëfficientium h, i, k, l, m, n &c. substituantur, prodibit radix quæsita

$$x = \frac{1}{a}v - \frac{b}{a^3}v^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}v^3 + \frac{5abc - 5b^3 - a^2d}{a^7}v^4 + \frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}v^5$$

&c. in infinit.

CAPUT VI.

De Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicata.

DEFINITIO XX.

367. PEr *Geometriam Sublimiorem* intelligo eam Geometriæ partem, quæ de lineis curvis & solidis inde genitis tractat.

DEFINITIO XXI.

Tab. III. Fig. 36. 368. *Diameter* curvæ est recta AD rectas MM inter se parallelas bifariam secans in P. In specie *Axis* vocatur, si rectas æquidistantes ad angulos rectos secet.

DEFINITIO XXII.

369. *Vertex curvæ* est punctum A, ex quo ducitur diameter.

DEFINITIO XXIII.

Tab. III. Fig. 36. 370. *Ordinatim applicatæ* sunt lineæ æquidistantes MM, quæ a diametro bifariam secantur. Earum dimidiæ PM vocantur *Semiordinatæ*. Vocantur etiam Tab. V. Fig. [illegible] *S[illegible]dinatæ* lineæ QM, QM ex punctis [illegible]urvæ M, M ad lineam AΓ positione datam ductæ, ac inter se parallelæ.

DEFINITIO XXIV.

Tab. III. Fig. 36. 371. *Abscissa* AP est pars diametri vel alterius lineæ, ad quam curva refertur, inter verticem aut aliud punctum fixum & semiordinatam PM intercepta. Quidam *sagittam* vocant.

SCHOLION.

372. *Abscissæ nimirum a quovis puncto in linea positione data computari possunt, ad quam referuntur puncta curvæ, quemadmodum ex subsequentibus patebit.*

DEFINITIO XXV.

373. *Diameter transversa* AB est recta, quæ utrinque intra curvas continuata rectas intra easdem æquidistantes MM bifariam secat.

DEFINITIO XXVI.

374. *Diameter conjugata* est recta, quæ alteri diametro æquidistantes bifariam secat.

DEFINITIO XXVII.

375. *Quantitates variabiles* sunt, quæ, crescentibus aliis vel decrescentibus, aut crescunt aut decrescunt.

Ex. gr. semiordinata PM & abscissa AP circuli sunt quantitates variabiles : una enim crescente, crescit etiam altera.

Quantitates constantes sunt, quæ, crescentibus aliis vel decrescentibus, eædem manent.

Ita semidiameter circuli AC est quantitas constans : crescentibus enim abscissis & semiordinatis AP & PM semper eadem manet.

HYPOTHESIS VIII.

376. *Quantitates constantes primis alphabeti literis indigitentur* a, b, c, &c. *variabiles vero ultimis* z, y, x, &c. *Speciatim* x *abscissam*, y *semiordinatam denotet, nisi aliud expresse moneatur.*

DEFINITIO XXVIII.

377. *Curva algebraica* est, in qua relatio abscissarum AP ad semiordinatas per æquationem algebraicam explicari potest. Sit ex. gr. in circulo AB

Tab. III. Fig. 38. $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$; erit $PB = a - x$, consequenter ob $PM^2 = AP. PB$ (§. 327, 377 *Geom.*) $y^2 = ax - x^2$. Vel sit $PC = x$, $AC = a$, $PM = y$; erit (§. 417 *Geom.*) $MC^2 - PC^2 = PM^2$, hoc est, $a^2 - x^2 = y^2$.

SCHOLION I.

378. *Dicuntur æquationes algebraicæ, quæ determinati sunt gradus, ita ut æquatio semper eadem maneat in singulis punctis curvæ.*

SCHOLION II.

379. *Vulgo cum* CARTESIO (*a*) *lineas algebraicas* geometricas *vocant, quod eas tantum ad construenda Problemata admittant, adeoque in Geometriam recipiant. Aliter vero nobis videtur, non refragantibus summis in re Geometrica arbitris* LEIBNITIO *atque* NEWTONO (*b*).

DEFINITIO XXIX.

380. *Curva transcendens* est, quæ per æquationem algebraicam definiri nequit.

SCHOLION.

381. *Curvæ transcendentes ab aliis,* CARTESII *exemplo, dicuntur* mechanicæ *& ex Geometria ejiciuntur; aliter sentientibus viris summis* LEIBNITIO *atque* NEWTONO. *Invenit quoque* LEIBNITIUS *novum æquationum transcendentium genus, quibus curvæ transcendentes definiuntur, & quæ sunt gradus indefiniti, hoc est, non constanter eædem in omnibus curvæ punctis* (*c*).

DEFINITIO XXX.

382. *Curvæ algebraicæ ejusdem generis* sunt, quarum æquationes ad eandem dimensionem assurgunt. Cum vero sola æquatio, quæ rectam definit, unius dimensionis esse possit; *Curva primi generis* vocatur, in qua æquatio ad duas dimensiones assurgit; si ad tres, *curva secundi generis*; si ad quatuor, *curva tertii generis*, &c.

Ex. gr. æquatio pro circulo est $y^2 = ax - x^2$, vel etiam $a^2 - x^2 = y^2$ (§. 377). Est ergo circulus curva primi generis. Similiter curva primi generis est, quæ definitur per æquationem $ax = y^2$. Sed curva secundi generis est, quam definit æquatio $a^2x = y^3$.

DEFINITIO XXXI.

383. *Familia curvarum* vocatur plurium curvarum diversi generis congeries, quæ omnes per eandem æquationem indeterminati gradus, sed pro diversitate generis diversimode explicandi, definiuntur.

Ex. gr. sit æquatio indeterminati gradus $a^{m-1}x = y^m$. Si $m = 2$, erit $ax = y^2$. Si $m = 3$, erit $a^2x = y^3$; si $m = 4$, erit $a^3x = y^4$, &c. in infinitum. Omnes istæ curvæ dicuntur ejusdem familiæ.

SCHOLION.

384. *Æquationes, per quas curvarum familiæ definiuntur, cum transcendentibus non sunt confundendæ. Licet enim, intuitu totius familiæ, sint gradus indeterminati; cujuslibet tamen ex familia curvæ respectu, gradum determinatum habent: cum æquationes transcendentes, respectu ejusdem curvæ, indefiniti gradus existant* (§. 381).

COROLLARIUM.

385. Omnes adeo curvæ algebraicæ familiam quandam componunt, ex innumeris aliis constantem, quarum una quælibet infinita genera complectitur. Cum enim æquationes per quas curvæ definiuntur, ingre-

(*a*) Geom. Lib. 2. p. m. 17. & seq.
(*b*) Act. Erudit. Lips. A. 1708. p. 516.
(*c*) Act. Erudit. Lips. A. 1684. p. 234. 235.

ingrediantur facta vel ex potentiis abscissarum & semiordinatarum in coëfficientes datos, vel ex potentiis abscissarum in potentias semiordinatarum, vel ex meris quantitatibus datis; omnes vero æquationes nihilo æquales fieri possint (e. gr. si $ax = y^2$, erit $ax - y^2 = 0$); æquatio pro omnibus curvis algebraicis erit $ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = 0$. Signum + in omnibus terminis retinetur, quia in casibus singularibus infinitæ variationes occurrere possunt. Et, si plures potentiæ ejusdem indeterminatæ quantitatis, v. gr. x, occurrunt, coëfficiens termini in formula, v. gr. b, explicatur per omnes ejus coëfficientes, & exponens dignitatis, v. gr. n, per omnes dignitatum exponentes.

DEFINITIO XXXII.

386. *Sectiones conicæ* sunt lineæ curvæ, quæ ex coni sectione oriuntur.

SCHOLION.

387. *Sectiones conicæ præter Circulum sunt tres*, Parabola, Hyperbola *&* Ellipsis. *Nos præcipuas earum proprietates, quæ scilicet frequentioris sunt usus, ex æquationibus eas definientibus per calculum algebraicum eruemus; quia nobis propositum est, Algebræ ad Geometriam Sublimiorem applicationem exemplis docere: licet non diffiteamur, communes earum proprietates una eademque opera demonstrari, [illegible] ...ldo, seu in cono ex quo secantur, considerentur.*

DEFINITIO XXXIII.

388. *Parabola* est curva, in qua $ax = y^2$; hoc est, quadratum semiordinatæ æquatur rectangulo ex abscissa in rectam constantem, quæ axis *Parameter*, ab aliis *Latus rectum* dicitur.

SCHOLION.

389. *Hanc proprietatem Parabolæ competere assumimus respectu axis: quod vero etiam ipsi competere debeat respectu cujuslibet diametri, inferius demonstrabitur.*

COROLLARIUM I.

390. Est ergo Parabola curva primi generis, & crescentibus abscissis crescunt semiordinatæ; consequenter curva in se non redit.

COROLLARIUM II.

391. Et in ea $x = y^2 : a$ atque $a = y^2 : x$, hoc est, abscissa est tertia proportionalis ad parametrum & semiordinatam, parameter vero tertia proportionalis ad abscissam & semiordinatam.

COROLLARIUM III.

392. Porro $\sqrt{ax} = y$, hoc est, semiordinata est media proportionalis inter parametrum & abscissam.

COROLLARIUM IV.

393. Data itaque parametro AB describi potest Parabola. Continuetur enim parameter AB in C, & in B erigatur perpendicularis infra lineam AC continuanda in N. Ex centris ad libitum assumtis, circino usque ad A aperto, ducantur arcus rectam BV in I, II, III, IV, V, &c. rectam vero BC in 1, 2, 3, 4, 5, &c. intersecantes: erunt B1, B2, B3, B4, B5, &c. abscissæ; BI, BII, BIII, BIV, BV, &c. semiordinatæ (§. 327 *Geom.*). Quare si lineæ B1, B2, B3, &c. ex recta BC in BN transferantur, & in punctis 1, 2, 3 &c. normales applicentur 1I = BI, 2II = BII, 3III = BIII, &c. curva per puncta I, II, III &c. transiens Parabola est: BN vero ejus axis (§. 392). Elegantius Parabola describitur, si sumto AX pro axe Parabolæ & puncto A pro vertice, fiat AB parametro æqualis, & ducta recta CD, quæ rectam BX ad angulos rectos secet, describantur pro arbitrio circuli quotcunque transeuntes per B & axem secantes in P, P, P &c. erunt enim AP, AP, AP &c. abscissæ, PI = A1, PII = A2, PIII = A3, &c. semiordinatæ Parabolæ (§. 327 *Geom.*).

COROL-

COROLLARIUM V.

Tab. III. Fig. 39. 394. Quodlibet etiam punctum Parabolæ geometrice determinari potest. Ex. gr. quæritur, utrum punctum M sit in Parabola, necne? Demittatur ex M ad BN perpendicularis PM, & fiat PN parametro AB æqualis. Super BN describatur semicirculus. Quodsi enim is transeat per M; erit punctum M in Parabola (§. 327 *Geom.* & §. 392 *Analys.*).

DEFINITIO XXXIV.

Tab. III. Fig. 40. 395. *Focus* est punctum axis F, in quo semiordinata FN æquatur semiparametro.

PROBLEMA CLXXIV.

396. *Invenire distantiam Foci a vertice* AF.

Sit $AF = x$, $parameter = a$, erit $FN = \frac{1}{2}a$ (§. 395); consequenter

$$\frac{1}{4}a^2 = ax \quad (§. 388) \qquad a \text{ div.}$$

$$\frac{1}{4}a = x$$

Theorema. In Parabola distantia foci a vertice AF est ad parametrum in ratione subquadrupla, seu quarta pars parametri.

COROLLARIUM I.

397. Quoniam $y^2 = ax$ (§. 388): quadratum semiordinatæ PM est quadruplum rectanguli ex distantia foci a vertice in abscissam $\frac{1}{4}ax$, sive AF. AP.

COROLLARIUM II.

398. Invenitur adeo distantia foci a vertice AF, si ad abscissam quamcunque AP & dimidiam semiordinatam $\frac{1}{2}$PM quæratur tertia proportionalis (§. 327 *Geom.*). Est enim $\frac{1}{4}PM^2 = AP.\ AF$ (§. 377 *Geom.*); consequenter $PM^2 = 4\,AF.\ AP$.

PROBLEMA CLXXV.

399. *Determinare quantitatem rectæ* FM *ex foco* F *ad extremitatem semiordinatæ* M *ductæ.*

Sit $AP = x$. Quoniam $AF = \frac{1}{4}a$ (§. 396) erit $PF = x - \frac{1}{4}a$, vel $\frac{1}{4}a - x$, si AF > PA; consequenter Tab. III. Fig. 40.

$$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$$
$$PM^2 = \quad ax \quad (§. 388)$$
$$FM^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 \quad (§. 417\ Geom.)$$
$$FM = x + \frac{1}{4}a.$$

Theorema. Recta FM ex foco F ad extremitatem semiordinatæ Parabolæ ducta æquatur aggregato ex abscissa AP & distantia foci a vertice AF.

COROLLARIUM I.

400. Si quarta pars parametri ex A in Tab. III. Fig. 41. f & F transfertur, & per AD parallelæ quotcunque, ipsi in punctis P normales, MM aguntur, tandemque ex F intervallo Pf puncta M determinantur; curva per hæc puncta transiens est Parabola.

COROLLARIUM II.

401. Potest ergo Parabola etiam continuo motu describi. Nimirum assumta recta pro axe fiat $fA = AF = \frac{1}{4}a$. In A firmetur regula DB secans axem fD ad angulos rectos. Extremitati regulæ alterius EC alligetur filum, altero sui extremo in foco F fixum, quod sit $= AD + AF$. Quodsi stylo ad regulam EC applicato regula EC juxta ductum alterius DB dextrorsum & dein sinistrorsum promoveatur; stylus Parabolam designabit. Est enim constanter $FM = EM = Pf = x + \frac{1}{4}a$; consequenter punctum M in Parabola (§. 399).

PROBLEMA CLXXVI.

402. *Invenire rationem semiordinatarum in Parabola.*

Sint abſciſſæ x & v, ſemiordinatæ y & z; erit $y^2 = ax$ & $z^2 = av$ (§. 388); conſequenter

$$y^2 : z^2 = ax : av$$

$$y^2 : z^2 = x : v \quad (\S.\ 124)$$

$$y : z = \sqrt{x} : \sqrt{v}$$

Theorema. Quadrata ſemiordinatarum ſunt inter ſe ut abſciſſæ: ipſæ autem ſemiordinatæ in ratione ſubduplicata abſciſſarum.

PROBLEMA CLXXVII.

Tab. III. Fig. 40. 403. *Determinare quantitatem rectanguli ex ſumma duarum ſemiordinatarum* PM + *pm in differentiam earundem* R*m*.

$$pm + PM = \sqrt{av} + \sqrt{ax} \quad (\S.292)$$

$$mR = \sqrt{av} - \sqrt{ax}$$

$$(PM + pm)mR = av - ax = a(v - x)$$

$$= a.\ Pp$$

Theorema. Rectangulum ex ſumma duarum ſemiordinatarum in differentiam earundem æquatur rectangulo ex parametro in differentiam abſciſſarum.

COROLLARIUM.

404. Eſt ergo parameter ad ſummam duarum ſemiordinatarum, ut earundem differentia ad differentiam abſciſſarum. (§. 299 Arithm.).

PROBLEMA CLXXVIII.

405. *Determinare quantitatem rectanguli ex ſemiordinata in abſciſſam.*

Tab. III. Fig. 40. Quoniam PM $= \sqrt{ax}$ (§. 392); erit PM. AP $= x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3}$ (§. 61). Quare cum ſit $ax : \sqrt{ax^3} = \sqrt{ax^3} : x^2$, hoc eſt, $ax : x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3} : x^2$; erit $a : \sqrt{ax} = \sqrt{ax^3} : x^2$ (§. 124)

hoc eſt a : PM = PM. AP : AP^2.

Theorema. In Parabola eſt rectangulum ex ſemiordinata in abſciſſam ad quadratum abſciſſæ ut parameter ad ſemiordinatam.

PROBLEMA CLXXIX.

406. *Determinare quantitatem rectanguli ex abſciſſa una in alteram.*

Sit abſciſſa una $= x$, altera $= v$; ſemiordinata una $= y$, altera $= z$; erit $x = y^2 : a$ & $v = z^2 : a$ (§. 391), conſequenter $xv = y^2z^2 : a^2$, adeoque $a^2 : y^2 = z^2 : xv$.

Theorema. In Parabola quadratum parametri eſt ad quadratum ſemiordinatæ unius, ut quadratum ſemiordinatæ alterius ad rectangulum abſciſſarum.

PROBLEMA CLXXX.

407. *Determinare quantitatem chordæ* AM.

Sit parameter $= a$, AP $= x$, erit PM$^2 = ax$ (§. 388). Quare cum AP$^2 = x^2$; erit AM$^2 = ax + x^2$ (§. 417 *Geom.*), $= (a + x)x = (a +$ AP$)$. AP.

Theorema. In Parabola chorda eſt media proportionalis inter abſciſſam & compoſitam ex parametro & abſciſſa.

DEFINITIO XXXV.

408. Si TM curvam tangit in M, ducatur MR ad tangentem normalis; recta PT inter tangentem TM & ſemiordinatam PM intercepta *Subtangens* vocatur: quæ vero inter ſemiordinatam & normalem intercipitur PR, *Subnormalis* audit.

COROLLARIUM.

409. Eſt adeo TMR triangulum rectangulum (§. 91 *Geom.*); adeoque ob PM ad AR normalem (§. 329, 267 *Geom.*), PR : PM = PM : PT, & PM : PT = MR : TM, hoc eſt, in omni curva ſubnormalis eſt tertia proportionalis ad ſubtangentem & ſemiordinatam, & normalis eſt ad tangentem ut ſemiordinata ad ſubtangentem.

PRO-

PROBLEMA CLXXXI.

Tab. III. Fig. 42. 410. *Determinare quantitatem subtangentis* PT *& subnormalis* PR *in Parabola.*

Sit AP $= x$, MR ad tangentem TM perpendicularis $= t$, RA $= v$, erit PR $= v - x$, $PM^2 = ax$ (§. 388) & (§. 417 *Geom.*)

$$ax = t^2 - v^2 + 2vx - x^2$$

hoc est $x^2 - 2vx + v^2 = 0$
$$+ ax - t^2$$

Eadem æquatio provenit, si recta TM Parabolam secet, & quidem ad utrumque sectionis punctum. Quoniam itaque in puncto contactus duo illa puncta coincidunt; æquatio duas radices æquales habere debet, coincidentibus nimirum etiam abscissis per x designatis. Quare si fiat $x = z$ seu $x - z = 0$ & inde formetur æquatio $x^2 - 2zx + z^2 = 0$, duas æquales radices continens (§. 329); hæc cum antea inventa eadem esse debet; consequenter

$$-2z = -2v + a$$

Ergo ob $z = x$) $x = v - \frac{1}{2}a$

$$\tfrac{1}{2}a = v - x = \text{PR}$$

Porro (§. 409) PR : PM = PM : PT

hoc est, $\frac{1}{2}a : \sqrt{ax} = \sqrt{ax} : \text{PT}$

Ergo $\text{PT} = ax : \frac{1}{2}a = 2x$.

Theorema. In Parabola subtangens PT est abscissæ AP dupla; subnormalis vero PR parametri subdupla, adeoque constans.

COROLLARIUM I.

411. Quoniam TA $= x$, & distantia foci a vertice AF $= \frac{1}{4}a$ (§. 396); erit TF $= \frac{1}{4}a + x$. Ergo recta FM ex foco F ad punctum contactus M ducta æquatur rectæ TF (§. 399); consequenter TFM triangulum æquicrurum.

COROLLARIUM II.

412. Quoniam PA $= x$, & AF $= \frac{1}{4}a$ (§. 396), erit PF $= x - \frac{1}{4}a$; consequenter cum sit PR $= \frac{1}{2}a$ (§. 410), FR $= x + \frac{1}{2}a$, adeoque FR = FM (§. 399) = TF (§. 411). Circulus igitur, ex foco Parabolæ F per punctum ejus M ductus, subtangentem PT & subnormalem PR determinat; consequenter punctum T, ex quo ducitur tangens TM. Tab. III. Fig. 42.

COROLLARIUM III.

413. Quodsi MN ducatur parallela axi AR, erit angulus NMT = FTM (§. 233 *Geom.*). Cumque sit TF = FM (§. 411); erit FTM = FMT (§. 184 *Geom.*); consequenter FMT = NMT (§. 87 *Arithm.*).

PROBLEMA CLXXXII.

414. *Ducta* ON *tangenti* TM, *&* MG *axi* AQ *parallela; determinare rationem segmentorum* HF *&* FN. Tab. III. Fig. 43.

Sit AP = AT (§. 410) $= x$, parameter $= a$, erit PM $= \sqrt{ax}$ (§. 392), PT = IO (ob TO = MF = PI, (§. 257 *Geom.*) $= 2x$ (§. 410). Sit MF $=$ PI $= v$, erit TI $= v + 2x$, IA $= v + x$. Sit denique IQ = FG $= t$, erit OQ = OI + IQ $= 2x + t$, QA $= x + v + t$, & hinc $QN^2 = ax + av + at$ (§. 388). Porro (§. 268 *Geom.*)

OI : IF = OQ : QN

hoc est, $OI^2 : IF^2 = OQ^2 : QN^2$ (§. 124)

$$4x^2 : ax = (2x + t)^2 : QN^2$$

$$4x : a = (2x + t)^2 : \frac{a(2x + t)^2}{4x}$$

Est itaq; $a(x + v + t) = a(2x + t)^2 : 4x$

$$4x^2 + 4xv + 4tx = 4x^2 + 4tx + t^2$$

$$4xv = t^2$$

Tab. III. Fig. 43. Quodsi LI dicatur t; reperietur eodem modo $t^2 = 4xv$, reliquis manentibus iisdem. Unde patet, esse LI = IQ. Est vero (§. 268 *Geom.*).
OH:OL = HN:LQ & OH : OL = HF: LI, adeoque HN : HF = LQ : LI (§. 167, 173 *Arithm.*). Sed LI = $\frac{1}{2}$ LQ = IQ, *per demonstrata*. Ergo HF = $\frac{1}{2}$ HN = FN (§. 149. *Arith.*).

Theorema. Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, recta MG ex puncto contactus M cum axe parallela ducta eam bifariam secat in F.

COROLLARIUM I.

415. Est ergo MG diameter, HN ejus ordinata, MF abscissa (§. 368, 370, 371).

COROLLARIUM II.

416. Quoniam anguli recti ad G & I *per constr.* æquales sunt (§. 145 *Geom.*) & ob parallelismum rectarum FG & OQ *per constr.* anguli F & O in △△ FNG & OFI æquales sunt (§. 233 *Geom.*), erit (§. 267 *Geom.*)

$$OI : FI = FG : GN$$
$$2x : \sqrt{ax} = \sqrt{4vx} : \sqrt{av}$$

Et quia (§. 417 *Geom.*) $FN^2 = FG^2 + GN^2$ erit $FN^2 = 4vx + av = (a + 4x) v$. Jam cum FM = v, & x respectu puncti M constans; $a + 4x$ est parameter diametri, & quadratum etiam ad diametrum applicatæ æquale rectangulo ex parametro in abscissam.

COROLLARIUM III.

417. Recta ex foco ad verticem diametri M ducta est $\frac{1}{4}a + x$ (§. 399); diameter ergo parametri est rectæ illius quadrupla.

PROBLEMA CLXXXIII.

Tab. XII. Fig. 119. 418. *Si* TM *Parabolam tangit in* M & MR *fuerit ad eam normalis, & ex foco* F *ducatur recta* FM *atque* FO *ad* TM *normalis; demittatur etiam ex* R *ad rectam* FM *normalis* RH; *determinare quantitatem segmentorum* MH & FH, *itemque rectæ* OF.

Sit parameter a, AP = x, erit FM = $\frac{1}{4}a + x$ (§. 399), PR = $\frac{1}{2}a$, & TP = $2x$ (§. 410). Cum TFM sit triangulum æquicrurum (§. 411), erit TO = OM (§. 184 *Geom.*). Quoniam itaque $TM^2 = TP^2 + PM^2$ (§. *cit.*); erit $TM^2 = 4x^2 + ax$ (§. 388); consequenter $OM^2 = x^2 + \frac{1}{4}ax$, quod ex $FM^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{2}ax + x^2$ subductum relinquit $FO^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}ax = (\frac{1}{4}a + x)\frac{1}{4}a$ (§. 417 *Geom.*). Porro $MR^2 = PR^2 + PM^2$ (§. 417 *Geom.*) $= \frac{1}{4}a^2 + ax = (\frac{1}{4}a + x)a$. Jam cum in Triang. OFM & HMR anguli ad O & H recti *per hypoth.* sint inter se æquales (§. 145 *Geom.*), & ob parallelismum rectarum MR & FO (§. 256 *Geom.*), anguli F & M æquales (§. 233 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*).

$$FM : OF = MR . MH$$

adeoq; $FM^2 : OF^2 = MR^2 : MH^2$ (§. 124)

$$(\tfrac{1}{4}a + x)^2 : (\tfrac{1}{4}a + x)\tfrac{1}{4}a = (\tfrac{1}{4}a + x)a : MH^2$$
$$\tfrac{1}{4}a + x : \tfrac{1}{4}a = (\tfrac{1}{4}a + x)a : MH^2 \ (\text{§}.124)$$
$$1 : \tfrac{1}{4}a = a : MH^2 \ (\text{§. } cit.)$$

$$MH^2 = \tfrac{1}{4}a^2$$

$$MH = \tfrac{1}{2}a = PR$$

Ergo HF = FM − HM = $x - \frac{1}{4}a$ = FP.

Theorema 1. Recta OF ex foco Parabolæ F ad tangentem TM ducta est media proportionalis inter quartam partem parametri & rectam FM ex foco F ad punctum Parabolæ M ductam.

Theorema

Tab. III. Fig. 39. *Theorema* 2. Si MR fuerit ad Parabolam in puncto M normalis, & ex R ducatur ad rectam FM ex foco F in idem Parabolæ punctum M ductam normalis RH; erit MH subnormali PR & HF portioni axis inter focum F & semiordinatam PM interceptæ æqualis.

PROBLEMA CLXXXIV.

Tab. III. Fig. 42. 419. *Invenire æquationem ad Parabolam externam; hoc est, punctis Parabolæ M ad rectam AO, quæ ad axem AR in vertice A perpendicularis, relatis.*

Sit abscissa $AN = x$, semiordinata $NM = y$, parameter $= a$. Quoniam AN *per hypoth.* & PM (§. 368) perpendiculares ad AR; erit AN ipsi PM parallela (§. 256 *Geom.*). Cum ex eadem ratione NM sit parallela ipsi AR; erit $AN = PM$ & $NM = AP$ (§. 257 *Geom.*); consequenter $PM = x$, $AP = y$, atque ideo $x^2 = ay$ (§. 388).

DEFINITIO XXXVI.

Tab. III. Fig. 44. 420. *Ellipsis* est linea curva, in qua quadratum semiordinatæ PM est ad rectangulum ex segmentis axis AP & PB ut parameter ad axem; hoc est, si $AB = a$, parameter $= b$, $PM = y$, $AP = x$, erit $b : a = y^2 : ax - x^2$, adeoque $ay^2 = abx - bx^2$.

COROLLARIUM I.

421. Est ergo $y^2 = bx - bx^2 : a$, hoc est, quadratum semiordinatæ æquatur rectangulo ex parametro in abscissam, demto tamen alio rectangulo ex eadem abscissa in quartam proportionalem ad axem, parametrum & abscissam.

COROLLARIUM II.

422. Fiat $y = 0$, erit $bx - bx^2 : a = 0$, adeoque $abx = bx^2$, consequenter $a = x$. Patet adeo curvam secare AB in A & B, consequenter in se redire.

Tab. III. Fig. 44.

COROLLARIUM III.

423. Fiat $x = \frac{1}{2}a$. Erit $y^2 = \frac{1}{2}ab - a^2 b : 4a = \frac{1}{4}ab$; consequenter $y = CD = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$. Ergo $DE = 2\sqrt{\frac{1}{4}ab} = \sqrt{ab}$, hoc est, axis minor ED est medius proportionalis inter majorem AB & parametrum; consequenter parameter tertia proportionalis ad axem majorem & minorem.

COROLLARIUM IV.

424. Quia $ay^2 = abx - bx^2$

erit $bx^2 = abx - ay^2$

$bx^2 : (bx - y^2) = a$

Invenitur ergo axis, parametro, abscissa & semiordinata datis; si fiat, 1° $b : y = y : \frac{y^2}{b}$

2° $x - \frac{y^2}{b}$ seu $\frac{bx - y^2}{b} : x = x : a$. Nimirum sit axis AB positione datus, & parameter AL ad eum perpendicularis. Datis abscissa AP & semiordinata PM, fiat $AN = AQ = PM$; ducta NF ipsi LQ parallela, erit $AF = y^2 : b$, consequenter $FP = x - y^2 : b$. Continuetur LA in G, factaque $AH = FP$ & $AG = AP$, ducatur GB ipsi HP parallela: erit $AB = bx^2 : (bx - y^2)$; adeoque axis quæsi[...]

Tab. III. Fig. 120.

COROLLARIUM V.

425. Quia $ay^2 = abx - bx^2$

erit $ay^2 : (ax - x^2) = b$;

Tab. IV. Fig. 45.

consequenter 1° $x : y = y : \frac{y^2}{x}$ & 2° $a - x : \frac{y^2}{x} = a : b$. Datis ergo axe AB, abscissa AP & semiordinata PM, ita invenitur parameter AG. 1°. Fiat $AI = PM$, & ex A per M ducatur recta AL. 2°. In I erigatur perpendicularis LI; erit (§. 268 *Geom.*) ob $AP : PM = AI : LI$; $LI = y^2 : x$. 3°. Producatur PM in O, donec $PO = LI = y^2 : x$, & ex B per O ducatur recta BG. 4°. In A excitetur per-

Tab. IV. Fig. 45. perpendicularis AG = [ob BP : PO = BA : GA] $ay^2 : (ax - x^2)$: quæ erit parameter AG.

COROLLARIUM VI.

426. $y = \sqrt{(\frac{abx - bxx}{a})} = \sqrt{(\frac{bx}{a}(a - x))}$.

Datis itaque axe AB & parametro AG, cuilibet abscissæ BP semiordinata PN assignatur, si parametro AG axi AB ad angulos rectos juncta ducatur GB, & erecta perpendiculari PN, fiat PL = PH, tandemque super AL semicirculus describatur. Est enim AB (a) : AG (b) = BP (x) : PH $(bx : a)$, & PN = $\sqrt{}$(AP. PL) = $\sqrt{}$(AP. PH) = $\sqrt{((a-x) \times (bx : a))} = \sqrt{(bx - bx^2 : a)}$.

PROBLEMA CLXXXV.

Tab. III. Fig. 44. 427. *Invenire distantiam foci a vertice* AF.

Sit AB $= a$, parameter $= b$, AF $= x$, erit FR $= \frac{1}{2}b$ (§. 395) &

$$\frac{1}{4}ab^2 = abx - bx^2 \quad (§. 420)$$

$$\frac{1}{4}ab = ax - x^2$$

$$x^2 - ax = -\frac{1}{4}ab$$

$$\frac{1}{4}a^2 \qquad \frac{1}{4}a^2$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab$$

$$\frac{1}{2}a - x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$$

$$\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b)} = x$$

Constructio. Ex B in L transferatur dimidia parameter, erit CL $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. In centro C erigatur perpendicularis CK occurrens semicirculo super AL descripto in K, erit CK $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$. Fiat itaque CF = CK; erit in F focus.

Tab. IV. Fig. 46. *Aliter.* Quoniam $\sqrt{\frac{1}{4}ab}$ = CD, (§. 423) si intervallo DF $= \frac{1}{2}a$ intersecetur AB in F, erit in F focus. Nam CD² $= \frac{1}{4}ab$ & DF² $= \frac{1}{4}a^2$. Ergo CF $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$, ut ante.

Æquatio secunda sequens suppeditat

Theorema. Si axis AB in foco F secetur; erit rectangulum ex segmentis axis AF. FB subquadruplum rectanguli ex parametro in axem, seu quadrato axis dimidii minoris CD æquale.

COROLLARIUM.

428. Distantia foci a centro est = $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$, hoc est quadratum ejus est differentia quadratorum DC & AC.

PROBLEMA CLXXXVI.

429. *Invenire rationem ordinatarum* PM *&* pm *in Ellipsi.*

Sit AB $= a$, parameter $= b$, AP $= x$, PM $= y$, A$p = z$, $pm = v$; erit

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = bx - bx^2 : a \\ v^2 = bz - bz^2 : a \end{array}\right) (§. 421).$$

Ergo $y^2 : v^2 = bx - \frac{bx^2}{a} : bz - \frac{bz^2}{a}$

h. e. $y^2 : v^2 = ax - x^2 : az - z^2$

seu PM² : pm^2 = AP. BP : Ap. pB

Theorema. In Ellipsi quadrata semiordinatarum sunt inter se ut rectangula ex axis segmentis.

COROLLARIUM I.

430. Est igitur etiam DC² : PM² = CB² : AP. PB, consequenter DC² : CB² = PM² : AP. PB (§. 173 *Arithm.*), hoc est, quadratum axis minoris est ad quadratum majoris ut quadratum semiordinatæ ad rectangulum ex axis segmentis.

COROLLARIUM II.

431. Sit CP = x; erit AP = $\frac{1}{2}a - x$, & PB $= \frac{1}{2}a + x$; consequenter AP. PB = $\frac{1}{4}a^2 - x^2$. Habemus adeo (§. 430)

$$\frac{1}{4}ab : \frac{1}{4}a^2 = y^2 : \frac{1}{4}a^2 - xx$$

hoc est $b : a =$

$$ay^2 = \frac{1}{4}a^2 b - bx^2$$

$$y^2 = \frac{1}{4}ab - bx^2 : a$$

En æquationem aliam, quæ naturam Ellipsis definit, abscissis a centro C computatis.

COROL-

COROLLARIUM III.

432. Sit $CD = d$, $AC = r$, $PC = x$; erit $AP = r - x$ & $PB = r + x$; consequenter $AP.PB = r^2 - x^2 = AC^2 - PC^2$. Habemus ergo, ut ante

$$d^2 : r^2 = y^2 : r^2 - x^2$$

unde

$$r^2 y^2 = d^2 (r^2 - x^2)$$
$$y^2 = d^2 (r^2 - x^2) : r^2$$

En æquationem adhuc aliam, quæ itidem Ellipsis naturam definit, abscissis denuo a centro C computatis, & qua in subsequentibus ob commoditatem utemur.

COROLLARIUM IV.

433. Crescentibus adeo abscissis x, semiordinatæ decrescere debent. Quodsi tandem fiat $x = r$; erit $r^2 - x^2 = 0$; consequenter $y^2 = 0$, adeoque Ellipsis cum axe tandem concurrit. Unde porro intelligitur, Ellipsin esse lineam in se redeuntem.

PROBLEMA CLXXXVII.

Tab. IV. Fig. 46. 434. *Determinare quantitatem rectarum* FM *&* fM *ex utroque foco* F *&* f *ad idem peripheriæ punctum* M *ductarum.*

Sint $FC = fC = c$, reliqua ut ante: erit $PC = \frac{1}{2}a - x$, $Pf = c + \frac{1}{2}a - x$, $PF = c - \frac{1}{2}a + x$, adeoque $PF^2 = c^2 - ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx - ax + x^2, = (\frac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + x^2$; $Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 - 2cx - ax + x^2 = (\frac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - ax + x^2$. Est vero (§.430),

$$CB^2 : DC^2 = AP.PB : PM^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 : \tfrac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - xx : PM^2$$

Habemus adeo

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$
$$PF^2 = (\tfrac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + xx$$
$$FM^2 = (\tfrac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$
$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

Porro

Tab. IV. Fig. 46.

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$
$$Pf^2 = (\tfrac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - ax + xx$$
$$fM^2 = (\tfrac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$
$$fM = \tfrac{1}{2}a + c - 2cx : a$$
$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$
$$fM + FM = a = AB$$

Theorema. Summa rectarum FM & fM ex utroque foco F & f ad idem peripheriæ punctum M ductarum æquatur axi majori AB.

COROLLARIUM I.

435. Datis ergo axibus conjugatis, Ellipsis facillime describitur. Determinatis enim focis F & f (§.427), clavi in iis defigantur & his filum circumligetur FMf axi majori AB æquale. Quodsi immisso stylo filum extendatur & circa clavos circumducatur, Ellipsis designabitur.

COROLLARIUM II.

436. Immo eodem modo geometrice determinatur quodlibet punctum Ellipseos M. Axis enim AB dividatur pro arbitrio utcunque in duas partes, & parte [illegible] foco F, altera ex foco f describantur arcus: duo enim hi arcus se mutuo secabunt in puncto M. Possunt autem una eademque opera quatuor simul determinari puncta, singula nempe in singulis quadrantibus AD, DB, BE & EA.

PROBLEMA CLXXXVIII.

437. *Determinare quantitatem rectæ* MR *ex quovis Ellipsis puncto* M *ad axem conjugatum* DC *perpendicularis.* Tab. III. Fig. 44.

Sit $MR = PC = v$, $AC = r$; erit $AP = r - v$, & $PB = r + v$. Sit $DR = z$, $DC = c$; erit $RC = PM = c - z$; consequenter (§.430)

DC²:

Tab. III. Fig. 44.

$DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP . PB$

$cc : rr = z^2 - 2cz + c^2 : r^2 - v^2$

$c^2 : z^2 - 2cz + c^2 = r^2 : r^2 - v^2$ (§.173 *Arith.*)

$2cz - z^2 : c^2 = v^2 : r^2$ (§.193 *Arithm.*)

$2cz - z^2 : v^2 = c^2 : r^2$ (§.173 *Arithm.*)

$DR . RE : RM^2 = DC^2 : AC^2$.

Theorema. Rectangulum ex segmentis axis conjugati est ad quadratum semiordinatæ ipsius, ut quadratum axis conjugati ad quadratum axis majoris.

COROLLARIUM I.

438. Habent ergo ad axem conjugatum coordinatæ eandem relationem, quæ inter coordinatas ad axem majorem intercedit.

COROLLARIUM II.

439. Quoniam $v^2 = \frac{2r^2 z}{c} - \frac{r^2 z^2}{c^2}$ (§.437); si fiat $2r^2 : c = p$, erit $v^2 = pz - pz^2 : 2c$. Est adeo p parameter axis conjugati (§.420). Quare parameter axis conjugati tertia proportionalis ad $2c$ & $2r$, seu ad axem conjugatum & axem majorem.

PROBLEMA CLXXXIX.

Tab. IV. 440. *Determinare subtangentem* PT *& subnormalem* PR *in Ellipsi.*

Eadem prorsus methodo utendum, qua in Parabola usi sumus. Nimirum sit parameter $= b$, axis major $= a$, AP $= x$, PM $= y$, MR $= t$, RA $= z$; erit PR $= z - x$, consequenter $PM^2 = t^2 - z^2 + 2zx - x^2$. Est vero etiam $PM^2 = bx - bx^2 : a$ (§.421). Quare

$t^2 - z^2 + 2zx - x^2 = bx - bx^2 : a$

$at^2 - az^2 + 2azx - ax^2 = abx - bx^2$

$ax^2 - bx^2 + abx - 2azx + az^2 - at^2 = 0$

$$x^2 + \frac{ab - 2az}{a - b}x + \frac{az^2 - at^2}{a - b} = 0$$

Cum ex superioribus constet, æquationem hanc duas habere debere radices æquales; ponatur ut supra (§.410) $x - v = 0$, erit $x^2 - 2vx + v^2 = 0$, æquatio eadem cum anteriore, consequenter

$(ab - 2az) : (a - b) = -2v$

$ab - 2az = -2av + 2bv$

$ab + 2av - 2bv = 2az$

$\frac{1}{2}b + v - bv : a = z$

Est vero $v = x$, *per hypoth.* Quare si x pro v substituatur, prodibit $z = \frac{1}{2}b + x - bx : a = AR$. Ergo $PR = \frac{1}{2}b + x - bx : a - x = \frac{1}{2}b - bx : a = (\frac{1}{2}ab - bx) : a$, quæ expressio hanc suppeditat analogiam:

$a : b = \frac{1}{2}a - x : PR$

Theorema. In Ellipsi est ut axis primus ad parametrum, ita distantia semiordinatæ a centro ad subnormalem.

Porro $PR : PM = PM : PT$ (§.409).

$$\frac{\frac{1}{2}ab - bx}{a} : y = y : \frac{ay^2}{\frac{1}{2}ab - bx}$$

Est vero $ay^2 = abx - bx^2$ (§.420). Ergo $PT = (abx - bx^2) : (\frac{1}{2}ab - bx) = (ax - x^2) : (\frac{1}{2}a - x)$. Habemus adeo

$\frac{1}{2}a - x : x = a - x : PT$

$PC : AP = PB : PT$

Ergo $PB . AP = CP . PT$

Theorema. In Ellipsi rectangulum ex segmentis axis æquatur rectangulo ex distantia semiordinatæ a centro in subtangentem.

Tandem $AT = PT - AP = (ax - x^2) : (\frac{1}{2}a - x) - x = (ax - x^2 - \frac{1}{2}ax + x^2) : (\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$. Quare

$\frac{1}{2}a - x : \frac{1}{2}a = x : AT$

$PC : AC = AP : AT$

Theo-

Theorema. Ut diftantia femiordinatæ a centro ad axem dimidium, ita abfciffa ad portionem fubtangentis inter verticem Ellipfis & tangentem interceptam.

COROLLARIUM I.

441. Quia PC : AC = AP : AT; erit etiam PC : AP = AC : AT (§. 173 *Arithm.*); confequenter PC : PC + PA = AC : CA + AT (§. 190 *Arithm.*), hoc eft, PC : AC = AC : CT.

COROLLARIUM II.

442. Eft ergo AC^2 = PC. CT (§. 377 *Geom.*), hoc eft quadratum dimidii axis AC æquatur rectangulo ex CT in PC.

COROLLARIUM III.

443. Crefcentibus abfciffis x, decrefcit $\frac{1}{2}a - x$; confequenter ratio $\frac{1}{2}a - x : \frac{1}{2}a$ minuitur (§. 203 *Arithm.*). Abfciffa igitur major ad AT rationem minorem habet quam minor (§. 440).

COROLLARIUM IV.

444. Si $x = \frac{1}{2}a$, hoc eft, quando AC fit abfciffa, $\frac{1}{2}a - x = 0$; confequenter abfciffa rationem infinitam habet ad AT, adeoque tangens TM cum fubtangente TP nunquam concurrit. Eft igitur axi parallela.

COROLLARIUM V.

445. Hinc vero ulterius liquet, quantitatem finitam AC refpectu infinitæ pro nihilo habendam effe.

PROBLEMA CXC.

446. *Determinare quantitatem rectanguli ex fubtangente* PT *in abfciffam* CP.

Sit PC $= x$, PT $= t$, AC $= r$; erit AP $= r - x$, & PB $= r + x$, CT $= t + x$. Quoniam (§. 441)

$$PC : AC = AC : CT$$
$$x : r = r : t + x$$

erit. $tx + xx = r^2$

$$tx = r^2 - x^2 = AP.\ PB$$

Theorema. Rectangulum ex fubtangente PT in abfciffam CP æquatur rectangulo ex fegmentis axis. Tab. IV. Fig. 47.

PROBLEMA CXCI.

447. *Determinare valorem fubtangentis* PT, *abfciffis a centro computatis.*

Sit AC $= r$, PC $= v$, erit PB $= r + v$, AP $= r - v$; confequenter (§. 440)

$$PC : PB = AP : PT$$
$$v : r + v = r - v : t$$
$$tv = r^2 - v^2$$

Theorema. Rectangulum ex fubtangente & diftantia ordinatæ a centro æquatur differentiæ quadrati hujus diftantiæ a quadrato femiaxis tranfverfi.

PROBLEMA CXCII.

448. *Determinare quantitatem fubtangentis* KE *in axe conjugato.*

Si tangens TM continuetur, donec axi conjugato continuato in E occurrat, & ex M demittatur perpendicularis MK = PC (§. 226 *Geom.*), erit ob parallelifmum rectarum KM & CT (§. 256) angulus T = EMK (§. 233 *Geom.*). confequenter (§. 267 *Geom.*)

$$TP : PM = MK : KE$$
$$\frac{r^2 - v^2}{v} : y = v : \frac{v^2 y}{r^2 - v^2}$$

Quodfi fiat DC $= c$, DK $= z$, erit KC $=$ PM $= y = c - z$ & $v^2 = \frac{2r^2 z}{c} - \frac{r^2 z^2}{c^2}$ (§. 437). Hinc $r^2 - v^2 = (c^2 r^2 - 2r^2 cz + r^2 z^2) : c^2$, & $v^2 y (= 2r^2 cz - r^2 z^2)(c - z) : c^2$. Quare $v^2 y : (r^2 - v^2) = (2r^2 cz - r^2 z^2)(c - z) : (c^2 r^2 - 2r^2 cz + r^2 z^2) = (2r^2 cz - r^2 z^2) : (cr^2 - r^2 z) = (2cz - z^2) : (c - z)$.

Expreffio itaque fubtangentis in axe conjugato eadem, quæ in tranfverfo (§. 440).

PROBLEMA CXCIII.

Tab. IV. Fig. 48. 449. *Si recta* HN *tangenti* TM *parallela ducatur, & punctum contactus* M *atque centrum* C *jungantur recta* MC, *quæ secat* HN *in* G; *determinare rationem rectarum* HG *&* GN.

Sit AB $= a$, PM $= y$, PC $= c$, FG $=$ KD $= t$, GI $=$ KS $= z$, erit IF $=$ HL $=$ DS $= t - z$, $\text{HL}^2 = t^2 - 2tx + z^2$. Opera nunc danda, ut HL^2 alia adhuc ratione exprimatur. Est itaque (§. 268 *Geom.*)

PM : PC = FG : FC

$y : c = t : (tc : y)$

Et quia △ TMP ∽ FOG (§. 233 & 267 *Geom.*), & GIH ∽ FOG (§. 268 *Geom.*); erit etiam TMP ∽ GIH; consequenter (§. 267 *Geom.*)

PM : PT = GI : HI

$$y : \frac{ax - x^2}{c} = z : \frac{(ax - x^2)z}{cy} \text{ (§. 440)}$$

Ponamus brevitatis gratia $ax - x^2 = v$; erit FL $=$ HI $= vz : cy$. Ergo CL $=$ FL $+$ FC $= tc : y + vz : cy = (tc^2 + vz) : cy$. Hinc AL $=$ AC $-$ CL $= \frac{1}{2}a - (tc^2 + vz) : cy = (\frac{1}{2}acy - tc^2 - vz) : cy$ LB $=$ AB $-$ AL $= a - (\frac{1}{2}acy - tc^2 - vz) : cy = (\frac{1}{2}acy + tc^2 + vz) : cy$. Est vero (§. 429)

AP. PB : LA. LB $=$ $\text{PM}^2 : \text{HL}^2$

$$x^2 : \frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z^2}{c^2y^2} = y^2 : \text{HL}^2$$

Hinc $\text{HL}^2 =$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z}{c^2v} = t^2 - 2tz + z^2$$

$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z^2 = t^2c^2v - 2tc^2vz + z^2c^2v$$

$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - v^2z^2 = t^2c^2v + z^2c^2v$$

$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v = v^2z^2 + c^2vz^z$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^2 - t^2c^2v}{v^2 + c^2v} = z^2$$

Quodsi jam KN dicatur z, reliqua maneant ut ante; reperietur eodem modo $z^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v}{v^2 + c^2v}$; consequenter $\text{KN}^2 = \text{KS}^2$, adeoque & KN $=$ KS.

Est vero (§. 268 *Geom.*) KN : KS $=$ GN : HG. Ergo GN $=$ HG.

Theorema. Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, recta MC per contactum M & centrum Ellipsis C transiens eam bifariam secat.

COROLLARIUM I.

450. Est ergo MQ diameter, HN ejus ordinata (§. 368, 370).

COROLLARIUM II.

451. Cum vero parallelæ HN quamcunque aliam, & rectæ MQ itidem quamcunque aliam substituere liceat; omnes rectæ per centrum transeuntes & in peripheria utrinque terminatæ sunt diametri, ipsisque coordinatæ sunt tangentibus parallelæ.

COROLLARIUM III.

452. Est ergo etiam ECV ordinatæ HN parallela & per centrum C transiens diameter, consequenter MQ & EV sunt diametri conjugatæ (§. 374).

PROBLEMA CXCIV.

453. *Si ex diametri* VE *tangenti* TM *parallelæ extremitate* V *perpendicularis* VR *demittatur in axem* AB; *determinare quantitatem rectæ* RC.

Sit CA $= r$, CR $= v$, PT $= t$, PC $= x$; erit AR $= r - v$, RB $= r + v$; consequenter AP. PB $= tx$ (§. 446), AR. RB $= r^2 - v^2 = tx + x^2 - v^2$ (§. 447). Quoniam VE ipsi TM parallela, *per hypoth.* erit MTC $=$ TCV (§. 233 *Geom.*). Quare cum anguli ad P & R sint recti, *per*

per construct. erit (§. 267 *Geom.*), PM : RV = TP : RC. Hinc PM² : RV² = TP² : RC² (§.124). Est vero etiam PM² : RV² = AP. PB : AR. RB (§.429). Ergo (§.167 *Arithm.*)

AP. PB : AR. RB = TP² : RC²

$$tx : tx + x^2 - v^2 = t^2 : v^2$$

$$tv^2 x = t^3 x + t^2 x^2 - t^2 v^2$$

$$v^2 x = t^2 x + t x^2 - t v^2$$

$$t v^2 + x v^2 = t^2 x + t x^2$$

$$v^2 = tx$$

hoc est, CR² = AP. PB.

consequenter AP : CR = CR : PB.

PROBLEMA CXCV.

454. *Determinare quantitatem semiordinatæ* GH *ad diametrum Ellipsis* MQ.

Ductis KI ipsi FD & KG ipsi AB parallelis, fiat CP $= x$, AC $= r$, PT $= t$, PM $= y$, KG = IL $= m$, LC $= n$. Erit (§.268 *Geom.*)

CP : PM = CL : LG

$$x : y = n : \frac{ny}{x}$$

Porro ob parallelas TM & HN *per constr.* ang. TSI = KHG (§.233 *Geom.*) adeoque ob rectos ad I & K *per constr.* T = HGK (§.246 *Geom.*), & hinc (§. 267 *Geom.*).

TP : PM = KG : KH

$$t : y = m : \frac{my}{t}$$

$$HI = KI - KH = \frac{ny}{x} - \frac{my}{t}$$

$$CI = CL + LI = n + m$$

$$HI^2 = \frac{n^2y^2}{x^2} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2}$$

$$CI^2 = n^2 + 2mn + m^2$$

AI. IB = AC² − CI² $= r^2 - n^2 - 2mn - m^2$ (§. 432). Tab. IV. *Fig.*49.

Est vero (§.429)

AP. PB : AI. IB = PM² : HI²

$$r^2 - x^2 : r^2 - n^2 - 2mn - m^2 = y^2 : HI^2$$

Unde elicitur $HI^2 = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$

Quare

$$\frac{n^2y^2}{x^2} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

Sed $\frac{2mny^2}{tx} = \frac{2mny^2}{r^2 - x^2}$ (§.446). Ergo

$$\frac{n^2y^2}{x^2} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

$$\frac{n^2}{x^2} + \frac{m^2}{t^2} = \frac{r^2 - n^2 - m^2}{r^2 - x^2}$$

$$n^2 + \frac{m^2x^2}{t^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2}$$

$$\frac{m^2x^4}{t^2x^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2} - n^2$$

$$\frac{m^2x^4}{t^2x^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2 + n^2x^2}{r^2 - x^2}$$

$$= \frac{r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2}{r^2 - x^2}$$

hoc est, ob $t^2x^2 = (r^2 - x^2)^2$ (§.4[illegible])

$$m^2x^4 = (r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2)(r^2 - x^2)$$

$$= r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + m^2x^4 + r^2n^2x^2$$

$$0 = r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + r^2n^2x^2$$

$$0 = r^2 - m^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} - x^2 + n^2$$

$$m^2 = r^2 + n^2 - x^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} = KG^2.$$

Sit jam CM $= v$, erit (§.268 *Geom.*)

CP : CM = CL : CG

$$x : v = n : (vn : x)$$

Ergo MG = MC − CG $= v - vn : x$, & GQ = GC

Tab. IV. Fig. 49. $= GC + MC = v + vn : x$, MG. GQ $= v^2 - v^2 n^2 : x^2$

Quod si $v^2 - v^2 n^2 : x^2 =$ MG. GQ multiplices per $r^2 - x^2 = CR^2$ (§. 453) & $r^2 + n^2 - x^2 - r^2 n^2 : x^2 = KG^2$ per $v^2 = CM^2$; utrobique prodit $r^2 v^2 + n^2 v^2 - x^2 v^2 - r^2 n^2 v^2 : x^2$. Est itaque MG. QG. $CR^2 = KG^2$. CM^2, adeoque (*§. 299 Arithm.*) $KG^2 : CR^2 =$ MG. QG : CM^2. Jam ob parallelas EV & HN *per hypoth.* MCV = MGH (§. 233 *Geom.*), & ob parallelas KG & RC *per constr.* MGK = MCR (§. *cit.*). Ergo KGH = RCV (§. 91 *Arith.*), consequenter $KG^2 : CR^2 = HG^2 : CV^2$ (§. 267 *Geom.* & §. 260 *Arithm.*). Unde tandem habetur (§. 167 *Arithm.*) MG. QG : $CM^2 = HG^2 : CV^2$.

Theorema. In Ellipsi est quadratum semiordinatæ ad quadratum semidiametri conjugatæ ut rectangulum ex segmentis diametri ad quadratum semidiametri.

COROLLARIUM.

455. Sit MQ $= a$, EV $= c$, MG $= x$, HG $= y$, erit GQ $= a - x$; consequenter (*§. 454*)

$$ax - x^2 : \tfrac{1}{4}a^2 = y^2 : \tfrac{1}{4}c^2$$

$$\tfrac{1}{4}c^2 ax - \tfrac{1}{4}c^2 x^2 = \tfrac{1}{4}a^2 y^2 \qquad \tfrac{1}{4}a$$

$$c^2 x - \frac{c^2 x^2}{a} = ay^2$$

Fiat $\frac{c^2}{a} = b$, erit $c^2 = ab$.

Hinc $abx - bx^2 = ay^2$.

Eadem ergo est relatio semiordinatarum ad diametros, quæ ad axem (§. 420), & diametri parameter est tertia proportionalis ad diametros a & c.

SCHOLION.

456. *Cum ex hac æquatione fundamentali reliquas Ellipsis proprietates respectu axis deduxerimus; evidens est, omnes quoque istas proprietates Ellipsi competere intuitu diametri.*

PROBLEMA CXCVI.

457. *Determinare quantitatem rectæ FO ex foco F ad tangentem Ellipsis TM perpendicularis.*

Sit RM ad tangentem TM normalis: erunt MR & OF inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*); adeoque TR : RM = TF : FO (§. 268 *Geom.*). Porro cum in triangulo rectangulo TMR semiordinata PM sit ad hypothenusam TR perpendicularis (*§. 368, 370*); erit △ PMR ∽ △ TMR (§. 329 *Geom.*), adeoque TR : RM = RM : PR (§. 267 *Geom.*). Est ergo RM : PR = TF : FO (§. 167 *Arithm.*); consequenter FO. RM = PR. TF (§. 378 *Geom.*).

Theorema. Rectangulum ex subnormali PR in differentiam distantiæ foci a semiordinata atque subtangentis TF æquale est rectangulo ex normali MR & recta ex foco ad tangentem perpendiculari FO.

PROBLEMA CXCVII.

458. *Si in* F *fuerit focus Ellipsis &* MR *ad eam normalis*, HR *vero normalis ad* FM *ex foco ad punctum contactus ductam; determinare quantitatem segmentorum* MH *&* HF.

Sit parameter $= b$, axis $= a$, distantia foci a centro $= c$, erit FM $= \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$ (§. 434), PR $= (\tfrac{1}{2}ab - bx) : a$ (§. 440), AT $= \tfrac{1}{2}ax : (\tfrac{1}{2}a - x)$ (§. *cit.*) & AF $= \tfrac{1}{2}a - c$, consequenter TF $= \tfrac{1}{2}ax : (\tfrac{1}{2}a - x) + \tfrac{1}{2}a - c = ax : (a - 2x) + \tfrac{1}{2}a - c = (\tfrac{1}{2}a^2 - ac + 2cx) : (a - 2x)$. Ducatur FO ad tangentem TM normalis, erit OF parallela ipsi MR (§. 256 *Geom.*); adeoque angulus OFM ipsi HMR æqualis (§. 233 *Geom.*) & hinc

& hinc, ob rectos ad O & H æquales (§.145 *Geom.*), reperitur (§.267 *Geom.*) $FM : FO = MR : MH$, hoc est, $FM : \frac{PR.TF}{MR} = MR : MH$ (§.457). Est itaque $MH = (PR.TF) : FM$; consequenter $FM : TF = PR : MH$. Quare

$$\tfrac{1}{2}a - c + \frac{2cx}{a} : \frac{\frac{1}{2}a^2 - ac + 2cx}{a - 2x} = \frac{ab - 2bx}{2a} : MH$$

$$a^2 - 2ac + 4cx : \frac{\frac{1}{2}a^2 - ac + 2cx}{a - 2x} = ab - 2bx : MH$$

(§.184 *Arith.*)

$$\frac{a^2 - 2ac + 4cx}{a - 2x} : \frac{\frac{1}{2}a^2 - ac + 2cx}{a - 2x} = b : MH$$

(§.183 *Arith.*)

Est ergo $MH = \frac{1}{2}b$ (§.149 *Arith.*).

Theorema. Si MR fuerit ad Ellipsin normalis, & ex R ducatur ad rectam FM ex foco F in idem Ellipseos punctum M ductam normalis HR; erit MH parametro dimidiæ æqualis.

DEFINITIO XXXVII.

459. *Hyperbola* est linea curva, in qua $ay^2 = abx + bxx$, hoc est, $b : a = y^2 : ax + x^2$, seu quadratum semiordinatæ est ad rectangulum ex abscissa in rectam compositam ex eadem abscissa & recta quadam constante, quæ *Axis transversus*, *vel Latus transversum* audit, ut recta alia constans, quæ *axis Parameter* dicitur, ad axem transversum.

COROLLARIUM.

460. Est ergo etiam hic ut in Ellipsi $y^2 = bx + bx^2 : a$, $b = ay^2 : (ax + xx)$, $a = bxx : (y^2 - bx)$ &c. nisi quod hic contraria signa occurrant (§.421 & seqq.).

DEFINITIO XXXVIII.

461. In Hyperbola *Axis conjugatus* dicitur media proportionalis inter axem transversum & parametrum, quia talis est axis conjugatus in Ellipsi (§.423).

DEFINITIO XXXIX.

462. Si axis transversus AB axi AX in directum jungitur & in C bifariam dividitur; punctum C *Centrum* appellatur. Tab. III. Fig. 37.

PROBLEMA CXCVIII.

463. *Datis parametro & axe transverso AB, invenire distantiam foci a vertice AF.*

Sit parameter $= b$, $AB = a$, erit $FN = \frac{1}{2}b$ (§.395) & (§.459),

$$b : a = \tfrac{1}{4}bb : ax + xx$$

$$\tfrac{1}{4}abb = abx + bxx$$

$$\tfrac{1}{4}ab = ax + xx$$

$$\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{4}aa + ax + xx$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} = \tfrac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} - \tfrac{1}{2}a = x$$

Invenitur adeo x quærendo inter $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ mediam proportionalem, ac inde auferendo $\frac{1}{2}a$. Vel, quia $\sqrt{\frac{1}{4}ab} = CE$ (§.461), si fiat $AG = EC$, erit $GC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)}$. Quare cum sit $AC = \frac{1}{2}a$, si ex centro C radio C describatur arcus GF axem secans in F, erit $AF = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)} - \frac{1}{2}a$, adeoque in F focus.

COROLLARIUM I.

464. Est adeo distantia foci a centro $FC = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)}$. Quare si $FC^2 = c^2$, erit $CE^2 = c^2 - \frac{1}{4}a^2$.

COROLLARIUM II.

465. Quia $ax + xx = \frac{1}{4}ab$ & $ax + xx = AF . FB$, $\frac{1}{4}ab$ vero quadratum semiaxis conjugati (§.461), rectangulum ex AF in FB huic quadrato æquale est.

PROBLEMA CXCIX.

Tab. III. Fig. 40. 466. *Invenire rationem semiordinatarum* PM *&* pm.

Sit axis transversus $= a$, parameter $= b$, $AP = x$, $PM = y$, $Ap = v$, $pm = z$; erit (§.460)

$$y^2 : z^2 = bx + \frac{bxx}{a} : bv + \frac{bv^2}{a}.$$
$$= ax + xx : av + v^2 \text{ (§.124).}$$
$$= (a + x)x : (a + v)v$$

Theorema. In Hyperbola quadrata semiordinatarum sunt inter se ut rectangula ex abscissa in rectam quandam compositam ex abscissa & axe transverso.

COROLLARIUM.

467. Crescentibus adeo abscissis x, crescunt quoque rectangula $ax + x^2$, consequenter & quadrata semiordinatarum y^2, adeoque semiordinatæ ipsæ. Hyperbola igitur continuo ab axe recedit.

PROBLEMA CC.

468. *Invenire rationem axis transversi ad axem conjugatum.*

Si axis transversus $= a$, parameter $= b$, erit quadratum axis conjugati $= ab$ (§.461). Hoc ergo ad quadratum transversi, ut ab ad aa, hoc est, b ad a (§.124).

Theorema. Quadratum axis conjugati est ad quadratum transversi, ut parameter ad axem transversum.

COROLLARIUM.

Tab. III. Fig. 37. 469. Quoniam $b : a = PM^2 : AP.\ PB$ (§. 459); quadratum axis conjugati est ad quadratum transversi ut quadratum semiordinatæ ad rectangulum ex abscissa in compositam ex abscissa & axe transverso.

PROBLEMA CCI.

470. *Sint duæ Hyperbolæ æquales, eandem parametrum, eundem axem transversum atque conjugatum habentes, quarum axes* AN *&* BY *cum axe transverso communi* AB *in directum jacent. Ex focis* F *&* f *ad punctum* M *Hyperbolæ unius ducantur rectæ* fM *&* FM: *determinare quantitatem harum rectarum.*

Sit $FC = fC = c$, reliqua ut in præcedentibus: erit $AF = c - \frac{1}{2}a$, $Af = c + \frac{1}{2}a$, $PF = x - c + \frac{1}{2}a$, $Pf = c + \frac{1}{2}a + x$

$PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \frac{1}{4}a^2$,
$Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{2}a^2 + 2cx + ax + x^2$.

Jam (§.464) quadratum semiaxis conjugati $CE = cc - \frac{1}{4}aa$. Porro (§.469)

$$AC^2 : CE^2 = AP.\ BP : PM^2$$
$$\tfrac{1}{4}aa : cc - \tfrac{1}{4}aa = ax + xx : PM^2$$

Est itaque

$$PM^2 = -ax - xx + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$FM^2 = c^2 - ac + \tfrac{1}{4}a^2 - 2cx + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$
$$FM = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

Similiter

$$PM^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$Pf^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2$$
$$fM^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a}$$
$$fM = c + \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$
$$FM = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$
$$fM - FM = a = AB$$

COROLLARIUM I.

471. Datis ergo axe transverso & distantia a vertice, Hyperbola motu continuo ita describitur. Scilicet in focis F & f defigantur clavi aut paxilli, quorum alteri in F annectatur filum FMC, altero sui extremo C regulæ Cf alligatum, quæ ipsum superet axe transverso AB. Altera regulæ extremitas perforata clavo f injiciatur, & stilo ad filum applicato regula emoveatur.

COROL-

COROLLARIUM II.

472. Iisdem datis, puncta quotcunque Hyperbolæ determinantur, si ex foco f intervallo quocunque AB majore describatur arcus, facto $fb =$ AB, intervallo residuo bm ex F ducatur arcus alius priorem in m intersecans, erit enim ob $fm - Fm =$ AB, m punctum hyperbolæ (§. 470) Vel commodius hyperbola ita describitur: Fiat AB axi transverso æqualis, determinenturque foci f & F (§. 463.). Jungatur ipsi fO recta fK sub angulo acuto quocunque, & ex centro f radiis ipsa fA majoribus describantur arcus quotcunque concentrici secantes rectam fK in I, II, III, &c. Fiat fL $=$ AB, & ex foco F intervallis LI, LII, LIII &c. intersecentur arcus isti utrinque in 1, 2, 3; erunt puncta 1, 2, 3 &c. in Hyperbola. Est enim fI $= f$1, fII $= f$2, fIII $= f$3 &c. (§. 40 *Geom.*). Sed F1 $=$ LI, F2 $=$ LII, F3 $=$ LIII &c. *per constr.* Ergo f1 $-$ F1 $= f$I $-$ LI $=$ AB, f2 $-$ F2 $= f$II $-$ LII $=$ AB, f3 $-$ F3 $= f$III $-$ LIII $=$ AB &c. consequenter puncta 1, 2, 3, &c. in Hyperbola (§. 470.).

Tab. IV. Fig. 50. Tab. XII. Fig. 121.

PROBLEMA CCII.

473. *Determinare situm rectæ* DE, *quæ per verticem* A *ipsi ordinatæ* Mm *parallela ducitur.*

Tab. IV. Fig. 51.

Sit AP $= x$, PM $= y$, parameter $= b$, axis transversus $= a$: erit $y^2 = bx + bx^2 : a$ (§. 460). Quoniam in vertice A fit $x = 0$; erit etiam $y = 0$; consequenter DE tota extra Hyperbolam cadit, eamque adeo tangit.

Theorema. Si recta DE per verticem A ordinatis Mm parallela ducatur, Hyperbolam in A tangit.

DEFINITIO XL.

474. Si recta DE per verticem Hyperbolæ A ordinatis Mm parallela ducatur, fiatque axi conjugato æqualis, nempe pars DA & AE semiaxi; præterea ex centro C per D & E agantur rectæ CF & CG: rectæ hæ dicuntur *Asymptotæ Hyperbolæ.*

Tab. IV. Fig. 51.

COROLLARIUM I.

475. Quoniam (§. 268 *Geom.*) CA : AE $=$ CP : Pr, & CA : (DA) AE $=$ CP : PR, erit P$r =$ PR (§. 177 *Arithm.*). Quare cum sit PM $=$ Pm (§. 370); erit quoque MR $= mr$ (§. 91 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

476. Si AI ducatur parallela ipsi DC & AH ipsi CE; erit EA : ED $=$ AI : DC (§. 268 *Geom.*). Sed EA $= \frac{1}{2}$ED (§. 474). Ergo AI $= \frac{1}{2}$DC $= \frac{1}{2}$CE. Et quoniam porro EA : AD $=$ EI : IC (§. 268 *Geom.*); erit EI $=$ CI $= \frac{1}{2}$EC; consequenter AI $=$ CI (§. 87).

DEFINITIO XLI.

477. Quadratum rectæ CI vel AI dicitur *Potentia Hyperbolæ.*

PROBLEMA CCIII.

478. *Determinare potentiam Hyperbolæ.*

Sit CA $= \frac{1}{2}a$, AE $= \frac{1}{2}c$, erit CE $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)}$ (§. 417 *Geom.*); adeoque CI $= \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)}$. Ergo CI^2 $= \frac{1}{16}(aa + cc)$.

Theorema: Potentia Hyperbolæ est decima sexta pars quadratorum axium conjugatorum, vel quarta pars quadratorum semiaxium conjugatorum.

COROLLARIUM.

479. Quoniam $cc = ab$ (§. 461); erit CI^2 $= \frac{1}{16}(aa + ab) = \frac{1}{4}a(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b)$; hoc est potentia Hyperbolæ æquatur rectangulo ex quarta parte axis transversi in quartam partem aggregati ex axe transverso & parametro.

PROBLEMA CCIV.

480. *Determinare differentiam quadratorum* PM *&* PR.

Quoniam

Tab. IV. *Fig.* 51. Quoniam $DA = \sqrt{\tfrac{1}{4}ab}$ (§. 461), & $CP = \tfrac{1}{2}a + x$; præterea (§. 268 *Geom.*)

$$CA : AD = CP : PR$$
$$\tfrac{1}{2}a : \sqrt{\tfrac{1}{4}ab} = \tfrac{1}{2}a + x : PR$$

erit $PR = (\tfrac{1}{2}a\sqrt{\tfrac{1}{4}ab} + x\sqrt{\tfrac{1}{4}ab}) : \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{1}{4}ab} + 2x\sqrt{\tfrac{1}{4}ab} : a$. Quare

$$PR^2 = \tfrac{1}{4}ab + bx + bx^2 : a$$
$$PM^2 \qquad bx + bx^2 : a \text{ (§. 460)}$$
$$PR^2 - PM^2 = \tfrac{1}{4}ab = DA^2$$

Theorema. Si in Hyperbola femiordinata PM producatur, donec afymptoto in R occurrat; erit differentia quadratorum PM & PR æqualis quadrato femiaxis conjugati DA.

COROLLARIUM.

481. Crefcente adeo femiordinata PM, decrefcit recta MR, adeoque Hyperbola ad afymptotum propius accedit. Nunquam tamen cum ea concurrere poteft, quia cum fit $PR^2 - PM^2 = DA^2$, fieri nequit, ut $PR^2 - PM^2 = 0$ evadat.

SCHOLION.

482. *En rationem, cur lineas CF & CG* ἀσυμπτώτους *feu non coincidentes vocaverint Veteres.*

PROBLEMA CCV.

483. *Determinare quantitatem rectanguli ex MR in Mr.*

Sit $PR = z$, $PM = y$; erit $MR = z - y$, $Mr = z + y$, confequenter $MR . Mr = z^2 - y^2 = PR^2 - PM^2$.

Theorema. In Hyperbola rectangulum ex MR & *Mr* æquatur differentiæ quadratorum PR^2 & PM^2.

COROLLARIUM.

484. Idem ergo rectangulum æquale eft quadrato femiaxis conjugati DA (§. 480), confequenter omnia rectangula eodem modo formata æqualia funt.

PROBLEMA CCVI.

485. *Si QM & sm cum afymptoto CG, qm & SM cum altera CF parallelæ ducantur; determinare rationem rectangulorum QM. MS & qm. ms.*

Sit $MR = mr = a$, $Rm = rM = b$, $QM = v$, $mq = z$. Erit (§. 268 *Geom.*)

$$RM : MQ = Rm : ms$$
$$a : v = b : (bv : a)$$
$$rm : mq = rM : MS$$
$$a : z = b : (bz : a)$$

Eft ergo $MQ . MS = bvz : a$, & $mq . ms = bvz : a$; confequenter $MQ . MS = mq . ms$.

Theorema. Si QM & *ms* cum afymptoto CG; *qm* vero & MS cum altera CF parallelæ ducantur; rectangula ex QM in MS & *qm* in *ms* æqualia funt.

COROLLARIUM.

486. Quoniam $Cq = sm$ & $CQ = MS$ (§. 257 *Geom.*); etiam rectangula ex *Cq* in *qm* & ex CQ in QM æqualia funt.

PROBLEMA CCVII.

487. *Determinare rationem rectanguli ex qm in ms ad potentiam Hyperbolæ, feu* AI^2.

Sit $mr = z$, $qm = y$, $AE = c$: erit, ob parallelas AE & Pr, ang. E = r, & ob parallelas AI & *qm*, ang. I = q (§. 233 *Geom.*); confequenter (§. 267 *Geom.*).

$$mr : qm = AE : AI$$
$$z : y = c : (cy : z)$$

Porro ob $mR . mr = AE^2$ (§. 484) erit (§. 299 *Arithm.*)

$$mr : AE = AE : mR$$
$$z : c = c : (cc : z)$$

Denique ob parallelas *sm* & MQ (§. 268 *Geom.*)

$$RM : MQ = Rm : ms$$
$$z : y = (cc : z) : (ccy : zz)$$

Eft enim $mr = RM$ (§. 475); cumque

que fit $mr : qm = AE : AI$, & $MR : QM = DA : HA = AE : AI$, *per demonstr.*, etiam $MQ = mq$ (§. 177 *Arith.*).

Quare $sm.qm = Cq.qm = ccyy : zz$. Est vero etiam $AI^2 = c^2y^2 : z^2$. Ergo $sm.qm = AI^2$.

Theorema. Si qm asymptoto CF parallela ducatur, rectangulum ex Cq in qm æquatur potentiæ Hyperbolæ.

COROLLARIUM I.

488. Quare si fiat $CI = AI = a$, $Cq = x$ & $qm = y$; erit $a^2 = xy$: quæ est æquatio naturam Hyperbolæ intra asymptotos declarans.

COROLLARIUM II.

489. Datis ergo asymptotis positione & latere potentiæ Hyperbolæ CI vel AI, si in una asymptotorum CG sumantur abscissæ quotcunque, invenientur totidem semiordinatæ & per eas puncta quotlibet Hyperbolæ determinabuntur, quærendo ad abscissas & latus potentiæ CI tertias proportionales (§.272 *Geom.*). Nimirum sint AB & AC asymptoti, $AD = DI = a$ latus potentiæ Hyperbolæ. Sit $AP = x$. Ducatur FG parallela ipsi AC, & PN parallela ipsi DI; erit $PN = DI$ (§.257 *Geom.*) $= a$. Ducatur AN secans DI in H: erit (§.268 *Geom.*)

$$AP : PN = AD : DH$$
$$x : a = a : DH$$

adeoque $DH = a^2 : x$. Quare si fiat PM $(= y) = DH$: erit $y = a^2 : x$; consequenter $yx = a^2$, adeoque punctum M in Hyperbola (§.488).

COROLLARIUM III.

490. Quodsi abscissæ non computentur a centro C, sed ab alio quovis puncto L, dicaturque $CL = b$; erit $Cq = b + x$; consequenter $a^2 = by + xy$.

PROBLEMA CVIII.

491. *Determinare in Hyperbola subtangentem* PT *& subnormalem* PR. Tab. III. Fig. 4?

Sit parameter $= b$, axis transversus $= a$, $AP = x$, $PM = y$, $RM = z$, $RA = t$, erit $PR = t - x$, $PM^2 = z^2 - t^2 + 2tx - x^2$ (§.417 *Geom.*). Quare (§.460)

$$z^2 - t^2 + 2tx - x^2 = bx + bx^2 : a$$
$$az^2 - at^2 + 2atx - ax^2 = abx + bx^2$$
$$bx^2 + ax^2 + abx + at^2 = 0$$
$$\quad - 2atx - az^2 \qquad b+a$$
$$x^2 + \frac{ab - 2at}{b+a}x + \frac{at^2 - az^2}{b+a} = 0$$

Fiat jam, ob rationes supra (§.410) allatas, $x - v = 0$: erit $x^2 - 2vx + v^2 = 0$, & quia hæc æquatio eadem cum præcedente, habetur

$$(ab - 2at) : (b+a) = -2v \qquad b+a$$
$$ab - 2at = -2bv - 2av$$
$$ab + 2bv + 2av = 2at \qquad 2a$$
$$\tfrac{1}{2}b + \frac{bv}{a} + v = t$$

hoc est, quia $x = v$,

$\frac{1}{2}b + bx : a + x = t = RA$.

Ergo $PR = \frac{1}{2}b + bx : a + x - x = \frac{1}{2}b + bx : a = (\frac{1}{2}a + x)b : a$.

Theorema. In Hyperbola est ut axis transversus ad parametrum, ita aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad subnormalem.

Porro (§.409)

$$PR : PM = PM : PT$$
$$\frac{\frac{1}{2}a + x}{a}b : \sqrt{(bx + \frac{bx^2}{a})} = \sqrt{(bx + \frac{bx^2}{a})} : PT$$

Reperitur ergo $PT = (abx + bx^2) : (\frac{1}{2}a + x)b = (ax + x^2) : (\frac{1}{2}a + x)$.

Tab. III. Fig. 42. *Theorema.* In Hyperbola eft ut aggregatum ex femiaxe transverfo & abfciffa ad abfciffam; ita aggregatum ex integro axe transverfo & abfciffa ad fubtangentem.

Denique $AT = (ax + x^2) : (\frac{1}{2}a + x) - x = (ax \; x^2 - \frac{1}{2}ax - x^2) : (\frac{1}{2}a + x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x)$.

Theorema. In Hyperbola eft ut aggregatum ex femiaxe transverfo & abfciffa ad abfciffam, ita femiaxis transverfus ad rectam AT inter verticem & tangentem intercepta.

PROBLEMA CCIX.

Tab. V. Fig. 52. 492. *Ducta* NO *tangenti* TM *parallela, & ex centro* C *per contactum* M *recta* CQ, *quæ* NO *fecat in* G; *determinare rationem fegmentorum* GN *&* GO.

Demittatur ex N perpendicularis NS ad axem AS continuanda in D, donec rectæ OD axi AS parallelæ occurrat in D. Ducantur porro HG ad ND & GF, MP, OL ad axem AS perpendiculares: erit GI ipfi PM parallela (§. 256 *Geom.*). Sit AB axis transverfus $=a$, $AP=x$, $PM=y$, $PC=\frac{1}{2}a+x=p$, $GI=HS=v$, $GF=HD=z$, erit $IF = DS = LO = z - v$, & (§. 268 *Geom.*)

$$PM : PC = GI : IC$$

$$y : p = v : \frac{pv}{y}$$

Ob parallelas TM & GO (§. 233 *Geom.*) angulus GKI = PTM & ob parallelas KI & OF *per conftr.* angulus GKI = GOF; confequenter GOF = PTM. Quare, cum præterea F & P fint recti; erit (§. 267 *Geom.*)

$$PM : PT = GF : FO$$

$$y : \frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} = z : \frac{(ax + xx)z}{(\frac{1}{2}a + x)y}$$

Ponatur, brevitatis gratia, $ax+xx=q$ & $\frac{1}{2}a + x = p$, ut ante; erit $FO = qz : py$. Ergo $LC = IC - FO = pv : y - qz : py = (p^2v - qz) : py$, & $LA = LC - AC = (p^2v - qz - \frac{1}{2}apy) : py$, $LB = LC + CB = (p^2v - qz + \frac{1}{2}apy) : py$. Eft vero (§. 466)

$$AP . PB : AL . LB = PM^2 : OL^2$$

$$q : \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}a^2p^2y^2}{p^2y^2} = y^2 : OL^2$$

Quare

$$OL^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}a^2p^2y^2}{p^2q}$$

Jam $yy = (ax + xx)b : a$ (§. 459). Cum itaque pofuerimus $ax + xx = q$; $yy = bq : a$. Hoc valore in expreffione ipfius OL^2 fubftituto, habetur

$$OL^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{2}ap^2bq}{p^2q}.$$

Enim vero $OL^2 = z^2 - 2zv + v^2$. Habemus ad

$$z^2 - 2zv + v^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2b}{p^2q}$$

$$p^2qz^2 - 2p^2qzv + p^2qv^2 = p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}a$$

$$\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2 = q^2z^2 - p^2qz^2.$$

$$z^2 = \frac{\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2}{q^2 - p^2q}$$

Quodfi HN dicatur z, & calculus eodem modo inftituatur; reperietur denuo $z^2 = \frac{\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2}{q^2 - p^2q}$. Unde liquet effe $HN^2 = GF^2 = HD^2$; confequenter $HN = HD$. Quoniam igitur (§. 268 *Geom.*) $HN : HD = NG : GO$; erit $NG = GO$.

Theorema. Recta CQ ex centro C per contactum M ducta dividit rectas NO tangenti TM parallelas bifariam.

COROLLARIUM.

493. Eft itaque CQ diameter, NO ordinatim ad eam applicata (§. 368); MC vero eft femidiameter transverfa.

PRO-

PROBLEMA CCX.

Tab.V. Fig.53. 494. *Ductis duabus rectis* Hm *&* mK *ex eodem Hyperbolæ puncto* m, *utrinque in asymptotis* CQ *&* CT *terminatis, itidemque duabus aliis* LN *&* NO *prioribus parallelis; determinare rationem rectangulorum* Hm. mK *&* LN. NO.

Ducantur ordinatæ ad axem utrinque usque ad asymptotos continuandæ Rr & QT.

Sit $Rm = y$, $QN = z$, $TN = t$. Quoniam $Rm. mr = QN.NT$ (§. 484); erit (§. 299 *Arithm.*)

$$Rm : QN = TN : mr$$

$$y : z = t : \frac{tz}{y}$$

Sit porro $Hm = a$, $mK = b$. Quoniam, ob parallelas *mr* & NT, angulus $r = T$; &, ob parallelas K*m* & NO, $K = O$ (§. 233 *Geom.*), erit (§. 267 *Geom.*)

$$mr : Km = TN : NO$$

$$\frac{tz}{y} : b = t : \frac{by}{z}$$

Ob similem rationem, nempe similitudinem △△ QLN & RH*m*

$$Rm : Hm = QN : LN$$

$$y : a = z : \frac{az}{y}$$

Ergo $LN.\ NO = abzy : zy = ab$. Est vero etiam $Hm.\ mK = ab$. Sunt igitur duo ista rectangula æqualia.

Theorema. Si intra asymptotos Hyperbolæ, ex ejus puncto *m* ducantur utcunque duæ rectæ H*m* & *m*K, & iis aliæ duæ parallelæ LN & NO; erit $Hm.\ mK = LN.\ NO$.

Idem invenitur, si ductæ rectæ H*mk* agatur parallela LN*o*. Nempe in hoc etiam casu $Hm.\ mk = LN.\ No$.

COROLLARIUM.

495. Omnia igitur rectangula ex rectis eidem H*k* vel duabus H*m* & *m*K parallelis eodem modo formata inter se æqualia sunt. Tab.V. *Fig.*53.

PROBLEMA CCXI.

496. *Si recta* Hk *utcunque intra asymptotos* CQ *&* CT *ducatur; determinare rationem segmentorum* HE *&* mk *inter Hyperbolam & asymptotos interceptorum.*

Ducantur per E & *m* rectæ IG & R*r* ad axem normales, fiatque $Rm = a$, $IE = b$, $EG = c$, $Hm = x$, $mk = y$. Quia $IE.\ EG = Rm.\ mr$ (§. 484); erit (§. 299 *Arithm.*)

$$mR : IE = EG : mr$$

$$a : b = c : \frac{bc}{a}$$

Porro, ob IG ipsi R*r* parallelam, (§. 268 *Geom.*)

$$mR : Hm = IE : EH$$

$$a : x = b : \frac{bx}{a}$$

$$mr : km = EG : Ek$$

$$\frac{bc}{a} : y = c : \frac{ay}{b}$$

Est itaque $Ek.\ EH = abxy : ab = xy = Hm.\ mk$. Quare

$$Ek : mk = mH : HE$$

$$Ek - mk : mk = mH - HE : HE$$

(§. 193 *Arithm.*)

h. e. $Em : mk = Em : HE$.

consequenter $mk = HE$ (§. 177 *Arithm.*).

Theorema. Si inter asymptotos recta H*k* utcunque ducatur, segmenta HE & *mk* inter Hyperbolam & asymptotos utrinque intercepta æqualia sunt.

COROLLARIUM I.

497. Quando fit $Em = 0$; recta H*k* Hyperbolam tangit. Tangens adeo FD inter asymptotos intercepta in contactu V bifariam dividitur.

COROLLARIUM II.

Tab.V. Fig.53. 498. Rectangulum itaque ex segmentis Hm & mk rectæ tangenti FD parallelæ æquatur quadrato tangentis dimidiæ DV (§. 495).

PROBLEMA CCXII.

Tab.V. Fig.54. 499 *Determinare relationem semiordinatæ* PM *ad diametri abscissam* AP.

Sit AB diameter transversa, DE diameter conjugata, adeoque ordinatæ NM paralléla, C centrum Hyperbolæ & CQ atque CR sint ejus asymptotæ. Fiat $DA = c$, $CA = r$, $PM = y$, $CP = v$ & $CB = AC$: erit (§. 268 *Geom.*)

$$CA : DA = CP : PR$$

$$r : c = v : \frac{cv}{r}$$

Quare $RM = \frac{cv}{r} - y = \frac{cv - ry}{r}$, & $MQ = \frac{cv + ry}{r}$, consequenter $RM . MQ = (c^2v^2 - r^2y^2) : r^2$. Est vero $RM . MQ = DA^2 = c^2$ (§. 498). Habemus itaque

$$(c^2v^2 - r^2y^2) : r^2 = c^2$$

$$r^2$$

$$c^2v^2 - r^2y^2 = r^2c^2$$

$$c^2v^2 - r^2c^2 = r^2y^2$$

quæ æquatio in hanc resolvitur analogiam,

$$y^2 : v^2 - r^2 = c^2 : r^2$$

$$PM^2 : AP . PB = DA^2 : AC^2$$

Est nimirum $BP = BC + CP = r + v$ & $AP = CP - CA = v - r$, adeoque $AP . PB = (v - r)(v + r) = v^2 - r^2$.

Theorema. Quadratum semiordinatæ in Hyperbola est ad rectangulum ex abscissa & aggregato ex diametro transversa AB & abscissa AP, ut quadratum semidiametri conjugatæ AD ad quadratum semidiametri transversæ CA.

COROLLARIUM.

500. Quodsi fiat $AP = x$, & $2r = AB = a$, erit $v^2 - r^2 = ax + x^2$, consequenter $y^2 = (c^2ax + c^2x^2) : \frac{1}{4}aa = \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$. Fiat $4c^2 : a = b$; erit $y^2 = bx + bx^2 : a$. Eadem ergo æquatio Hyperbolæ naturam definit respectu diametri, quæ eam exprimit respectu axis, estque parameter tertia proportionalis ad diametros conjugatas DE & AB. Unde liquet easdem proprietates Hyperbolæ competere respectu diametri, quæ superius ex æquatione fundamentali respectu axis deduximus.

PROBLEMA CCXIII.

501. *Ductis* AF *&* TN *asymptoto* CR *parallelis, determinare rationem rectanguli ex* TN *in* TC *ad rectangulum ex* AF *in* FC.

Sit $CF = a$, $AF = b$; $AD = c$, $RN = z$, erit ob $AE = DA$, etiam $EF = FC = a$ (§. 268 *Geom.*). Et quoniam $RN . NQ = DA^2$ (§ 498), erit (§. 299 *Arith.*)

$$RN : DA = DA : NQ$$

$$z : c = c : \frac{c^2}{z}$$

Porro, ob parallelas AF & NT, angulus $F = T$, & ob parallelas AE & GN, angulus $E = Q$ (§. 133. *Geom.*), ideoque (§. 267 *Geom.*)

$$AE : AF = QN : TN$$

$$c : b = \frac{c^2}{z} : \frac{bc}{z}$$

$$AE : FE = QN : TQ$$

$$c : a = \frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z}$$

Et $QN : QT = RN : TC$ (§. 263. *Geom.*)

$$\frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z} = z : \frac{az}{c}$$

Ergo $TC . TN = \frac{azbc}{cz} = ab = CF . AF$.

Theo-

b.V. F. 54. *Theorema.* Si ex vertice A & quocunque Hyperbolæ puncto N ducantur AF & TN cum asymptoto CR parallelæ; erit rectangulum ex TN in TC æquale rectangulo ex FA in FC.

COROLLARIUM.

502. Quodsi adeo fiat TC $= x$, TN $= y$; æquatio Hyperbolæ naturam inter asymptotos respectu diametri declarans erit $xy = ab$.

PROBLEMA CCXIV.

Tab. XII. Fig. 119. 503. *Determinare quantitatem rectæ* FO *ex foco* F *ad tangentem Hyperbolæ* TM *perpendicularis.*

Eodem prorsus, quo supra (§. 457), modo reperitur FO. RM $=$ PR. TF, ut verba singula huc transcribere liceat.

Theorema. Rectangulum ex subnormali PR in differentiam distantiæ foci a semiordinata atque subtangentis TF æquale est rectangulo ex normali MR & recta ex foco ad tangentem perpendiculari.

PROBLEMA CCXV.

504. *Si in* F *fuerit focus hyperbolæ &* MR *ad eam normalis*, HR *vero normalis ad* FM *ex foco* F *ad punctum contactus* M *ductam*; *determinare quantitatem segmentorum* MH *&* HF.

Sit parameter $= b$, axis $= a$, distantia foci a centro $= c$, erit FM $= c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$ (§. 470), PR $= (\frac{1}{2}ab + bx) : a$ & AT $= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x)$ (§. 491), AF $= c - \frac{1}{2}a$, TF $= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x) + c - \frac{1}{2}a$ $= ax : (a + 2x) + c - \frac{1}{2}a = (ac - \frac{1}{2}a^2 + 2cx) : (a + 2x)$. Ducta FO ad Tangentem TM perpendiculari; reperitur, prorsus ut supra, iisdem retentis verbis, FM : TF $=$ PR : MH (§. 458). Quare

$$c - \frac{1}{2}a + \frac{2cx}{a} : \frac{ac - \frac{1}{2}aa + 2cx}{a + 2x} = \frac{\frac{1}{2}ab + bx}{a} : \text{MH}$$ Tab. XII. Fig. 119.

Hoc est

$$2ac - a^2 + 4cx : \frac{ac - \frac{1}{2}aa + 2cx}{a + 2x} = ab + 2bx : \text{MH}$$

(§. 184 *Arith.*)

$$\frac{2ac - a^2 + 4cx}{a + 2x} : \frac{ac - \frac{1}{2}aa + 2cx}{a + 2x} = b : \text{MH}$$ (§. 183 *Arith.*)

Est ergo MH $= \frac{1}{2}b$ (§. 149 *Arithm.*).

Theorema. Si MR fuerit ad Hyperbolam normalis, & ex R ducatur ad FM ex foco F ad punctum contactus M ductam normalis HR; erit MH parametro dimidiæ æqualis.

DEFINITIO XLII.

505. *Hyperbola æquilatera* dicitur, in qua axes conjugati AB & DE sunt æquales. Tab. IV. Fig. 51.

COROLLARIUM I.

506. Cum parameter sit tertia proportionalis ad axes conjugatos (§. 461); ipsa etiam axibus æqualis est.

COROLLARIUM II.

507. Quare si in æquatione $y^2 = bx + bx^2 : a$ fiat $b = a$; æquatio $y^2 = ax + x^2$ naturam Hyperbolæ æquilateræ declarat.

COROLLARIUM III.

508. Hinc quadrata ordinatarum y^2 & z^2 sunt inter se ut $ax + x^2$ & $av + v^2$, hoc est, ut rectangula ex abscissis in rectas compositas ex abscissis & axe determinato vel parametro.

COROLLARIUM IV.

509. Si sint CP $= x$, CA $= r$, erit AP $= x - r$ & PB $= x + r$ consequenter $y^2 = x^2 - r^2$.

COROLLARIUM V.

510. Quoniam AE $=$ CA (§. 505); erit ACE angulus semirectus (§. 241 *Geom.*); consequenter angulus asymptotorum FCG in Hyperbola æquilatera rectus.

PROBLEMA CCXVI.

Tab.V. Fig.55. 511. *Investigare naturam curvæ, quæ oritur, si conus* ABC *ita secetur ut sectionis axis* DE *sit lateri coni* AC *parallelus, ipsum vero planum sectionis* DLN *ad basin sectionis triangularis* AB *perpendicularis.*

Secetur conus plano HMI basi ANB parallelo: erit HMI circulus (§. 468 *Geom.*); consequenter cum uterque circulus HMI & ANB per sectionem triangularem ACB secetur in HI & AB, & a sectione data in pM & LN; erunt cum HI & AB, tum pM & LN inter se parallelæ (§.499 *Geom.*). Quare cum sit EN perpendicularis ad AB *per hypoth.* erit etiam PM perpendicularis ad HI (§.492 *Geom.*); consequenter cum DE & HI, itemque DE & AB sint in eodem plano sectionis triangularis, EN & PM etiam perpendiculares sunt ad DE (§. 484 *Geom.*); adeoque semiordinatæ ad axem DE applicatæ (§.368, 370). Et quia AH parallela ipsi EP *per hypoth.* HP parallela ipsi AE, *per construct.* erit HP=AE (§.257 *Geom.*). Sit jam AE=HP=v, PI=t, DP=x, DE=z; erit (§. 268 *Geom.*)

$$DP : DE = PI : EB$$

$$x : z = t : \frac{tz}{x}$$

Ergo PM^2=HP. PI (§. 377) $= tv$ & EN^2=AE. EB (§.*cit.*) $= tzv : x$. Est ergo (positis $PM^2 = y^2$, $EN^2 = q^2$)

$$y^2 : q^2 = tv : \frac{tzv}{x}$$

hoc est $= tvx : tzv$ (§. 124)

$$= x : z$$

Est itaque curva NMDpL Parabola (§. 402).

PROBLEMA CCXVII.

512. *Si conus* ABC *ita secetur, ut axis sectionis* DE *cum diametro basis* AB *continuata in* F *concurrat, & planum sectionis continuatum eam ad angulos rectos secet; invenire naturam curvæ ex hac sectione prodeuntis* DMNELD.

Eodem, quo ante (§. 511) modo ostenditur esse PM & QN cum semiordinatas circulorum IMH & LNK, tum curvæ DMNE. Sit jam DE=a, DP=x, DQ=v, PH=t, QL=s; erit PE=$a-x$, QE=$a-v$, & (§. 268 *Geom.*)

$$DP : PH = DQ : QK$$

$$x : t = v : \frac{vt}{x}$$

$$EQ : QL = EP : PI$$

$$a-v : s = a-x : \frac{sa-sx}{a-v}$$

Quare (§. 377) PM^2=HP. PI=$(tsa-tsx) : (a-v)$, & QN^2=KQ. QL $= vts : x$. Est adeo

$$PM^2 : QN^2 = \frac{tsa-tsx}{a-v} : \frac{vts}{x}$$

hoc est, $= tsax - tsx^2 : avts - v^2ts$

(§. 124) $= ax - x^2 : av - v^2$

Est itaque curva DMNELD Ellipsis (§. 429).

PROBLEMA CCXVIII.

513. *Si conus* ABC *ita secetur, ut axis sectionis* DQ *continuatus cum latere coni* AC *continuato in* E *concurrat, planum vero sectionis* DLN *secet diametrum basis* AB *ad angulos rectos; invenire naturam curvæ* DMN, *quæ ex hac sectione resultat.*

Eodem modo, quo paulo ante (§. 511), ostenditur, QN & PM esse semiordinatas cum circulorum HMI atque

atque ANB, tum curvæ DMN. Sit ED $= a$, DP $= x$, DQ $= v$, PH $= t$, PI $= s$; erit EP $= a + x$, EQ $= a + v$, & (§. 268 *Geom.*)

$$EP : PH = EQ : AQ$$
$$a + x : t = a + v : \frac{at + vt}{a + x}$$
$$DP : PI = DQ : QB$$
$$x : s = v : \frac{sv}{x}$$

Ergo HP. PI $= ts$ & AQ QB $= (atsv + v^2 ts) : (ax + x^2)$; consequenter ob $PM^2 =$ HP. PI, & $QN^2 =$ AQ. QB (§. 377),

$$PM^2 : QN^2 = ts : \frac{astv + vvst}{ax + xx}$$

hoc est, $= 1 : \frac{av + vv}{ax + xx}$

(§. 124) $= ax + xx : av + vv$

Est itaque LDMN Hyperbola (§. 466), DE ejus axis transversus, E vertex Hyperbolæ oppositæ.

SCHOLION.

514. *Hinc intelligimus, quod statim ab initio Parabolam, Hyperbolam atque Ellipsin tanquam ex Cono sectas proponere, & ex indole sectionis æquationem fundamentalem eruere licuisset, nisi nobis constitutum fuisset ostendere, quomodo ex æquationibus utcunque assumtis, vel datis, curvarum proprietates ac descriptiones per Algebram & Arithmeticam speciosam eruere debeamus. Immo potuissent quoque (quod faciunt alii) earundem curvarum per motum continuum descriptiones fundamenti loco assumi & inde æquationes elici: quod ut appareat, unum de Ellipsi exemplum proposuisse suffecerit.*

PROBLEMA CCXXIX.

Tab. IV. Fig. 59. 515. *Sit descripta curva* ADMB, *circumductu regulæ* GM *in instrumento, cujus structura ex Fig.* 59 *Tab. IV manifesta est, ita ut paxilli in* E *defixi basis mobilis incedat per canalem* ab, *alterius vero in* F *per* cd; *investigare naturam ejus.* Tab. IV. Fig. 58. 59.

Ex curvæ descriptione manifestum, esse longitudinem regulæ EM axi majori dimidio CB, partem vero ejus FM axi dimidio minori DC æqualem, consequenter distantiam paxillorum EF differentiam inter semiaxem majorem AC & semiaxem minorem DC.

Assumamus itaque quemcumque regulæ situm EFM (*Fig.* 58) & determinetur curva, in qua sit punctum ejus M. Demittantur ex puncto M ordinatæ ad utrumque axem PM & MR.

Fiat CP $=$ RM $= x$, PM $= y$, AC $=$ EM $= a$, CD $=$ FM $= b$, erit EF $= a - b$ & (§. 268 *Geom.*)

$$EM : MR = EF : FC$$
$$a : x = a - b : \frac{ax - bx}{a}$$

Ergo PF $= x - x + bx : a = bx : a$

Hinc $PM^2 = FM^2 - FP^2$ (§. 417 *Geom.*) $= b^2 - b^2 x^2 : a^2 = (a^2 b^2 - b^2 x^2) : a^2 = y^2$.

Est adeo curva ADMB Ellipsis (§. 432).

DEFINITIO XLIII.

516. *Circuli superiorum generum* sunt curvæ, in quibus est $AP^m : PM^m = PM : PB$ vel etiam $AP^m : PM^m = PM^n : PB^n$. Tab. IV. Fig. 50.

COROLLARIUM I.

517. Sit AP $= x$, PM $= y$, AB $= a$: erit PB $= a - x$, consequenter $x^m : y^m = y : a - x$. Hinc æquatio infinitos circulos definiens est $y^{m+1} = ax^m - x^{m+1}$, & alios adhuc infinitos definiens $y^{m+n} = (a-x)^n x^m$.

COROL-

COROLLARIUM II.

518. Si $m = 1$, erit $y^2 = ax - x^2$, adeoque circulus primi generis sub hac æquatione una continetur. Si $m = 2$, $n = 1$, erit $y^3 = ax^2 - x^3$: quæ æquatio circulum secundi generis definit.

DEFINITIO XLIV.

519. *Parabolæ superiorum generum* sunt curvæ algebraicæ, quæ definiuntur per $a^{m-1}x = y^m$, ex. gr. per $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$, $a^4x = y^5$, $a^6x = y^6$ &c. Dicuntur a nonnullis *Paraboloides*: speciatim *Paraboloidem cubicalem* vocant, si $a^2x = y^3$; *Paraboloidem biquadraticalem*, si $a^3x = y^4$; *surdesolidalem* si $a^4x = y^5$ &c. Harum curvarum respectu *Parabola* primi generis superius explicata dicitur *Apolloniana*, item *quadratica.* Ad Parabolas quoque referri solent curvæ, in quibus $ax^{m-1} = y^m$, veluti $a^2x = y^3$, $ax^3 = y^4$: quia a nonnullis *semiparabolæ* appellantur. Omnes comprehenduntur sub communi æquatione $a^mx^n = y^r$, quæ ad alias quoque curvas extenditur, veluti ad eas, in quibus $a^2x^2 = y^4$, $a^2x^3 = y^5$, $a^3x^4 = y^7$.

COROLLARIUM I.

520. Cum in Parabolis superiorum generum sit $y^m = a^{m-1}x$; si alia quæcunque semiordinata dicatur v, abscissa ipsi respondens z, erit $v^m = a^{m-1}z$, consequenter

$$y^m : v^m = a^{m-1}x : a^{m-1}z$$
hoc est, $\quad = \quad x : z$

Communis adeo Parabolarum proprietas est, quod ordinatarum potentiæ rationem abscissarum habeant.

COROLLARIUM II.

521. In semiparabolis vero est $y^m : v^m = ax^{m-1} : az^{m-1} = x^{m-1} : z^{m-1}$, seu potentiæ semiordinatarum sunt ut potentiæ abscissarum uno gradu inferiores; ex. gr. in semiparabolis cubicalibus cubi ordinatarum y^3 & v^3 sunt ut quadrata abscissarum x^2 & z^2. Et in genere in omnibus curvis Parabolæ agnatis $y^{m+n} : v^{m+n} = a^mx^n : a^mz^n = x^n : z^n$.

DEFINITIO XLV.

522. *Ellipses infinitas* definit æquatio $ay^{m+n} = bx^m(a - x)^n$, quæ a nonnullis *Elliptoides* dicuntur, si $m > 1$, vel $n > 1$, vel m & $n > 1$. Ex. gr. *Elliptoidem cubicalem*, si $ay^3 = bx^2 (a - x)$: *Elliptoidem biquadraticalem* appellant Ellipsin tertii generis, in qua $ay^4 = bx^2 (a - x)^2$. Harum curvarum respectu *Ellipsis* primi generis *Apolloniana* vocatur.

COROLLARIUM I.

523. Si alia quæcunque ordinata dicatur v & abscissa respondens z; erit $av^{m+n} = bz^m (a-z)^n$, consequenter $ay^{m+n} : av^{m+n} = bx^m (a-x)^n : bz^m (a-z)^n$ hoc est, $y^{m+n} : v^{m+n} = x^m (a-x)^n : z^m (a-z)^n$.

COROLLARIUM II.

524. Si fiat $a = b$, erit $y^{m+n} = x^m (a-x)^n$ & si porro fiat $n = 1$, erit $y^{m+1} = x^m (a-x) = ax^m - x^{m+1}$, hoc est, Ellipses superiorum generum degenerant in Circulos superiorum generum.

DEFINITIO XLVI.

525. *Hyperbolas infinitas* definit æquatio $ay^{m+n} = bx^m (a+x)^n$, quæ a nonnullis *Hyperboloides* appellantur, si $m > 1$, vel $n > 1$, vel m & $n > 1$ ex. gr. $ay^3 = bx^2 (a+x)$. Et harum curvarum respectu *Hyperbola* primi generis *Apolloniana* salutatur.

COROL-

COROLLARIUM.

526. Eſt ergo in infinitis Hyperboloibus $ay^{m+n} : av^{m+n} = bx^m(a+x)^n : bz^m(a+z)^n$ hoc eſt, $y^{m+n} : v^{m+n} = x^m (a+x)^n : z^m(a+z)^n$.

DEFINITIO XLVII.

527. *Conos ſuperiorum generum* appello, quorum baſes & ſectiones baſibus parallelæ ſunt circuli ſuperiorum generum. Generatur iſtiusmodi Conus, ſi recta linea AC in puncto ſublimi C fixa, ſed quæ pro re nata magis aut minus extendi poſſe concipitur, circa peripheriam circuli ANB convertatur.

PROBLEMA CCXX.

528. *Inveſtigare naturas curvarum, quæ prodeunt, ſi coni ſuperiorum generum ita ſecentur, ut axis ſectionis* DE *ſit lateri coni* AC *parallelus, planum vero ſectionis* LDN *ſecet diametrum baſis* AB *ad angulos rectos.*

Eodem, quo ſupra (§.511) modo oſtenditur, eſſe PM & EN inter ſe parallelas & cum circulorum HMI atque ANB, tum curvæ LDN ſemiordinatas. Sit $PM = y$, $EN = q$, $AE = HP = v$, $DP = x$, $DE = z$, $PI = t$; reperietur ut *in Probl.* 216 (§.511), $EB = tz : x$. Eſt vero (§.516)

$$HP^m : PM^m = PM : PI$$

$$v^m : y^m = y : t$$

$$y^{m+1} = tv^m$$

Porro $AE^m : EN^m = EN : EB$.

$$v^m : q^m = q : (tz : x)$$

$$q^{m+1} = tzv^m : x$$

Quare $y^{m+1} : q^{m+1} = tv^m : \frac{tzv^m}{x}$ Tab. V. *Fig.* 55.

hoc eſt $= 1 : \frac{z}{x}$ (§.1[illegible]).

ſeu $= x : z$

Sunt ergo curvæ iſtæ Parabolæ ſuperiorum generum (§.520).

Vel ſit generaliter (§.516)

$$HP^m : PM^m = PM^n : PI^n$$

$$v : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n v^m$$

$$AE^m : EN^m = EN^n : EB^n$$

$$v^m : q^m = q^n : \frac{t^n z^n}{x^n}$$

$$q^{m+n} = \frac{t^n z^n v^m}{x^n}$$

Quare

$$y^{m+n} : q^{m+n} = t^n v^m : \frac{t z^n v}{x^n}$$

$$= x^n : z^n$$

Sunt itaque curvæ DLN ſuperiorum generum Parabolis agnatæ (§.521).

PROBLEMA CCXXI.

529. *Inveſtigare naturam curv[illegible] quæ enaſcuntur, ſi coni ſuperiorum generum ita ſecantur, ut axis ſectionis* DE *cum diametro baſis* AB *continuata in* F *concurrat, planum vero ſectionis continuatum eandem ad angulos rectos ſecet.* Tab. V.

Patet, ut ſupra (§.511) PM & QN eſſe inter ſe parallelas atque ſemiordinatas cum circulorum HMI & KNL, tum curvæ DMNE. Sit $DE = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $QL = s$, $PM = y$, $QN = z$; erit $PE = a - x$, $QE = a - v$ & reperietur *ut in Probl.* 217 (§.512) $QK = vt : x$, $PI = (sa - sx) : (a - v)$. Eſt vero (§.516)

Tab.V. *Fig.*56. $IP^m : PM^m = PM^n : PH^n$

$$\frac{s^m (a-x)^m}{(a-v)^m} : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n s^m (a-x)^m : (a-v)^m$$

Porro $QL^m : QN^m = QN^n : KQ^n$

$$s^m : z^m = z^n : \frac{v^n t^n}{x^n}$$

$$z^{m+n} = t^n v^n s^m : x^n$$

Quare

$$y^{m+n} : z^{m+n} = \frac{t^n s^m (a-x)^m}{(a-v)^m} : \frac{v^n t^n s^m}{x^n}$$

hoc est $= (a-x)^m x^n : (a-v)^m v^n$

Sunt adeo curvæ istæ in numero Ellipsium superiorum generum (§.523).

PROBLEMA CCXXII.

Tab. IV. Fig.57. 530. *Investigare naturam curvarum, quæ gignuntur, si coni superiorum generum ita secentur, ut axis sectionis* DQ *cum latere coni continuato* AC, *continuatus & ipse, in* E *concurrat, planum vero sectionis* DLN *diametrum basis* AB *ad angulos rectos secet.*

Patet, ut supra (§.511), PM & QN esse inter se parallelas, atque semiordinatas cum circulorum HMI & ANB, tum curvæ DMN. Sit DE $=a$, DP $=x$, DQ $=v$, PH $=t$, PI $=s$; erit EP $= a+x$, EQ $= a+v$, & reperietur *ut in Probl.* 218 (§.513) AQ $= t(a+v) : (a+x)$ & QB $= sv : x$. Est vero (§.517)

$$PI^m : PM^m = PM^n : PH^n$$

$$s^m : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n s^m$$

Porro $QB^m : QN^m = QN^n : AQ^n$

$$\frac{s^m v^m}{x^m} : z^m = z^n : \frac{t^n (a+v)^n}{(a+x)^n}$$

$$z^{m+n} = \frac{t^n s^m v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$$

Quare

$$y^{m+n} : z^{m+n} = t^n s^m : \frac{t^n s^m v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$$

hoc est (§.124) $= 1 : \frac{v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$

$$= x^m (a+x)^n : v^m (a+v)^n$$

Sunt adeo curvæ Hyperbolæ superiorum generum (§.526.)

PROBLEMA CCXXIII.

531. *Diametro semicirculi* AB *jungatur ad angulos rectos recta* AT, *ducanturque ex centro* C *secantes* QC. *Erigantur in* Q *normales* QM *ipsis* QR *æquales. Investigare naturam curvæ* AMP, *quæ est locus omnium punctorum* M *hac ratione inventorum.*

Sit AQ $=$ PM $=y$, QM $=$ QR $=x$, AB $=a$, erit (§.379 *Geom.*) $y^2 = ax + x^2$.

Est adeo curva AMR Hyperbola æquilatera, cujus axes & parameter diametro circuli AB æquales (§.507).

COROLLARIUM.

532. Habemus adeo facilem Hyperbolæ æquilateræ per innumera puncta M geometrice determinata descriptionem.

PROBLEMA CCXXIV.

533. *Invenire æquationem Hyperbolæ ad axem* CR *ex centro* C *ductæ & ad axem transversum* AB *normalem relatæ.*

Sit CQ $=$ PM $= x$, CP $=$ QM $= y$, CB $=$ CA $= a$, erit BP $= a+y$, AP $= y-a$, adeoque BP. PA $= y^2 - a^2$. Sit porro parameter $= b$, erit (§.459)

$$b : 2a = x^2 : y^2 - a^2$$

$$2ax^2 = by^2 - a^2 b$$

$$2ax^2 + a^2 b = by^2$$

$$\frac{2ax^2}{b} + a^2 = y^2$$

COROL-

COROLLARIUM.

Tab. III. Fig. 24. 534. Quodsi Hyperbola fuerit æquilatera, erit $2a = b$ (§. 506), consequenter $y^2 = x^2 + a^2$, sive $QM^2 = CQ^2 + CB^2$.

DEFINITIO XLVIII.

Tab. VI. Fig. 61. 535. Si ducatur recta BD & alia AC ad ipsam in E perpendicularis, ex puncto autem C agantur rectæ quotcunque CM rectam BD secantes in Q, fiatque $QM = QN = AE = EF$; Curva, in qua sunt puncta M, dicitur a NICOMEDE inventore *Conchilis* seu *Conchois prima*; altera vero, in qua sunt puncta N, *Conchois secunda*; recta BD *regula*; punctum C *Polus*. Excogitavit autem instrumentum, quo motu continuo Conchois prima describi potest. Nimirum in regula AD excavatus est canalis, ut clavus teres regulæ mobili CB in F firmiter infixus intra eam libere moveri possit. Regulæ EG in K infigitur clavus alius, in fissuram regulæ mobilis CB immittendus. Quodsi regula BC ita moveatur, ut clavus F canalem AD percurrat; stylus in C Conchoidem primam describet.

Fig. 62.

COROLLARIUM I.

536. Sit $AP = x$, $AE = a$, erit $PE = MR = a - x$. Crescentibus adeo x, decrescit $a - x$ seu MR, adeoque curva continuo ad regulam BD propius accedit. Eodem modo patet, rectam NO continuo decrescere debere, adeoque Conchoidem quoque inferiorem ad regulam continuo propius accedere.

COROLLARIUM II.

537. Quoniam tamen inter Conchoidem utramque & rectam BD semper interjicitur recta QM, vel QN, ipsi AE æqualis (§. 535); neutra Conchoidum cum recta BD concurrere potest, consequenter BD est asymptotus utriusque Conchoidis. Tab. VI. *Fig. 61.*

PROBLEMA CCXXV.

538. *Invenire æquationem pro Conchoide.*

Sit $QM = AE = a$, $EC = b$, $MR = EP = x$, $ER = PM = y$, erit $CP = b + x$ & (§. 268 *Geom.*)

$$PE : MQ = EC : CQ$$

$$x : a = b : \frac{ab}{x}$$

Hinc $CM = a + ab : x = (ax + ab) : x$. Et quoniam $PM^2 + PC^2 = CM^2$ (§. 417 *Geom.*); erit $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = (a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2) : x^2$; consequenter $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2$: quæ est æquatio naturam Conchoidis primæ explicans.

Sit $CE = b$, $QN = a$, $EG = ON = x$, $GN = EO = y$; erit $GC = b - x$ & (§. 268 *Geom.*)

$$EG : QN = GC : CN$$

$$x : a = b - x : \frac{ab - ax}{x}$$

Habemus ergo, ob $CN^2 = CG^2 + GN^2$ (§. 417 *Geom.*), $(a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2) : x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$, hoc est, $a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 = b^2x^2 - 2bx^3 + x^4 + x^2y^2$: quæ est æquatio naturam Conchoidis inferioris declarans.

COROLLARIUM.

539. Est adeo Conchois utraque linea tertii generis (§. 382).

DEFINITIO XLIX.

540. Aliæ *Conchoidum* species prodeunt, si fiat $CE : CQ = QM : AE$, vel indefinite si $CE^m : CQ^m = QM^n : AE^n$.

COROLLARIUM.

Tab. VI. Fig. 61. 541. Quare ſi CE $= b$, AE $= a$, CQ $= x$, QM $= y$, erit $ab = xy$ & pro infinitis Conchoidibus $a^n b^m = x^m y^n$.

SCHOLION.

542. *Æquatio hæc videtur eadem cum æquatione Hyperbolæ inter aſymptotos* (§. 486); *eadem tamen non eſt, cum in præſente caſu æquatio non exprimat relationem punctorum per rectas parallelas ad eandem rectam poſitione datam, quemadmodum in Hyperbola.*

PROBLEMA CCXXVI.

543. *Invenire æquationem ad quodlibet punctum Conchoidis, in qua* CE : CQ = QM : AE.

Sit AE $= a$, CE $= b$, PM $= y$, PE $= x$, erit CP $= b + x$, $CP^2 = b^2 + 2bx + x^2$, $CM^2 = y^2 + b^2 + 2bx + x^2$ (§. 417 *Geom.*), & (§. 268 *Geom.*) CP : CM = CE : CQ = EP : QM. Quare CE. EP : CQ. QM $= CP^2 : CM^2$ (§. 213 *Arithm.*), hoc eſt, ob CQ. QM = CE. EA *per hypoth.*

CE. EP : CE. EA $= CP^2 : CM^2$

eſt (§. 181 *Arith.*),

EP : EA $= CP^2 : CM^2$

$x : a = b^2 + 2bx + x^2 : y^2 + b^2 + 2bx + x^2$

$ab^2 + 2abx + ax^2 = y^2 x + b^2 x + 2bx^2 + x^3$

quæ eſt æquatio deſiderata.

DEFINITIO L.

Tab. VI. Fig. 63. 544. Diametro AB ſemicirculi AOB jungatur ad angulos rectos recta indefinita BC. Ducatur recta AH, fiatque AM = IH, vel in altero quadrante LC = AN: erit punctum M, itemque L in curva AMOL, quam *Ciſſoidem* dixit DIOCLES inventor.

COROLLARIUM I.

545. Ducantur rectæ PM & KI ad AB normales; erunt eædem inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*), & (§. 268 *Geom.*) AP : KB = AM : IH. Sed AM = IH (§. 544). Ergo AP = KB (§. 149 *Arithm.*), conſequenter AK = PB (§. 88 *Arithm.*), & PN = IK.

COROLLARIUM II.

546. Eodem modo patet, Ciſſoidem AMO ſemicirculum AOB bifariam dividere. Eſt enim AO : OF = AG : GB (§. 268 *Geom.*). Sed AO = OF (§. 544). Ergo AG = GB (§. 149 *Arithm.*). Eſt itaque ANO quadrans.

COROLLARIUM III.

547. AK : KI = KI : KB (§. 327 *Geom.*), hoc eſt, AK : PN = PN : AP (§. 545). Porro AK : (KI) PN = AP : PM (§. 268 *Geom.*). Ergo PN : AP = AP : PM (§. 167 *Arithm.*). Sunt adeo AK, PN, AP & PM quatuor lineæ continue proportionales &, ſi fiat PN $= v$, AP $= x$, PM $= y$, $x^2 = vy$. Eodem modo oſtenditur eſſe AP, PN, AK, KL continue proportionales.

PROBLEMA CCXXVII.

548. *Invenire æquationem, quæ naturam Ciſſoidis* AMOL *declarat.*

Sit AB $= a$, AP $= x$, PM $= y$; erit AK = PB (§. 545) $= a - x$, $KI^2 = PN^2 = ax - x^2$ & (§. 547, 124)

$AK^2 : PN^2 = AP^2 : PM^2$

$a^2 - 2ax + x^2 : ax - x^2 = x^2 : y^2$

$a^2 y^2 - 2axy^2 + x^2 y^2 = ax^3 - x^4$ ($a - x$ div.

$ay^2 - xy^2 = x^3$

hoc eſt, $(a - x) y^2 = x^3$

Theorema. In Ciſſoide DIOCLIS cubus abſciſſæ AP æquatur ſolido ex quadrato ſemiordinatæ PM in complementum diametri circuli genitoris PB.

COROL-

COROLLARIUM I.

Tab. VI. Fig. 63. 549. Quando punctum P cadit in B, tum fit $x = a$ & $BC = y$, consequenter $y^2 = \frac{a^3}{0}$. Quare $0 : 1 = a^3 : y^2$, hoc est, valor ipsius y fit infinitus, adeoque Cissois AMOL cum BC nunquam concurrit. Est ergo BC Cissoidis asymptotus.

COROLLARIUM II.

550. Cissois est linea secundi generis (§. 382).

SCHOLION.

551. *Veteres tam Conchoide, quam Cissoide usi sunt ad inveniendas duas medias continue proportionales inter duas rectas datas, quemadmodum docet* PAPPUS.

DEFINITIO LI.

Tab. VI. Fig. 64. 552. Si recta AX dividatur in partes quotcunque æquales, ipsique in punctis divisionum A, P, p &c. jungantur rectæ AN, PM, pm &c. continue proportionales, puncta N, M, m &c. in curva existunt, quæ *Logistica*, itemque *Logarithmica* vocari solet.

COROLLARIUM I.

553. Sunt ergo abscissæ AP, Ap &c. semiordinatarum PM, pm &c. logarithmi (§. 334 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

554. Hinc si $AP = x$, $Ap = v$, $PM = y$, $pm = z$, & logarithmi ipsorum y & $z = ly$ & lz; erit $x = ly$ & $v = lz$; consequenter $x : v = ly : lz$, hoc est, denominatores rationum AN : PM & AN : pm sunt inter se ut abscissæ AP & Ap.

COROLLARIUM III.

555. Quamobrem infinitas alias logisticas excogitare licet, si fiat $x^m : v^m = ly : lz$, ut nempe abscissarum potestates aut radices quæcunque (m nempe numerum fractum denotante) sint semiordinatarum logarithmi.

COROLLARIUM IV.

556. Cum semiordinatæ pm continuo decrescant, ratione AN ad pm cum abscissis continuo crescente (§. 552 *Analys.* & §. 205 *Arithm.*) curva ad axem AX continuo propius accedit. Quodsi pm ponatur fieri nihilo æqualis, ratio ipsius AN in infinitum augetur, consequenter & abscissa AP (§. 554.). Quare logistica nonnisi infinito intervallo cum axe concurrit, adeoque AX est ejus asymptotus. Tab. VI. Fig. 64.

DEFINITIO LII.

557. Si quadrans circuli in partes quotcunque æquales in punctis P, p, p, &c. dividatur & ex radiis CP, Cp, Cp, &c. resecentur CM, Cm, Cm &c. continue proportionales; puncta M, m, m, &c. erunt in *Logistica spirali*. Tab. VI. Fig. 65.

COROLLARIUM I.

558. Sunt ergo arcus AP, Ap &c. logarithmi ordinatarum CM, Cm &c.

COROLLARIUM II.

559. Unde liquet, infinitas logisticas spirales excogitari posse (§. 555).

DEFINITIO LIII.

560. Si quadrans BGD bifariam dividatur in G & arcus BG, GD denuo subdividantur bifariam in E & F, atque ita porro; axis AC arbitrariæ longitudinis assumtus eodem modo dividatur in partes æquales Ah, hi, ik, kC, tandemque in punctis h, i, k, C applicentur normales eh, ig, kf, Cd ipsis HE, IG, KF, CD æquales; puncta A, e, g, f, d erunt in Linea, a LEIBNITIO inventore *Linea Sinuum* dicta. Tab. VI. Fig. 66.

COROLLARIUM.

561. Cum HE, IG, KF, CD sint sinus arcuum BE, BG, BF, BD (§. 2 *Trigon.*) erunt abscissæ Ah, Ai, Ak, AC ut arcus seu anguli, semiordinatæ eh, ig, kf, Cd, ut sinus eorundem arcuum seu angulorum.

DEFINITIO LIV.

Tab. VI. Fig. 66. 562. Iisdem factis, quæ in definitione præcedente fieri præcipimus, fiant *eh*, *ig*, *kf* &c; tangentibus BL, BM, BN &c. vel secantibus CL, CM, CN &c. æquales; Curvæ adhuc aliæ gignentur, quas *Lineas Tangentium* & *Secantium* appellare libet.

COROLLARIUM.

563. In linea tangentium abscissæ sunt ut arcus seu anguli, semiordinatæ ut eorundem tangentes: in secantium vero linea abscissæ itidem sunt ut arcus seu anguli, semiordinatæ ut eorundem secantes.

DEFINITIO LV.

Tab. VI. Fig. 67. 564. Quadrans arcus ANB dividatur in partes quotcunque æquales in N, *n* &c. per continuam bisectionem; in totidem dividatur radius AC per puncta P, *p* &c. Ducantur radii CN, *cn* &c. denique ex punctis P, *p* &c. erigantur perpendiculares PM, *pm* &c. istis in punctis M, *m* &c. occurrentes: erunt puncta M, *m* &c. in curva, quam DINOSTRATES inventor *Quadratricem* appellavit.

COROLLARIUM.

565. Est ergo ANB : AN = AC : AP. Quare si fiat ANB $= a$, AC $= b$, AN $= x$, AP $= y$; erit $ay = bx$.

DEFINITIO LVI.

Tab. VI. Fig. 68. 566. Si quadrans ANB & ejus radius in partes æquales dividantur, ut in definitione præcedente, & ex punctis P, *p* &c. agantur rectæ PM, *pm* &c. ipsi CB; ex punctis N, *n* &c. rectæ NM, *nm* &c. ipsi AC parallelæ: puncta M, *m*, &c. sunt in *Quadratrice Tschirnhusiana* a D^no DE TSCHIRNHAUSEN ad imitationem alterius excogitata (*a*).

(*a*) In *Medicina Mentis* part. II. p. 114.

COROLLARIUM I.

567. Cum etiam hic ANB : AN = AC : AP; Quadratrix quoque *Tschirnhusiana* continetur sub æquatione $ay = bx$.

COROLLARIUM II.

568. Quoniam PM = QN, erit PM Sinus arcus AN (§. 2. *Trigon.*). Quare cum sit AP : A*p* = AN : A*n* (§. 566); abscissæ Quadratricis hujus sunt ut arcus & semiordinatæ ut sinus eisdem respondentes, quemadmodum in linea sinuum (§. 561).

DEFINITIO LVII.

569. Peripheria circuli AP*p*A dividatur in partes quotcunque æquales in punctis, P, *p*, per continuam bisectionem. In totidem partes dividatur radius CA, fiatque CM parti uni, C*m* vero duabus &c. partibus radii æqualis. Erunt puncta M, *m*, *m*, &c. in linea curva, quam ab inventore ARCHIMEDE dicunt *Spiralem* vel *Helicem Archimedeam*. Dicitur autem *Spiralis prima*, quia continuari potest, circulo duplo radio descripto: immo *secunda* continuatur, descripto radio circulo triplo & ita porro in infinitum.

COROLLARIUM I.

570. Est ergo AP ad peripheriam ut CM ad radium. Quare si peripheria dicatur p, radius AC $= r$, AP $= x$, PM $= y$, erit CM $= r - y$, consequenter ob $p : r = x : r - y$; habebimus $pr - py = rx$.

COROLLARIUM II.

571. Si CM $= y$; erit $rx = py$: quam æquationem cum Quadratrice tam DINOSTRATIS, quam TSCHIRNHUSII, communem habet spiralis.

Co-

COROLLARIUM III.

572. Quare pro infinitis ſpiralibus & quadratricibus erit $r^n x^m = p^n y^m$.

DEFINITIO LVIII.

Tab. XII. Fig. 70. 573. *Cyclois* vel *Trochois* eſt curva, quam deſcribit punctum *a* in peripheria circuli, ſi circulus ſuper recta AC rotatur.

COROLLARIUM I.

574. Recta igitur AC peripheriæ; AD ſemiperipheriæ circuli æqualis eſt, & in quocumque circuli genitoris ſitu A*d* arcui P*d*.

COROLLARIUM II.

575. Si PL ducatur cum AD parallela; erit PM arcui BM circuli genitoris æqualis. Eſt enim P*d* = A*d* & hinc P*b* = *d*D (§. 574). Quare cum NL = D*d* (§. 226 *Geom.*) & ob P*b* = MB etiam PN = ML (§. 12 *Trigon.*); erit etiam PN + NM = PM = ML + NM = NL = D*d*; conſequenter ob D*d* = P*b* = MB, *per demonſtr.* PM = MB. Sumto igitur arcu MB pro abſciſſa, PM pro ſemiordinata, ſi BM = x, PM = y; erit $x = y$.

DEFINITIO LIX.

576. *Epicyclois* deſcribitur, ſi circulus non ut in præcedente definitione ſuper recta, ſed ſuper peripheria alterius circuli incedat. Dicitur *Epicyclois ſuperior*, ſi circulus genitor per peripheriæ convexitatem rotatur: *Epicyclois inferior*, ſi ejus concavitatem emetitur.

SCHOLION I.

577. *Logarithmica*, *Logiſtica ſpiralis*, *Linea ſinuum*, *Linea tangentium*, *Linea ſecantium*, *Quadratrix* DINOSTRATIS, *Quadratrix* Tſchirnhuſiana, *Spiralis* Archimedea, *Cyclois*, *Epicyclois ſunt lineæ transcendentes*; *neque enim per æquationes algebraicas explicari poſſunt. Tradidimus equidem pro aliquibus earum æquationes; veruntamen cum in his aſſumſerimus arcus circulares in numerum indeterminatarum, æquationes algebraicæ non ſunt. Suppoſuimus enim ſuperius, æquationes algebraicas relationem, quam habent puncta curvarum ad axem vel diametros, per ſolas lineas rectas explicare debere.*

SCHOLION II.

578. *Innumeræ autem curvæ aliæ tam algebraicæ, quam transcendentes excogitari poſſunt & actu excogitatæ ſunt a Geometris. Sed de his omnibus agere minime conſultum eſt. Trademus autem in Analyſi infinitorum methodos generales, quibus non modo curvarum hactenus explicatarum, ſed etiam aliarum quarumcunque ſymptomata, ſi quando iis opus habemus, erui poſſunt. Ut tamen appareat, quomodo plures excogitari poſſint; unum alterumque exemplum addere lubet.*

PROBLEMA CCXXVIII.

§. 579. *Invenire naturas curvarum, quæ prodeunt, ſi ſemiordinatæ* PM *continuentur in* N, *donec fiant chordis* AM *æquales.* Tab. XIII. Fig. 125.

Facile apparet, curvas infinitas, immo infinitas earum ſeries conſtrui poſſe. Æquatio igitur in dato caſu ſpeciali eruenda ex æquatione curvæ genetricis ABC. Sit ea circulus, cujus diameter a. Sit in omni caſu AP $= x$, PN $= y$; erit PM$^2 = ax - x^2$ (§. 377). Quare cum AP$^2 = x^2$, & AM$^2 =$ AP^2 + PM^2 (§. 417 *Geom.*); erit AM$^2 = ax$, conſequenter æquatio ad curvam genitam AND, $y^2 = ax$. Eſt itaque curva AND Parabola (§. 388).

Sit curva genetrix AMC Parabola; erit PM$^2 = ax$ (§. 388); conſequenter AM$^2 =$ PN$^2 = ax + x^2$. Quoniam

itaque

Tab. XIII. Fig. 125. itaque æquatio ad curvam AND, $y^2 = ax + x^2$; erit ea Hyperbola æquilatera, cujus axis transversus $= a$ (§. 457).

Sit curva genetrix AMC Hyperbola æquilatera: erit $PM^2 = ax + x^2$, consequenter $AM^2 = PN^2 = ax + 2x^2$. Æquatio itaque ad curvam AND, $y^2 = ax + 2x^2$, adeoque eadem Hyperbola scalena, cujus parameter a, axis transversus vero $= \frac{1}{2}a$ (§.459).

Sit AMC Parabola secundi generis, erit $PM = \sqrt[3]{a^2x}$ (§. 519), adeoque $PM^2 = \sqrt[3]{a^4x^2}$ & $PN^2 = x^2 + \sqrt[3]{a^4x^2}$. Cum itaque æquatio ad curvam sit $y^2 = x^2 + \sqrt[3]{a^4x^2}$; erit $(y^2 - x^2)^3 = a^4x^2$, seu $y^6 - 3x^2y^4 + 3x^4y^2 - x^6 = a^4x^2$.

SCHOLION.

580. *Patet per Problema præsens plurimarum curvarum descriptiones facillimo negotio detegi posse: quod idem per sequentia quoque Problemata intelligitur. Nec minus liquet, eodem modo ad axem* AB *applicari posse tangentes, subtangentes, normales, subnormales, & quascunque alias lineas eodem modo determinatas. Hoc pacto subinde Theoremata non inelegantia reperiuntur, qualia in ipsa resolutione Problematis præsentis continentur,* v. gr. *Quod, si Parabola circa diametrum circuli describatur, chordæ circuli* AM *sint semiordinatis Parabolæ* PN *æquales.*

PROBLEMA CCXXIX.

Tab. XIII. Fig. 126. 581. *Investigare naturas curvarum, quæ gignuntur, si ad chordam* AM *curvæ genetricis* AMC *erigatur perpendicularis* AN *semiordinatam* PM *ultra axem* AB *continuatam secans in* N.

Sit curva genetrix AMC: Quoniam MAN angulus rectus *per hypothesin*; erit PM : AP = AP : PN (§. 327 *Geom.*); consequenter $PM^m : AP^m = AP^m : PN^m$ (§. 124), adeoque $PN^m = AP^{2m} : PM^m$; consequenter si $AP = x$, $PN = y$; $y^m = x^{2m} : PM^m$. Valor igitur ipsius PM & exponens m ex æquatione curvæ genetricis AMC determinantur.

Sit AMC circulus; erit $PM^2 = ax - x^2$, adeoque æquatio ad curvam ANR, $y^2 = x^4 : (ax - x^2) = x^3 : (a - x)$. Est igitur curva ANR Cissois DIOCLIS (§. 548).

Sit curva genetrix Parabola *Apolloniana*: erit $PM^2 = ax$, adeoque $y^2 = x^4 : ax = x^3 : a$, hoc est, $ay^2 = x^3$. Est igitur ANR Parabola secundi generis (§.519).

Sit in genere curva genetrix quædam ex Parabolis infinitis, quæ definiuntur per æquationem $PM^m = ax^{m-1}$, adeoque $y^m = x^{2m} : ax^{m-1} = x^{m+1} : a$ hoc est, $ay^m = x^{m+1}$. Est igitur ANR Parabola proxime superior genetrice. Unde patet modus describendi omnes Parabolas in infinitum, quæ continentur sub æquatione $y^m = ax^{m-1}$.

Sit curva genetrix Hyperbola æquilatera: erit $PM^2 = ax + x^2$, adeoque $y^2 = x^4 : (ax + x^2) = x^3 : (a + x)$. Est igitur ANR curva secundi generis affinitatem quandam habens cum Cissoide; sed quæ peculiari nomine destituitur.

Sit curva genetrix Ellipsis: erit $PM^2 = (abx - bx^2) : a$, adeoque $y^2 = ax^4 : (abx - bx^2)$ hoc est $by^2 = ax^3 : (a - x)$.

SCHO-

SCHOLION I.

582. *Si Circuli superiorum generum sumuntur pro genetrice, Cissoides superiorum generum erunt genitæ.*

PROBLEMA CCXXX.

Tab. VIII. Fig. 127. 583. *Sit curva genetrix* AMK, *recta* AT *ad axem* AX *normalis*, AS *magnitudinis constantis; investigare naturam curvæ, in qua est punctum* N, *quod determinatur, demissa ex* S *perpendiculari* SR *ad semiordinatam genetricis* PM *& ducta recta* QN *par punctum curvæ genetricis* M *axi* AX *parallela, rectæ* AN *ex vertice* A *per punctum* R *ductæ occurrente in* N.

Sit $AS = a$, $AQ = x$, $QN = y$, erit ob parallelas SR & QN (§. 268 *Geom.*)

$$AS : (SR)\ QM = AQ : QN$$ Tab. XIII. Fig. 127.

$$a : QM = x : y$$

adeoque $\frac{QM.\,x}{a} = y$

Sit AMK Parabola *Apolloniana*, erit $QM = x^2 : a$. Est igitur

$$y = x^3 : a^2$$

$$a^2 y = x^3$$

quæ est æquatio ad Parabolam secundi generis (§. 519).

Sit AMK quædam ex infinitis Parabolis, erit $QM = x^m : a^{m-1}$ (§. *cit.*), adeoque $y = x^{m+1} : a^m$; consequenter $a^m y = x^{m+1}$. Est igitur curva genita Parabola proxime superior genetrice, patetque simul modus describendi Parabolas omnes in infinitum, quæ continentur sub æquatione $a^{m-1} x = y^m$.

CAPUT VII.

De Locis Geometricis.

DEFINITIO XL.

584. *Locus Geometricus* est linea, per quam construitur Problema indeterminatum. In specie *Locus ad rectam* dicitur, si linea recta æquationi construendæ sufficit; *Locus ad circulum*, si circulo utendum & ita porro.

DEFINITIO XLI.

385. Loca ad lineam rectam & circulum Veteres dixere *Loca plana*: quæ vero sunt ad parabolam, ellipsin aut hyperbolam, *Loca solida*. Commodius Loca in ordines distinguuntur secundum numerum dimensionum, ad quem assurgunt quantitates indeterminatæ. Sic *Locus primi ordinis* est, si æquatio $x = ay : c$. *Locus secundi seu quadratici ordinis*, si ex. gr. $y^2 = ax$, vel $y^2 = a^2 - x^2$ &c. *Locus tertii seu cubici ordinis*, si ex. gr. $y^3 = a^2 x$, vel $y^3 = ax^2 - x^3$ &c.

PROBLEMA CCXXXI.

585. *Construere loca ad rectam.* Tab. VII.

Si $y = ax : b$; $y = ax : b + c$, $y = ax : b - c$, vel $y = c - ax : b$; Locus semper est ad rectam. Sit enim angulus datus CAB, in quo fiat $AI = b$, $IE = a$: Fig. 71.

Tab. VII. Fig. 71. ductis ipsi EI parallelis quibuscunque PM, *pm* &c. erit AP$=x$, PM$=y$. Est enim (§. 268 *Geom.*)

AI : IE $=$ AP : PM

$b : a = x : y$

Ergo $ax : b = y$

Quodsi EI continuetur in G, ita ut sit IG $= c$, per G agatur DF ipsi AB, & ex A, AD ipsi EI parallela, erit AP$=$DQ $= x$, QM, $= y$. Est enim PM$=ax : b$, *per demonstr.* PQ$=c$ (§. 257 *Geom.*). Ergo QM$=ax : b + c = y$.

Si LG$=b$, GE$=a$ & LQ$=x$: erit QM$=ax : b$, *per demonstr.* Fiat IG$=c$ & per I ducatur ipsi DF parallela AB, erit PQ$=c$ (§. 257 *Geom.*), consequenter PM $= ax : b - c$.

Tab. VII. Fig. 72. Denique sit AC$=c$ & AD$=b$; ducatur per D recta EF ipsi AC parallela fiatque DE$=a$. Ducatur recta AL & per C ipsi AL parallela CB. Quodsi alia parallela MN ad EF agatur: erit AP$=x$, PM$=y$. Est enim (§. 268 *Geom.*)

AD : DE $=$ AP : PN

$b : a = x : \frac{ax}{b}$

Sed MN$=$AC$=c$ (§. 257 *Geom.*). Ergo PM $= c - ax : b$.

PROBLEMA CCXXXII.

587. *Invenire Theoremata generalia construendi omnes aequationes ad Parabolam.*

Duo Theoremata nobis investiganda: in quorum altero y refertur ad concavitatem, in altero autem ad convexitatem Parabolae.

Tab. VII. Fig. 75. Sint KP & DL, itemque KD & QM inter se parallelae, & LDH angulus quicunque. Sit porro KA $=p$, DH$=q$, LH$=r$, DK $=$ PN (§. 257 *Geom.*)$=n$, DL$=f$, & parametro t describatur Parabola AM, cujus axis vel diameter AP. Sit porro DQ$=x$, QM$=y$: erit (§. 268 *Geom.*)

DH : DL$=$DQ : DN ($=$PK)

$q : f = x : \frac{fx}{q}$

DH : HL$=$DQ : QN

$q : r = x : \frac{rx}{q}$

Ergo AP$=$PK$-$KA$=fx : q - p$

& PM$=$QM$-$PN$-$QN$=y - \frac{rx}{q} - n$

Quare cum sit PM$^2 = t$. AP (§. 388), erit

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tfx}{q} - tp$$

hoc est,

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tfx}{q} + tp$$

Sit denuo in casu altero, ubi IM parallela ipsi DQ & DI ipsi QM, KA$=p$, DH$=q$, LH$=r$, DK$=$PN (§. 257 *Geom.*)$=n$, DI$=f$, IM$=$DQ $=y$, QM$=x$. Parabola AM denuo parametro t describatur.

Erit (§. 268 *Geom.*)

DH : DL$=$DQ : DN

$q : f = y : \frac{fy}{q}$

DH : HL$=$DQ : QN

$q : r = y : \frac{ry}{q}$

Ergo AP$=$DN$-$AK$=fy : q - p$ & PM $=$ QM

$= QM - QN - PN = x - ry : q - n$.

Tab. VII. Quare cum sit $PM^2 = t. AP$; erit

Fig. 76. (§. 388, 419),

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q_2} - 2nx + \frac{2nry}{q} + n^2 = \frac{tfy}{q} - tp$$

hoc est,

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2nry}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tfy}{q} + tp$$

Tab. VII. Fig. 75. Sit ex. gr. $y^2 - ax = 0$, erit $- \frac{2r}{q} = 0$, adeoque $\frac{r^2}{q^2} = 0$, & $f = q$; porro $n = 0$ & $tf : q = a$, hoc est, $a = t$. Cadit ergo punctum D in A & Q in P, nec alia re opus est, quam ut parametro a Parabola AM describatur: erit enim $AP = x$, $PM = y$.

Sit $y^2 + ay - bx + \frac{1}{4}aa = 0$; erit $2r : q = 0$, consequenter H cadit in L, adeoque $f = q$. Porro $a = - 2n$: ergo $- \frac{1}{2}a = n$. Item $- t = - b$, adeoque $t = b$. Denique $n^2 + tp = \frac{1}{4}aa$, hoc est, $\frac{1}{4}a^2 + bp = \frac{1}{4}a^2$, adeoque $p = 0$. Cadit adeo punctum K in A. Parametro itaque

Tab. VII. Fig. 74. b describenda Parabola AM & in A erigenda perpendicularis $AB = \frac{1}{2}a$. Ducta enim BS axi AB parallela, erit ob $n = \frac{1}{2}a$, $MS = y$ & $BS = x$.

Sit $yy - ay - bx + cc = 0$, erit $\frac{2r}{q} = 0$, adeoque $q = f$

$$\frac{-2n = -a}{n = \frac{1}{2}a} \quad \frac{-t = -b}{t = b} \quad \frac{n^2 + tp = -cc}{tp = -c^2 - \frac{1}{4}aa}$$
$$p = (-c^2 - \frac{1}{4}a^2) : b$$

Parametro ergo b describenda Parabola AHM, & quia KA, sive p, est quantitas negativa, auferenda est ex AP, ita ut origo indeterminatæ x statuatur in R vel N. Denique ob $n = \frac{1}{2}a$; fiat $AD = \frac{1}{2}a$ & ducatur DQ parallela axi AP, erit $NQ = RP = x$, & $QM = y$.

Sit $x^2 - ay + bb = 0$: erit, vi Theorematis secundi, $r : q = 0$, adeoque $q = f$. Porro $n = 0$ & Tab. VII. Fig. 74.

$$\frac{-t = -a}{t = a} \qquad \frac{\frac{tp = bb}{ap = bb}}{p = \frac{bb}{a}}$$

Construitur adeo Parabola AHM parametro a, factaque $AK = bb : a$; erit $KP = y$, $PM = x$.

Sit $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} - cx = 0$, erit

$$- \frac{2r}{q} = - \frac{a}{b} \quad 2n = 0 \quad - \frac{tf}{q} = - c$$
$$\frac{r}{q} = \frac{a}{2b} \quad n = 0 \quad t = \frac{qc}{f} = \frac{2bc}{f}$$
$$n^2 + tp = 0$$
$$p = 0$$

Construatur itaque parametro $2bc : f$ Parabola AHM, & factis $AO = 2b$, atque RO ad AP normalis $= a$, ducatur recta AT; erit TM ipsi OR parallela $= y$, $AT = x$.

Ceterum loca esse rite constructa patet, si assumtis valoribus, prout per regulam determinantur, quæratur æquatio ad curvam, eademque cum proposita reperiatur. Etenim si in exemplo ultimo $AO = 2b$, $RO = a$, parameter $= 2bc : f$, $AT = x$, $TM = y$, cum sit

$$AO : AR = AT : AP$$
$$2b : f = x : \frac{fx}{2b}$$

erit $t. AP = 2bcfx : 2bf = cx$.

Et quia $AO : OR = AT : TP$

$$2b : a = x : \frac{ax}{2b}$$

erit $PM = TM - TP = y - \frac{ax}{2b}$

adeoque $PM^2 = y^2 - \frac{axy}{2b} + \frac{a^2x_2}{4b^2}$

Quare $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} = cx$, consequenter $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} - cx = 0$, quæ est æquatio ad construendum proposita.

PROBLEMA CCXXXIII.

588. *Invenire Theorema generale construendi omnia loca solida ad Ellipsin.*

 Circa

Tab. VII. *Fig.* 78. Circa diametrum AB descripta sit Ellipsis AMB, sintque KD & LH semiordinatæ PM, DL diametro AB parallelæ. Sit KD $=$ PN $= n$, KC $= p$, DH $= q$, LH $= r$, DL $= f$, semidiameter AC vel CB $= m$, parameter $= t$, DQ $= x$, QM $= y$. Erit (§. 257 *Geom.*) KP $=$ DN, & (§. 268 *Geom.*)

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$
$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$

Quare $CP = DN - KC = fx : q - q$ & $PM = QM - QN - PN = y - rx : q - n$. Jam ex natura Ellipsis (§. 420),

$$t : 2m = PM^2 : AP.\ PB.$$

Est vero $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$, $AP = m + \frac{fx}{q} - p$ & $PB = m - \frac{fx}{q} + p$, adeoque $AP.\ PB = m^2 - p^2 + \frac{2pfx}{q} - \frac{f^2x^2}{q^2}$. Ergo (§. cit.) $y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tm^2 - tp^2}{2m} + \frac{2tpfx}{2mq} - \frac{tf^2x^2}{2mq^2}$

Unde tandem habetur

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$+ \frac{tf^2x^2}{2mq^2} \quad - \frac{2tpfx}{2mq} - \frac{tm^2}{2m}$$
$$+ \frac{tp^2}{2m}.$$

Sit ex. gr. $y^2 + \frac{cx^2}{b} - \frac{aac}{b} = 0$. Quia in æquatione non habentur xy, y & x: erunt $r : q = 0$, $q = f$, $n = 0$, $p = 0$; hinc $t : 2m = c : b$, hoc est, $c : b$ exprimit rationem parametri ad diametrum. Erit porro $-\frac{tm^2}{2m} = -\frac{aac}{b}$, hoc est, substituto pro $t : 2m$ valore ipsius ante invento $c : b$, $\frac{m^2c}{b} = \frac{aac}{b}$. Quare $m^2 = aa$, & hinc semidiameter $m = a$. Jam quoniam $2m : t = b : c$, erit $t = \frac{2ac}{b}$. Parametro igitur $\frac{2ac}{b}$ & axe $2a$ construatur Ellipsis AMB; erit CP $= x$, PM $= y$.

Sit $y^2 + \frac{cx^2}{b} - \frac{cdx}{b} - \frac{aac}{b} = 0$. Quia in æquatione non habentur xy & y, erit $r : q = 0$, $n = 0$; consequenter $f = q$. Quare $\frac{t}{2m} = \frac{c}{b}$, adeoque ratio diametri AB ad parametrum est $= b : c$. Porro $\frac{2tp}{2m} = \frac{cd}{b}$, hoc est, ob $t : 2m = c : b$, $2p = d$, seu $p = \frac{1}{2}d$. Denique $-\frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = -\frac{aac}{b}$, hoc est, ob $t : 2m = c : b$, $m^2 - p^2 = aa$, seu $m^2 = aa + \frac{1}{4}dd$. Est itaque semidiameter $\sqrt{(aa + \frac{1}{4}dd)}$. Quodsi ergo semidiametro $\sqrt{(aa + \frac{1}{4}dd)}$ & parametro $2c\sqrt{(aa + \frac{1}{4}dd)} : b$ describatur Ellipsis, fiatque KC $= \frac{1}{4}d$; erit KP $= x$, PM $= y$.

Sit $y^2 - dxy : f + bx^2 : c - aa = 0$. Erit $2r : q = d : f$, adeoque $r : q = d : 2f$. Porro $r^2 : q^2 + tf^2 : 2mq^2 = b : c$, hoc est $d^2 : 4f^2 + tf^2 : 2m.4f^2 = b : c$, consequenter $t : 2m = (4bf^2 - cd^2) : cf^2$. Est denique $n = 0$, $p = 0$ & $-tm^2 : 2m = -aa$, consequenter $m^2 = a^2cf^2 : (4bf^2 - cd^2)$, adeoque $m = \sqrt{a^2cf^2} : \sqrt{(4bf^2 - cd^2)}$. Hinc vero porro ad datam rationem $2m : t$ reperitur parameter t. Quare si parametro t & diametro $2m$ Ellipsis construatur, fiatque CF $= 2f$, DF $= d$, ducta recta CQ ex C per F semiordinatæ PM continuatæ in Q occurrente, erit QM $= y$, CQ $= x$.

Locum rite esse constructum, eodem modo quo in Parabola ostenditur. Etenim

CF

$$CF : DF = CQ : QP$$
$$2f : d = x : \frac{dx}{2f}$$

Quare $PM = y - \frac{dx}{2f}$, conſequenter $PM^2 = y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$.

Porro $CF : CD = CQ : CP$
$$2f : s = x : \frac{sx}{2f}$$

Quare $AP = \sqrt{\frac{aacs^2}{(4bf^2 - cd^2)}} + \frac{sx}{2f}$ & $PB = \sqrt{\frac{aacs^2}{(4bf^2 - cd^2)}} - \frac{sx}{2f}$, conſequenter $AP.PB = \frac{aacs^2}{4bf^2 - cd^2} - \frac{s^2x^2}{4f^2}$. Eſt itaque $\frac{t}{2m}. AP.PB = (4bf^2 - cd^2)\, a^2 cs^2 : cs^2\,(4bf^2 - cd^2) - (4bf^2 s^2 x^2 - cd^2 s^2 x^2) : 4cf^2 s^2 = a^2 - \frac{bx^2}{c} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$; conſequenter cum ſit in Ellipſi $\frac{t}{2m}. AP.PB = PM^2$ (§.420), $y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{d^2x^2}{4f^2} = a^2 - \frac{bx^2}{c} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$. Ergo $y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{bx^2}{c} - a^2 = 0$.

COROLLARIUM.

589. Cum in Ellipſi ſit $b : a = y^2 : ax - x^2$ (§.420); ſi $b = a$, hoc eſt, ſi parameter diametro æqualis, erit $y^2 = ax - x^2$, ſeu $y^2 - ax + x^2 = 0$, quæ eſt æquatio ad Circulum (§. 377). Æquatio itaque localis ad Ellipſin degenerat in æquationem localem ad Circulum: ſi ponatur $t = 2m$ & angulus ad P rectus: quo facto erit

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0.$$
$$+ \frac{s^2x^2}{q^2} \qquad - \frac{2psx}{q} \; \begin{matrix} -m^2 \\ +p^2 \end{matrix}$$

Ceterum cum ex comparatione formulæ propoſitæ cum generali demum intelligatur, num $t = 2m$; eadem formula pro conſtruendis locis ad Ellipſin atque ad Circulum ſufficit.

Ponamus ex. gr. $y^2 + x^2 - by - cx = 0$. Quoniam xy deeſt, erit $r : q = 0$, conſequenter $s = q$. Quare $t : 2m = 1$, hoc eſt, $t = 2m$. Locus adeo planus eſt ad Circulum. Porro

$$-2n = -b \qquad\qquad -2tp : 2m = -c$$
$$n = \tfrac{1}{2}b \qquad\qquad 2p = c, \text{ ob } t = 2m.$$
$$p = \tfrac{1}{2}c$$

Denique $n^2 - m^2 + p^2 = 0$
$$n^2 + p^2 = m^2$$
h. e. $\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 = m^2$
$$m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2)}$$

Quare ducta linea recta AB & in ea aſſumta $CN = GD = \frac{1}{2}c$, ſi porro fiat $GN = CD$, & ad AB perpendicularis $= \frac{1}{2}b$, atque ex centro C radio CG deſcribatur circulus; erit $GR = NP = x$ & $RM = y$. Tab. VII. Fig. 73.

Cum enim ſit $CG^2 = CD^2 + GD^2$ (§. 417 *Geom.*), erit $CG = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2)}$. Porro, ob $PR = GN$ (§. 257 *Geom.*) $= \frac{1}{2}b$, eſt $PM = y - \frac{1}{2}b$, adeoque $PM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}bb$. Similiter $CP = PN - NC = x - \frac{1}{2}c$, adeoque $CP^2 = x^2 - bx + \frac{1}{4}cc$. Quare cum ſit $CP^2 + PM^2 = CM^2$ (§. 417 *Geom.*); erit $y^2 - by + \frac{1}{4}b^2 + x^2 - cx + \frac{1}{4}cc = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2$, adeoque $y^2 + x^2 - by - cx = 0$: quæ eſt æquatio localis ad conſtruendum propoſita.

PROBLEMA CCXXXIV.

590. *Invenire Theorema generale* [illegible] *ſtruendi omnia loca ad Hyperbolam circa diametrum deſcriptam.* Tab. [illegible] Fig. [illegible]

Diametro tranſverſa $AB = 2m$ & parametro t deſcripta ſit Hyperbola AM, cujus centrum in C, ductiſque KD & LH cum QM, DL vero cum BP parallelis, fiat $KD = PN = n$, $KC = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = s$, $DQ = x$, $QM = y$, erit (§. 257 *Geom.*) $KP = DN$ & (§. 268 *Geom.*)

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

 DH:

Tab. VIII. *Fig.* 80.

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$

Quare $CP = DN - KC = \frac{fx}{q} - p$ & $PM = QM - QN - PN = y - rx : q - n$. Jam (§. 459)

$$t : 2m = PM^2 : AP.\ PB$$

Est vero $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$ & $AP.\ PB = (CP - CA)(CP + CA) = CP^2 - CA^2$ (§. 499) $= \frac{f^2x^2}{q^2} - \frac{2pfx}{q} + p^2 - m^2$. Unde habetur

$$\frac{tf^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpfx}{2mq} + \frac{tp^2}{2m} - \frac{tm^2}{2m} = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2.$$

Quare æquatio generalis pro quovis loco hyperbolico,

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tf^2x^2}{2mq^2} \quad + \frac{2tpfx}{2mq} + \frac{tm^2}{2m}$$
$$- \frac{tp^2}{2m}$$

Quando contingit, reperiri $t = 2m$, Hyperbola est æquilatera (§. 505).

Eadem formula reperitur, si Hyperbola ad diametrum conjugatam refertur, nisi quod $tm^2 : 2m$ signo — afficiatur.

Sit ex. gr. $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{aac}{b} = 0$. Cum in æquatione non habeantur xy, y & x; erit $r : q = 0$, $n = 0$, $p = 0$, $f = q$; consequenter $-t : 2m = -c : b$, adeoque ratio parametri t ad diametrum $2m = c : b$. Porro $tm^2 : 2m = aac : b$, hoc est, ob $t : 2m = c : b$, $m^2 = aa$. Diameter adeo Hyperbolæ $2a$: unde ob rationem diametri ad parametrum datam reperiri diameter potest. Quare si datis diametro & parametro Hyperbola AML construatur; erit $CP = x$, $PM = y$. Est enim $AC = CB = a$, adeoque $BP = a + x$ & $AP = x - a$, consequenter $AP.\ PB = x^2 - a^2$. Quare $c : b = y^2 : x^2 - a^2$ (§. 459). Est itaque $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{a^2c}{b} = 0$.

Sit $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{acx}{b} = 0$. Quoniam in æquatione desiderantur xy, y & quantitas pure cognita; erit $r : q = 0$, $n = 0$ & quia (ob $r = 0$), DL coincidit cum DH, $f = q$. Quamobrem $-t : 2m = -c : b$, hoc est, ratio parametri t ad diametrum $2m$ denuo $= c : b$. Porro $2tp : 2m = ac : b$, hoc est, (ob $t : 2m = c : b$,) $2p = a$ seu $p = \frac{1}{2}a$: Denique quia ultimus terminus deficit, erit $n^2 + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = 0$ seu $m^2 = p^2 = \frac{1}{4}aa$, adeoque $m = \frac{1}{2}a$.

Quare cum ob rationem diametri ad parametrum datam detur etiam parameter $= \frac{ac}{b}$; constructa Hyperbola AML, erit $BP = x$, $PM = y$: quod ostenditur ut ante.

Sit $y^2 - x^2 + by - ax = 0$. Quia xy desideratur; erit $r : q = 0$, consequenter $f = q$. Quare $-t : 2m = 1$, hoc est, $t = 2m$. Est itaque locus ad Hyperbolam æquilateram (§. 505). Porro

$$-2n = +b \qquad 2tp : 2m = -a$$
$$n = -\tfrac{1}{2}b \qquad 2p = -a, \text{ob } t = 2m$$
$$p = -\tfrac{1}{2}a.$$
$$n^2 + \frac{tm^2}{2m} = \frac{tp^2}{2m}$$
$$n^2 + m^2 = p^2$$
$$m^2 = p^2 - n^2$$

hoc est, $m^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$

Diametro itaque $2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ construatur Hyperbola æquilatera AML, fiatque CR =

$CR = \frac{1}{2}a$, $KR = GP = \frac{1}{2}b$; erit $KG = RP = x$, $GM = y$. Eſt enim $PB = CB + CR + RP$ $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)} + \frac{1}{2}a + x$ & $AP = AR$ $+ RP = CR - CA + RP = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ $+ x$, adeoque $AP.PB = ax + x^2 + \frac{1}{4}b^2$. Porro $PM = GM + GP = y + \frac{1}{2}b$: adeoque PM^2 $= y^2 + by + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum ſit $PM^2 = AP.$ PB (§. 507); erit $y^2 + by + \frac{1}{4}b^2 = ax + x^2$ $+ \frac{1}{4}b^2$, adeoque $y^2 + by = ax + x^2$, conſequenter $y^2 - x^2 + by - ax = 0$.

Sit $y^2 - x^2 - by + ax = 0$. Quia xy deſideratur, erit $r : q = 0$, adeoque $r = 0$ & $q = f$. Quare $t : 2m = 1$, ſeu $t = 2m$. Eſt itaque locus ad Hyperbolam æquilateram. Porro

$$\begin{array}{lll} -2n = -b & 2p = a & n^2 + m^2 - p^2 = 0 \\ \hline n = \frac{1}{2}b & p = \frac{1}{2}a & m^2 = p^2 - n^2 \\ & & \quad = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2 \\ \hline & & m = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)} \end{array}$$

Diametro $2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ conſtruatur Hyperbola æquilatera AML, factaque CF ex centro $C = \frac{1}{4}a$ & FH ad FP perpendiculari $= \frac{1}{2}b$, ductisque HN ipſi FP & NM ipſi FH parallelis; erit $HN = x$, $NM = y$. Eſt enim $BP = FP - BF = x - \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, AP $= FP - FA = x - \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, adeoque $AP.PB = x^2 - ax + \frac{1}{4}b^2$. Porro $PM =$ $MN - PN = y - \frac{1}{2}b$, adeoque $PM^2 = y^2 -$ $by + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum ſit $PM^2 = AP.PB$ (§. 507), erit $y^2 - by + \frac{1}{4}b^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}b^2$, adeoque $y^2 - x^2 - by + ax = 0$.

PROBLEMA CCXXXV.

591. *Invenire Theorema generale conſtruendi omnia loca ſolida ad Hyperbolam intra aſymptotos.* (Tab. VIII. Fig. 81.)

Sint SA & AR aſymptoti Hyperbolæ MI. Ducatur DL uni earum AR parallela & huic jungatur utcunque recta DH. Sint denique KD, QM, IR, LH alteri aſymptotorum SA parallelæ. Ponamus denuo $KD = PN = n$, $KA = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = f$, $DQ = x$, $QM = y$, $RI = m$, $AR = DL = f$: erit (§. 268 *Geom.*) Tab. VIII. *Fig.* 81.

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$
$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$

Ergo $AP = DN - AK = \frac{fx}{q} - p$ & $PM = QM - PN - NQ = y - n - rx : q$.

Quare ob $AR.RI = AP.PM$ (§. 502).

$$mf = \frac{fyx}{q} - \frac{frx^2}{q^2} - py - \frac{fnx}{q} + \frac{prx}{q} + pn$$

$$mfq = fyx - \frac{frx^2}{q} - pqy - fnx + prx + pnq$$

$$mq = xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{f} - nx + \frac{prx}{f} + \frac{pnq}{f}$$

$$\begin{array}{l} xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{f} + \frac{prx}{f} + \frac{pnq}{f} = 0. \\ \qquad\qquad\qquad - nx \quad - mq \end{array}$$

Invenitur adhuc regula alia pro locis ad Hyperbolam intra aſymptotos, ſi valor ipſius x ponatur eſſe QM. Tab. VIII. Fig. 8[illegible]

Sit nimirum IM Hyperbola, cujus aſymptoti RA & AS. Ducantur DT, HL & QM cum aſymptoto AS, DL vero cum altera KR, & TM ipſi DH utcunque ductæ parallela. Sit ut ante AK $= p$, $KD = PN = n$, $DH = q$, $DL =$ $AR = f$, $HL = r$, $RI = m$, $QM = x$, DQ $= TM = y$. Erit (§. 268 *Geom.*)

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : f = y : \frac{fy}{q}$$
$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

Er-

Tab. VIII. Fig. 82. Ergo $AP = DN - AK = fy : q - p$ & $PM = QM - QN - NP = x - ry : q - n$.

Quare ob $AR.RI = AP.PM$ (§. 502)

$$mf = \frac{fxy}{q} - \frac{rfy^2}{q^2} - \frac{fny}{q} - px + \frac{pry}{q} + pn.$$

Unde tandem eodem modo, quo ante usi sumus, reperitur.

$$xy - \frac{ry^2}{q} - \frac{pqx}{f} + \frac{pry}{f} + \frac{pnq}{f} = 0.$$
$$- ny - mq$$

Sit ex. gr. $xy + \frac{fdy}{c} - \frac{abd}{c} = 0$: erit $r : q = 0$, adeoque $r = 0$ & hinc $q = f$, quia L cadit in H, $-pq : f = +fd : c$, hoc est,

Fig. 81. ob $q = f$, $p = -fd : c$. Porro $+pr : f - n = 0$, quia x in æquatione præsente deficit, & hinc, ob $r = 0$, $n = 0$. Denique $pnq : f - mq = - abd : c$. Sed $pnq : f = 0$; ergo $mq = mf = abd : c$. Quare si $f = ab : c$; erit $m = d$. Fiat igitur $AR = ab : c$, & $IR = d$, atque constructa Hyperbola intra asymptotos, porro $OA = fd : c$; erit $OP = x$, $PM = y$. Nam $AP = x + fd : c$ adeoque $AP.PM = xy + fdy : c$. Quare cum sit $AR.RI = abd : c$, erit

$$xy + fdy : c = abd : c$$

adeoque $xy + \frac{fdy}{c} - \frac{abd}{c} = 0$.

Sit $xy - \frac{bxx}{a} - cy = 0$. Erit $-r : q = -b : a$, hoc est, $r = b$, $q = a$. Porro $-pq : f = -c$. Ergo $p = fc : a$. Cum x in æquatione desit; $pr : f - n = 0$, seu $pr : f = n$, hoc est, $bc : a = n$. Denique quoniam terminus ultimus itidem deficit, $pnq : f - mq = 0$, seu $pnq : f = mq$, vel $pn : f = m$, hoc est, $bc^2 : a^2 = m$. Cognitis valoribus rectarum AK, KD, DH, HL, AR, RI; constructio loci manifesta est. Est enim $AK = fc : a$, $KD = bc : a$, $DH = a$, $HL = b$, $DL = AR = f$, $RI = bc^2 : a^2$, $DQ = x$, $QM = y$: His enim positis, erit $AR.RI = fbc^2 : a^2$. Porro (§. 268 *Geom.*).

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$a : f = x : \frac{fx}{a}$$

Quare cum sit $KA = fc : a$, erit $AP = (fx - fc)\ a$. Est vero etiam

$$DH : LH = DQ : QN$$
$$a : b = x : \frac{bx}{a}$$

Quare cum sit $KD = PN = bc : a$, & $QM = y$, erit $PM = y - bx : a - bc : a$. Habemus adeo $AP.PM = \frac{fxy}{a} - \frac{fcy}{a} - \frac{bfx^2}{a^2} + \frac{bfc^2}{a^2}$.

Quoniam itaque $AR.RI = AP.PM$, erit $\frac{fxy}{a} - \frac{fcy}{a} - \frac{bfx^2}{a^2} + \frac{bfc^2}{a^2} = \frac{bfc^2}{a^2}$: unde reperitur $xy - cy - \frac{bx^2}{a} = 0$.

SCHOLION.

592. *Ut usus hujus doctrinæ appareat, exempla aliquot Problematum indeterminatorum in medium afferenda. Antequam tamen id fiat, tradenda sunt criteria, unde judicium fieri possit, cum quanam formularum antecedentium comparanda sit æquatio ad construendum proposita. Nimirum duo occurrere possunt casus: aut enim in æquatione proposita habetur* xy, *aut minus. Si in priori casu quadratorum indeterminatorum neutrum occurrat, vel saltem alterutrum, locus est Hyperbola intra asymptotos; si quadrata indeterminatarum* x^2 *&* y^2 *diversis signis afficiuntur, locus est Hyperbola circa diametrum descripta; si eadem quadrata eodem signo afficiuntur, sitque coëfficiens dimidius facti* xy *æqualis radici coefficientis quadrati* x^2, *locus est Parabola; si minor, Hyperbola; si major, Ellipsis. In casu posteriori, si unum tantum quadratorum indeterminatorum adsit, locus est Parabola; si utrumque eodem signo afficiatur, Ellipsis vel Circulus; si signis diversis gaudeant, Hyperbola. Nempe in casu ultimo Hyperbola est æquilatera, in penultimo Circulus, si terminus* x^2 *a fractione liber. Quæ omnia manifesta sunt ex accurata formularum generalium inter se collatarum contemplatione. Quod*

Quod ſi quantitatis alicujus valor per regulam generalem eruitur negativus, quantitas iſta ex parte oppoſita ſumenda eſt, quemadmodum in exemplis propoſitis a nobis factum.

PROBLEMA CCXXXVI.

593. *Conſtruere Rhomboidem ea conditione, ut rectangulum ex lateribus ſit æquale quadrato dato.*

Sit quadratum datum a^2, ſint latera rhomboidis x & y: erit per conditionem Problematis $xy = a^2$. Conſtruenda itaque eſt Hyperbola intra aſymptotos CG & CR, cujus potentia AI $= a$. Erit CQ latus unum rhomboidis, QM alterum (§. 488).

PROBLEMA CCXXXVII.

594. *Quadratum conſtruere, quod ſit æquale rectangulo, cujus latera differunt recta data.*

Sit recta data $= b$, latus unum rectanguli $= x$, erit alterum $= b + x$. Unde per conditionem problematis $y^2 = bx + x^2$: qui eſt locus ad Hyperbolam æquilateram, cujus parameter $= b$ (§. 507).

Id etiam ex formula generali elicitur. Quoniam enim $y^2 - x^2 - bx = 0$, erit (§. 590) $2r : q = 0$, adeoque $r = 0$, $q = s$, $r^2 : q^2 = 0$; porro $2n = 0$ & hinc $2nr : q = 0$, $n^2 = 0$. Eſt vero $-ts^2 : 2mq^2 = -1$, hoc eſt, ob $q^2 = s$. $t : 2m = 1$ ſeu $t = 2m$. Unde apparet, locum eſſe ad Hyperbolam æquilateram. Eſt præterea $2tps : 2mq = -b$, hoc eſt, ob $t = 2m$ & $s = q$, $2p = -b$, unde $p = -\frac{1}{2}b$. Denique $tm^2 : 2m - tp^2 : 2m = 0$, quia quantitas mere cognita in formula data non habetur, hoc eſt, $m^2 - p^2 = 0$, ſeu $m^2 = p^2 = \frac{1}{4}bb$. Unde $m = \frac{1}{2}b$. Conſtructio ex conſtructione generali haud difficulter elicitur. Nimirum pro diametro transverſa AB $= 2m$, pone b. Quia KC $= -\frac{1}{2}b$, punctum K cadet in partem contrariam & quidem in A, quia ſemidiametro in hoc caſu æqualis. Unde origo indeterminatæ x erit in A, nam ob DK $=$ PN $= 0$, punctum D in K, conſequenter in noſtro caſu in A cadit. Porro, ob HL $= 0$, puncta H & L, adeoque & puncta Q & N, & ob PN $= 0$, puncta N & P, conſequenter Q & P coincidunt: unde origo alterius indeterminatæ y eſt in P. Tab. VIII. *Fig.* 80.

Eſt enim BP $= b + x$, adeoque AP. PB $= bx + x^2$. Quare cum PM$^2 = y^2$; erit $y^2 = bx + x^2$.

PROBLEMA CCXXXVIII.

595. *Super data recta* AB *triangulum conſtruere, ita ut quadrata laterum* AC *&* CB *ſint in ratione data.* Tab. VIII. Fig. 83.

Sit ratio data $= b : c$ DB $= x$
AB $= a$. DC $= y$
erit AD $= a - x$

Quoniam (§. 417 *Geom.*) AC$^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$, & CB$^2 = x^2 + y^2$ erit, per conditionem Problematis,

$$b : c = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 : x^2 + y^2$$
$$bx^2 + by^2 = cy^2 + a^2c - 2acx + cx^2$$
$$by^2 - cy^2 + bx^2 - cx^2 + 2acx - a^2c = 0$$
$$y^2 + x^2 + \frac{2acx}{b-c} - \frac{a^2c}{b-c} = 0$$

Hæc æquatio comparanda eſt cum æquatione generali locorum ad Ellipſin, quia deeſt xy, & y^2 atque x^2 eodem ſigno afficiuntur (§. 592). Reperitur adeo (§. 588),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = 0 \qquad r^2 : q^2 + ts^2 : 2mq^2 = 1$$
hinc: $\qquad\qquad\qquad t : 2m = 1$
$$r = 0 \;\&\; q = s \qquad 2nr : q = 0 \qquad \text{h. e. } t = 2m$$

Tab. VIII. Fig. 83. Cum diameter $2m$ parametro æqualis ſit; locus ad conſtruendum propoſitus eſt Circulus.

Porro

$$\frac{2nr}{q} - \frac{2tps}{2mq} = \frac{2ac}{b-c} \qquad n^2 - \frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = -\frac{a^2c}{b-c}$$

$$\text{h. e. } 2p = -\frac{2ac}{b-c} \qquad p^2 - m^2 = -\frac{a^2c}{b-c}$$

$$p = -\frac{ac}{b-c} \qquad p^2 + \frac{a^2c}{b-c} = m^2$$

$$\frac{a^2c^2}{(b-c)^2} + \frac{a^2c}{b-c} = m^2$$

$$\text{h. e. } \frac{a^2c^2 + a^2bc - a^2c^2}{(b-c)^2} = m^2$$

$$\frac{a^2bc}{(b-c)^2} = m^2$$

$$\frac{a\sqrt{bc}}{b-c} = m$$

Eſt ergo radius circuli $= a\sqrt{bc} : (b-c)$. Quodſi igitur $AL = ac : (b-c)$, & radio $CL = a\sqrt{bc} : (b-c)$ deſcribatur circulus ECF; erit $AD = x$, $DC = y$. Nam ponatur brevitatis gratia $AL = p$, $LF = m$; erit $DL = p - x$, $ED = m - p + x$ & $DF = m + p - x$, conſequenter, ob $ED \cdot DF = DC^2$, $m^2 - p^2 + 2px - x^2 = y^2$.

$$y^2 + x^2 - 2px + p^2 = 0$$
$$- m^2$$

hoc eſt, ſubſtitutis valoribus p & $p^2 - m^2$ erit $y^2 + x^2 + \frac{2acx}{b-c} - \frac{a^2c}{b-c} = 0$.

Problema CCXXXIX.

Tab. VIII. Fig. 84. 596. *Duas rectas* AB *&* CD *ita ſecare in* E *&* F, *ut* AE. EB = CF. FD.

Sit $AB = a$, $AE = x$

$CD = b$, $CF = y$

erit $EB = a - x$

$FD = b - y$

Quare $ax - xx = by - yy$

$$y^2 - x^2 - by + ax = 0$$

Hæc æquatio comparanda cum æquatione locali pro Hyperbola. Eſt nempe

$$\frac{2r}{q} = 0 \text{ \& hinc } \frac{q = s}{q^2 = s^2} \quad \frac{r^2}{q^2} = 0 \quad \frac{2nr}{q} = 0$$

$$-\frac{ts^2}{2mq^2} = -1 \qquad \frac{-2n = -b}{n = \frac{1}{2}b} \qquad \frac{2tps}{2mq} = a$$

$$t : 2m = 1 \qquad\qquad 2p = a$$

$$t = 2m \qquad\qquad p = \tfrac{1}{2}a$$

$$n^2 + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = 0$$

$$n^2 + m^2 - p^2 = 0$$

$$m^2 = p^2 - n^2 = \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}bb$$

$$m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}bb)}$$

Quoniam $t = 2m$, hoc eſt, parameter diametro æqualis, Hyperbola eſt æquilatera (§. 505), diametro $= 2\sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb)}$ conſtruenda. Cum diametro determinata AB agatur parallela HN & cum MN altera FH, ita ut ſit $FH = PN = \frac{1}{2}b$ & $CF = \frac{1}{2}a$, erit $HN = x$ & $MN = y$. Eſt enim $CP = x - \frac{1}{2}a$; $PM = y - \frac{1}{2}b$, & $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb)}$. Quare, ob $AP \cdot PB = CP^2 - AC^2 = PM^2$,

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}bb = y^2 - by + \tfrac{1}{4}bb$$

$$x^2 - ax = y^2 - by$$

$$y^2 - x^2 - by + ax = 0$$

Pro-

PROBLEMA CCXL.

597. *Super recta* AB *descriptus sit semicirculus* ANB, *& alius minor* ERD. *Ex puncto quocunque* N *demittatur ad* AB *perpendicularis* PN, *ductoque radio* CN, *ex puncto* R *perpendicularis alia* RM. *Determinare locum, in quo sunt omnia puncta* M *eodem modo determinata.*

Sit $AB = a$, $ED = d$, $AP = x$, $PM = y$: erit $PB = a - x$, $PN = \sqrt{(ax - x^2)} = v$ (§. 377), $PC = \frac{1}{2}a - x$, $NR = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d$ & (§. 268 *Geom.*)

$$NC : NP = NR : NM$$

$$\frac{1}{2}a : v = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d : \frac{(a-d)v}{a}$$

Quare $PM = v - \frac{av - dv}{a} = \frac{av - av + dv}{a} = \frac{dv}{a}$; consequenter $PM^2 = y^2 = d^2 v^2 : a^2$. Unde habetur $a^2 y^2 = d^2 (ax - x^2)$, substituto nimirum valore ipsius v^2, quæ æquatio in sequentem resolvitur analogiam:

$$y^2 : ax - x^2 = d^2 : a^2$$

h.e. $PM^2 : PA.\ PB = CF^2 : AC^2$

Unde intelligitur locum punctorum M esse Ellipsin, cujus axes conjugati AB & ED (§. 430).

SCHOLION.

598. *Apparet adeo curvam, quam fornicibus construendis aptam prædicat* SERLIUS (k) *esse Ellipsin.*

COROLLARIUM.

599. Quoniam $PN = v$, $PM = \frac{1}{2}dv : \frac{1}{2}a$, erit $PN : PM = v : \frac{\frac{1}{2}dv}{\frac{1}{2}a}$ hoc est (§. 124) $= \frac{1}{2}av : \frac{1}{2}dv = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}d = CG : CF$

(k) *Architect.* lib. I. c. I. f. m. 9. b.

PROBLEMA CCXLI.

600. *Super recta* HI *describatur semicirculus* HGI. *Sit recta quæcunque* AB *bifariam divisa in* C *& ex* C *erecta perpendicularis* $CD = GF$. *Erecta perpendicularis* LN *fiat* $DC : AC = HL : AP$, *& in* P *erigatur perpendicularis* $PM = NL$. *Determinare locum, in quo sunt omnia puncta* M *eodem modo inventa.* Tab. VIII. Fig. 86.

Sit $HF = GF = DC = d$, $AC = a$, $AP = x$, $PM = y$: erit, ex hypothesi,

$$AC : DC = AP : HL$$

$$a : d = x : \frac{dx}{a}$$

Quare $LI = 2d - dx : a = (2ad - dx) : a$, & hinc $LN^2 = (2addx - ddxx) : aa$ (§. 367). Habemus itaque, ex hypothesi,

$$y^2 = (2addx - ddxx) : aa$$

adeoque, $aa : 2ax - xx = dd : y^2$.

Est igitur locus quæsitus Ellipsis, cujus semiaxes conjugati AC & CD (§. 430).

SCHOLION.

601. *Evidens adeo est, curvam, quam* Albertus DURERUS *& cum ipso* Daniel HARTMANNUS (l) *fornicibus construendis aptam prædicant, esse Ellipsin* Apollonianam.

PROBLEMA CCXLII.

602. *Rectam* DB *ita secare in* P *simulque invenire aliam rectam* y, *ita ut rectangulum ex* y *in datam* CA *sit æquale rectangulo ex segmentis partium* DP *&* PB. Tab. VIII. Fig. 87.

Sit $DB = a$, $AC = b$, $DP = x$, erit $PB = a - x$, consequenter, per conditionem Problematis,

 $ax -$

(l) *In der Bürgerlichen Bau-Kunst*, f. 7. & seqq.

Tab. VIII. *Fig.* 87.

$$ax - xx = by$$

$$x^2 - ax + by = 0.$$

Est itaque locus ad Parabolam (§. 592).

Quodsi cum æquatione locali ad Parabolam generali modo inventam compares; erit (§. 587)

$$-\frac{2r}{q} = 0 \quad -2n = -a \quad -tf : q = b$$

$$\text{hinc } q = f \quad n = \tfrac{1}{2}a \quad t = -b$$

$$nn + tp = 0$$

$$\tfrac{1}{4}aa - bp = 0$$

$$\tfrac{1}{4}aa = bp$$

$$\tfrac{1}{4}aa : b = p$$

Est adeo parameter $= -b$. Quare parametro b describenda est Parabola deorsum tendens AMB, cujus pars altera AD, seu quod perinde est, describitur Parabola circa axem AK (§. 393) & in eo fit AK$=\frac{1}{4}aa : b$, erit KB$=\frac{1}{2}a$ (§. 388) $=\frac{1}{2}$DB, adeoque DB linea ad secandum proposita. Ducta igitur PM ipsi AK parallela, erit PB$=x$, PM$=y$. Nam KP$=$RM$=\frac{1}{2}a-x$ & AR$=\frac{1}{4}aa : b - y$. Quare (§. 388) $\frac{1}{4}aa - ax + xx = \frac{1}{4}aa - by$, consequenter $x^2 - ax + by = 0$.

PROBLEMA CCXLIII.

Tab. VIII. *Fig.* 83.

603. *Datam rectam* MN *in tres partes continue proportionales secare.*

Sit MN $= a$, pars prima $= x$, secunda $= y$, erit tertia $= yy : x$ &, per conditionem Problematis,

$$x + y + yy : x = a$$

$$xx + xy + yy = ax$$

$$yy + xy + xx - ax = 0$$

Cum locus sit ad Circulum (§. 592); æquatio comparanda est, cum formula generali ad Circulum.

Erit ergo $-\frac{2r}{q} = 1$, hoc est, $\frac{r}{q} = -\frac{1}{2}$, nempe $r = -1$ & $q = 2$.

Porro

$$\frac{r^2}{q^2} + \frac{f^2}{q^2} = 1 \qquad 2n = 0.$$

$$\tfrac{1}{4} + \frac{f^2}{4} = 1 \qquad \text{hinc } \frac{2nr}{q} = 0$$

$$1 + f^2 = 4 \qquad n^2 = 0$$

$$f^2 = 3 \qquad -\frac{2pf}{q} = -a$$

$$f = \sqrt{3} \qquad \frac{2p\sqrt{3}}{2} = a$$

$$p = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$m^2 = n^2 + p^2 = p^2$$

$$m = p = a : \sqrt{3}$$

Describatur ergo radio AC $= a : \sqrt{3}$ semicirculus, fiat (ob valorem negativum ipsius r) HL : AL $= 1 : \sqrt{3}$, ob valorem scilicet ipsius r negativum triangulum ALH contraria ratione construendum, ita ut angulus rectus sit in L, qui in formula generali supponitur in H: ita enim prodit $f = \sqrt{3}$, quemadmodum ex regula eruitur per Theorema *Pythagoricum*. Ducatur porro recta AHR. Quodsi inter C & B erigatur perpendicularis PM: erit AQ $= x$, QM $= y$. Nam (§. 268 *Geom.*)

$$\text{AH} : \text{HL} = \text{AQ} : \text{QP}$$

$$2 : 1 = x : \tfrac{1}{2}x$$

Unde PM $= y + \frac{1}{2}x$ & PM$^2 = y^2 + xy + \frac{1}{4}x^2$.

$$\text{Porro AH} : \text{AL} = \text{AQ} : \text{AP}$$

$$2 : \sqrt{3} = x : \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Unde

Unde $PB = AB - AP = \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{x\sqrt{3}}{2}$
& $AP. PB = ax - \frac{3}{4}x^2$. Habemus adeo (§. 377),

$$y^2 + xy + \frac{1}{4}xx = ax - \frac{3}{4}x^2$$
$$y^2 + xy + x^2 - ax = 0.$$

SCHOLION.

604. *Eodem modo æquationes locales inveniri possunt pro Curvis superiorum generum, ad construenda loca hypersolida. Pri[illegible] formulas generales computavit* Joannes CRAIGIUS *(a), earumque usum deinde uberius exposuit* HOSPITALIUS *(b).*

CAPUT VIII.

De Constructione Æquationum superiorum.

PROBLEMA CCXLIV.

605. *Æquationem quamcunque geometrice construere.*

1. Introducatur in æquationem datam nova indeterminata, &
2. Hujus ope æquatio in alias locales ad diversas curvas transformetur, in quibus nempe sint duæ indeterminatæ.
3. Construantur duæ æquationes locales. Communis enim interfectio radices determinabit.

SCHOLION.

606. *Genuinum hoc æquationes construendi artificium primus aperuit* Renatus Franciscus SLUSIUS, *Canonicus* Leodiensis *(c): quem postea secuti sunt alii de hac materia commentati. Ut autem methodi vim intelligamus, eam exemplis cubicarum imprimis & quadrato-quadraticarum æquationum illustrabimus, quoniam ad has construendas sufficiunt, quæ de locis planis & solidis in capite præcedente tradidimus.*

(a) In *Tractatu de Figurarum curvilinearum Quadraturis & Locis geometricis* p. 62. & seqq.
(b) *Traité analytique des Sect. coniq.* lib. 3. p. 206. & seqq.
(c) *Mesolabo* Part. 2. integra.

PROBLEMA CCXLV.

607. *Construere æquationem cubicam* $y^3 + aby = aac$.

Æquatio proposita $y(y^2 + ab) = aac$ in hanc resolvitur analogiam

$$a : y = y^2 + ab : ac.$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur & ejus ope æquationes locales ad diversas curvas eliciantur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$
Porro $y : x = yy + ab : ac$ (§. 167 *Arithm.*)
hoc est, $= ax + ab : ac$
seu (§. 124.) $= x + b : c$

$$\text{II.} \quad x^2 + bx = cy$$
$$ax = y^2$$
$$x^2 + bx = cy$$
$$\text{III.}\ ax - x^2 - bx = y^2 - cy$$
$$ax = y^2$$
$$x^2 + bx = cy$$
$$\text{IV.}\ x^2 + ax + bx = y^2 + cy$$

$$x^2 + bx = cy$$
$$x^2 + \frac{by_2}{a} = cy$$

$$\text{V. } y^2 + \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$$
$$y^3 + aby = aac$$

$$\frac{y^3}{a} + by = ac$$
$$\text{VI. } xy + by = ac$$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 + bx - cy = 0$

III. $y^2 + x^2 - cy + bx = 0$
$\quad - ax$

IV. $y^2 - x^2 + cy - ax = 0$
$\quad - bx$

V. $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$

VI. $xy + by - ac = 0$

Locus primus & secundus sunt ad Parabolam; tertius ad Circulum; quartus ad Hyperbolam æquilateram; quintus ad Ellipsin; sextus ad Hyperbolam intra asymptotos.

Equidem constructio æquationis absolvi potest duobus quibuscunque locis combinatis; præstat tamen nonnisi Circulum cum una ex Sectionibus conicis combinari, non tam quod Circulus sit locus planus (ut vulgo cum CARTESIO sentiunt;) sed quia facilius describitur Sectionibus coni.

Agedum itaque, construamus æquationem propositam primum ope æquationis ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ & alterius ad Circulum $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$

Locus prior construitur, si parametro a Parabola describatur: erit origo indeterminatæ x in vertice, nempe AP $= x$; PM $= y$ (§. 587).

Pro Circulo erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$\frac{2r}{q} = 0 \qquad 2n = c \qquad -2p = b - a$

& hinc $q = s \qquad n = \frac{1}{2}c \qquad -p = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$

$(r^2 + s^2) : q^2 = 1$

seu $s = q$

$$n^2 + p^2 = m^2$$
$$\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb = m^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb)} = m$$

Quodsi ergo radio AL $= m$ semicirculus AMB describatur, sumaturque LK $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$ deorsum, quia valor ipsius p negativus, & KD $= \frac{1}{2}c$, atque DQ ipsi AB, QM vero inter K & A, ob valorem ipsius p negativum, si $b > a$, ipsi KD parallela ducatur: erit (§. 588, 589) origo indeterminatæ x in D, nempe DQ $= x$ & QM $= y$.

Si jam Circulus cum Parabola combinandus, quo eadem sit indeterminatarum origo, punctum D in A & DQ super AP cadere debet. Quare si fiat perpendicularis AK $= \frac{1}{2}c$ & altera KL $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$: erit centrum Circuli L & radius LA. Quodsi is describatur, secabit Parabolam in unico puncto M. Dico, semiordinatam Parabolæ PM esse radicem veram æquationis, radices duas reliquas nonnisi imaginarias.

Est nimirum AK $=$ PR $= \frac{1}{2}c$, KL $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, adeoque LA $= \sqrt{(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)}$, qui est radius circuli per superius demonstrata, &, si PM $= y$, MR $= y - \frac{1}{2}c$. Porro AP $=$ KR $= yy : a$ (§. 391), consequenter LR $= y^2 : a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$ & hinc ob LM² seu LA² $=$ LR²

$= LR^2 + MR^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + \frac{1}{4}bb - y^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$,

hoc eſt,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} - cy = 0$$

$$y^4 + aby^2 - aacy = 0$$

$$y^3 + aby - aac = 0$$

Quodſi fuerit $a > b$, erit $p = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, conſequenter cum valor ipſius p ſit poſitivus, punctum K cadet ultra centrum L verſus B, & $KL = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, $KD = \frac{1}{2}c$ ut ante. Cetera fiunt ut ante. Cadit vero tum centrum L infra AK.

Conſtruamus porro eandem æquationem combinato Circulo cum Ellipſi. Quoniam locus ad Ellipſin eſt $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$; erit (§.588),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad \frac{t}{2m} = \frac{a}{b} \qquad 2n = \frac{ac}{b}$$

$$\text{hinc } r = 0 \qquad n = \frac{ac}{2b}$$

$$\& \; q = f$$

$$\frac{2nr}{q} - \frac{2tps}{2mq} = 0 \qquad n^2 - \frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = 0$$

$$-\frac{2tp}{2m} = 0 \qquad n^2 = \frac{tm^2}{2m}$$

$$p = 0 \qquad \frac{a^2c^2}{4b^2} = \frac{am^2}{b}$$

$$\frac{ac^2}{4b} = m^2$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ac^2}{b}} = m$$

Eſt itaque ratio parametri t ad diametrum $2m$ ut a ad b. Ellipſis diametro $AB = \sqrt{(ac^2 : b)}$ & parametro t deſcribenda & in centro C erecta perpendiculari $CF = ac : 2b$, ductisque FQ ipſi AC & QM ipſi CF parallelis, erit $FQ = x$ & $QM = y$, origo nempe indeterminatæ x in F. Circulus itaque ita combinandus cum Ellipſi, ut punctum D in F & DK ſuper FC cadat, hoc eſt, Tab. IX. Fig. 91.

$FC = \frac{ac}{2b}$ continuetur in K, donec fiat $FK = \frac{1}{2}c$ (eſt enim $b > a$, hinc $bc > ac$, conſequenter $c > ac : b$) & in K erigatur perpendicularis $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$: erit enim per præcedentia L centrum, LF radius Circuli, qui deſcriptus Ellipſin in M ſecabit. Dico QM eſſe radicem æquationis.

Ponamus enim $QM = y$. Quoniam $CF = PQ = ac : 2b$ & $FQ = CP = x$, $AC = \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)}$; erit $PM = QM - PQ = y - ac : 2b$, $AP = \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)} - x$, $PB = \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)} + x$, $PM^2 = y^2 - acy : b + a^2c^2 : 4b^2$ & $AP . PB = ac^2 : 4b - x^2$, & ex natura Ellipſis (§.420),

$$b : a = \frac{ac^2}{4b} - x^2 : y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2}$$

$$\frac{a^2c^2}{4b^2} - \frac{ax^2}{b} = y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2}$$

$$y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$$

$$\frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b} - y^2$$

$$x^2 = cy - by^2 : a$$

Porro $KR = QF = x$, $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, $KF = QR = \frac{1}{2}c$, adeoque $MR = MQ - QR = y - \frac{1}{2}c$, $RL = x + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, conſequenter (§.417 *Geom.*) $LF^2 = KL^2 + KF^2 = \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc = ML^2 = MR^2 + RL^2 = y^2 - cy + \frac{1}{4}cc + x^2 + bx + \frac{1}{4}bb - ax - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa$.

Unde

Unde habemus

$$y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$$

hoc eſt, ob $x^2 = cy - by^2 : a$

$$y^2 + cy - \frac{by^2}{a} - cy + bx - ax = 0$$

$$\frac{ay^2 - by^2}{a} + bx - ax = 0$$

ſeu $\frac{ay^2 - by^2}{a} = ax - bx$ $\quad a - b$

$$\frac{y^2}{a} = x$$

$$\frac{y^4}{aa} = x^2$$

$$\frac{y^4}{aa} = cy - \frac{by^2}{a}$$

$$y^4 = aacy - aby^2$$

$$y^3 = aac - aby$$

$$y^3 + aby - aac = 0$$

Conſtruamus denique eandem æquationem, combinatis loco ad Hyperbolam intra aſymptotos $xy + by - ac = 0$ & loco ad Circulum $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$. Poſterioris conſtructionem jam tradidimus: alterius conſtructio elicitur comparatione æquationis propoſitæ cum formula generali pro locis ad Hyperbolam intra aſymptotos inſtituta. Eſt nempe (§. 591),

$\frac{r}{q} = 0 \quad p = 0 \quad -n = b \quad -mq = -ac$

$q = f \quad \frac{pr}{f} = 0 \quad n = -b \quad m = c \quad q = a$

Jungantur ipſi AR $= a$ recta RI $= c$ & indefinita AS ad angulos rectos, quæ erunt aſymptoti Hyperbolæ æquilateræ per punctum I deſcribendæ (§ 489). Fiat AD $= b$, quia valor ipſius b negativus: erit DT $= x =$ NM, TM $= y$ (§. *cit.*) Quod ſi jam Circulus cum Hyperbola combinari debet; punctum D in D & recta DQ ſuper DT cadere debet. Scilicet ex D in K transferatur DK $= \frac{1}{2}c$ & ex K in L, KL $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$. Radio DL deſcribatur Circulus & ex puncto interſectionis Circuli atque Hyperbolæ M demittatur perpendicularis TM: dico hanc eſſe radicem æquationis.

Quoniam enim AR $= a$, RI $= c$, AD $=$ PN $= b$, NM $=$ DT $= x$, TM $=$ AP $= y$; erit AT $=$ PM $= b + x$ & ob AR. RI $=$ AP. PM (§. 501) $by + xy = ac$, conſequenter $x = \frac{ac}{y} - b$. Porro Kr $=$ NM $= x$, LK $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, DK $=$ Tr $= \frac{1}{2}c$. Ergo L$r = x + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, rM $= y - \frac{1}{2}c$, & ob LM$^2 =$ L$r^2 + r$M^2 (§. 417 *Geom.*) $x^2 + bx + \frac{1}{4}bb - ax - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 + y^2 - cy + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc$, hoc eſt,

$$y^2 - cy = ax - x^2 - bx$$

ſeu $\quad = (a - x - b)x$

$$y^2 - cy = \left(a - \frac{ac}{y} + b - b\right)\left(\frac{ac}{y} - b\right)$$

$$= \left(a - \frac{ac}{y}\right)\left(\frac{ac}{y} - b\right)$$

hoc eſt,

$$y^2 - cy = \frac{aac}{y} - \frac{a^2c^2}{y^2} - ab + \frac{abc}{y}$$

$$y^4 - cy^3 = a^2cy - a^2c^2 - aby^2 + abcy$$

$y - c)$

$$y^3 = a^2c - aby$$

$$y^3 + aby - a^2c = 0$$

SCHO-

SCHOLION.

608. *Mirabuntur forte, qui Tyrones sunt in altioribus, quod tam operose construxerimus æquationem, quæ per regulam* CARTESII *ope Circuli & Parabolæ admodum facile construitur. Sed notent velim, geometricas æquationum constructiones nullius fere in praxi esse usus, cum eidem satisfaciat methodus extrahendi radices per approximationem. Faciunt vero ad exercendam ingenii vim & recludendos inventionum fontes. Quamobrem methodus inveniendi constructiones istiusmodi quam maxime explicari debet.*

PROBLEMA CCXLVI.

609. *Construere æquationem cubicam* $y^3 - aby = aac$.

Æquatio proposita in hanc resolvitur analogiam:

$$a : y = yy - ab : ac$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur & æquationes locales diversæ inde eliciantur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit

I. $ax = y^2$ & hinc $y^2 : a = x$

Porro: $y : x = yy - ab : ac$
hoc est, $= ax - ab : ac$
seu (§. 124) $= x - b : c$

II. $x^2 - bx = cy$
$ax = y^2$
$x^2 - bx = cy$

III. $ax - x^2 + bx = y^2 - cy$
$ax = y^2$
$cy = x^2 - bx$

IV. $ax - cy = y^2 - x^2 + bx$
$x^2 - bx = cy$
$x^2 - \frac{by^2}{a} = cy$
$a : b$ mult.

V. $\frac{ax^2}{b} - y^2 = \frac{acy}{b}$
$y^3 - aby = aac$
$\frac{y^3}{a} - by = ac$

VI. $xy - by = ac$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$
II. $x^2 - bx - cy = 0$
III. $y^2 + x^2 - cy - bx = 0$
$ - ax$
IV. $y^2 - x^2 + cy + bx = 0$
$ - ax$
V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} + \frac{acy^2}{b} = 0.$
VI. $xy - by - ac = 0$

Locus primus & secundus sunt ad Parabolam; tertius ad Circulum; quartus ad Hyperbolam æquilateram; quintus ad Hyperbolam scalenam; sextus ad Hyperbolam intra asymptotos.

Cum æquationes locales nonnisi signis differant ab iis, in quas æquationem Problematis præcedentis resolvimus; æquatio præsentis eodem fere modo construitur, quo præcedentem construximus: id quod in unico casu, quo Circulus cum Parabola combinatur, ostendisse suffecerit.

Locus ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ construitur ut in Problemate præcedente,

Tab. IX. Fig. 93. si parametro a Parabola describatur: erit origo indeterminatæ x in vertice, nempe $AP = x$, $PM = y$.

Pro loco ad Circulum $y^2 + x^2 - cy - bx - ax = 0$, erit, vi Theorematis generalis (§. 589), $2r = 0$ & hinc $q = f$

$$2n = c \qquad 2p = b + a$$

$$n = \tfrac{1}{2}c \qquad p = \frac{b + a}{2}$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}aa = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}aa)} = m$$

Quia ergo in Circulo origo indeterminatæ x distat a centro quantitate $\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}a$ & alterius y quantitate $\tfrac{1}{2}c$, fiat $AD = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b$ & perpendicularis $DH = \tfrac{1}{2}c$ atque radio AH describatur per verticem Parabolæ A Circulus, erit PM radix vera æquationis; QN & qn erunt falsæ.

Nam $AH^2 = MH^2 = HD^2 + DA^2 = \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}cc$ (§. 417 *Geom.*), $AP = yy : a$ (§. 391), $PD = HR = \frac{yy}{a} - \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b$, $MR = y - \tfrac{1}{2}c$, consequenter ob $HM^2 = HR^2 + MR^2$ (§. 417 *Geom.*) $\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}bb + \tfrac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \tfrac{1}{4}aa - \frac{byy}{a} + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb + y^2 - cy + \tfrac{1}{4}cc$, hoc est

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{byy}{a} - cy = 0$$

$$y^4 - abyy - aacy = 0$$

$$y^3 - aby - aac = 0.$$

PROBLEMA CCXLVII.

610. *Construere æquationem cubicam* $y^3 - aby = - aac$.

Æquatio proposita $y^3 - aby = - aac$, hoc est, $aac = aby - y^3$ in hanc resolvitur analogiam:

$$a : y = ab - yy : ac.$$

Ut nova indeterminata introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Porro $y : x = ab - yy : ac$

hoc est, $= ab - ax : ac$

seu (§. 124) $= b - x : c$

II. $bx - xx = cy$

$$ax = y^2$$
$$bx - xx = cy$$

III. $ax - bx + xx = yy - cy$

$$ax = yy$$
$$cy = bx - xx$$

IV. $ax - cy = yy - bx + xx$

$$bx - xx = cy$$
$$\frac{by^2}{a} - xx = cy$$

$a : b$ mult.

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$

$$aac = aby - y^3$$
$$ac = by - \frac{y^3}{a}$$

VI. $ac = by - xy$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 - bx + cy = 0$

III. $y^2 - x^2 - cy + bx - ax = 0$

IV. $y^2 + x^2 + cy - bx - ax = 0$

V. y^2

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$

VI. $xy - by + ac = 0$

Locus primus & secundus sunt ad Parabolam, tertius ad Hyperbolam æquilateram, quartus ad Circulum, quintus ad Hyperbolam scalenam, sextus ad Hyperbolam intra asymptotos.

Æquationes locales denuo nonnisi signis differunt ab iis, quas in Problemate 245, (§. 607) reperimus. Quare denuo nobis suffecerit constructionem ope Parabolæ & Circuli ostendisse.

Tab. IX. Fig. 94. Quoniam locus ad Parabolam $y^2 = ax$; Parabola denuo construitur parametro a, & origo indeterminatæ x est in vertice axis A.

Pro Circulo, cujus æquatio $y^2 + x^2 + cy - bx - ax = 0$, vi Theorematis generalis (§. 589)

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = c \qquad -2p = -b - a$$

hinc

$$q = f \qquad n = -\tfrac{1}{2}c \qquad p = \frac{b + a}{2}$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb)} = m$$

Tab. IX. Fig. 95. Describatur ergo, radio AC $= m$, semicirculus, ductaque FLS intervallo CL $= \frac{1}{2}c$ diametro AB parallela; erit SQ $= x$, QM $= y$.

Tab. IX. Fig. 94. Quamobrem si Circulus cum Parabola combinatur, punctum S super A & SL super AD cadet. Quare si fiat AD $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & erigatur perpendicularis DH $= \frac{1}{2}c$; erit AH $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc)}$ radius Circuli per verticem describendi & PM radix vera æquationis. Tab. IX. Fig. 94.

Nam AP $= yy : a$ (§. 391), hinc DP $=$ HR $= yy : a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Porro MR $= y + \frac{1}{2}c$. Quare ob HM$^2 =$ MR^2 + HR^2 (§. 417 *Geom.*), $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa - \frac{byy}{a} + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 + cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{byy}{a} + cy = 0 \qquad | \, aa$$

$$y^4 - abyy + aacy = 0 \qquad | \, y$$

$$y^3 - aby + aac = 0$$

COROLLARIUM.

612. Si Circulus Parabolam tangit; duæ intersectiones coincidunt, adeoque æquatio duas habet radices æquales. Si eam nec tangit, nec secat; radices omnes sunt impossibiles.

SCHOLION.

613. *Constructiones per Circulum & Parabolam, quas dedimus, coincidunt cum iis quas habet* CARTESIUS (*a*), *etsi alio modo er*[...]*e.*

PROBLEMA CCXLVII[...]

614. *Construere æquationem* [...]*bicam* $y^3 + ay^2 - aby = aac$.

Ut nova indetermi[...] in æquatio[...]nem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$. Substituatur ax pro y^2 in æquatione data.

erit $axy + aax - aby = aac$

II. $xy + ax - by = ac$ $\qquad | \, y - a$

$$xy^2 + axy - by^2 - axy - a^2x + aby = acy - a^2c$$

$$xy^2 - by^2 - a^2x = acy - aby - a^2c$$

$$ax^2 - abx - a^2x = acy - aby - a^2c$$

(*a*) Geomet. lib. III. p. 85. & seqq.

III. $x^2 - bx - ax = cy - by - ac$

$ax - y^2$

IV. $2ax - x^2 + bx = y^2 - cy + by + ac$

$x^2 - bx - ax = cy - by - ac$

$ax = y^2$

V. $x^2 - bx = y^2 + cy - by - ac$

$x^2 - \frac{by^2}{a} = ax + cy - by - ac$

VI. $\frac{ax^2}{b} - y^2 = \frac{a^2x}{b} + \frac{acy}{b} - ay - \frac{a^2c}{b}$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$

II. $xy + ax - by - ac = 0$

III. $x^2 - bx - cy + ac = 0$
$\quad - ax + by$

IV. $y^2 + x^2 - cy - 2ax + ac = 0$
$\quad + by - bx$

V. $y^2 - x^2 + cy + bx - ac = 0$
$\quad - by$

VI. $y^2 = \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} + \frac{a^2x}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$
$\quad - ay$

Locus primus & tertius sunt ad Pa-[illegible]lam; secundus ad Hyperbolam intra a[illegible]ptotos; quartus ad Circulum; quintus ad Hyperbolam æquilateram; sextus ad Hyp[illegible]bolam scalenam.

Tab. IX. Fig. 96. Construamus æquationem combinando Circulum cum Parabola. Locus ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ construitur, si parametro a Parabola describitur; cujus vertex A origo ipsius x.

Pro Circulo $y^2 + x^2 - cy + by - 2ax - bx + ac = 0$, erit, vi Theorematis generalis (§.589),

$\frac{2r}{a} = 0 \qquad -2n = -c + b \qquad -2p = -2a - b$

[illegible]

$q = f \qquad n = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b \qquad p = a + \frac{1}{2}b$

$n^2 + p^2 - m^2 = ac$

$n^2 + p^2 - ac = m^2$

$\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}bb + a^2 + ab + \frac{1}{4}bb - ac = m^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + (a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c)^2)} = m$

Jungatur ipsi IL $= a$ ad angulos rectos LR ipsi æqualis & resecetur LH $= PN = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; erit HR $= a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Fiat LD $=$ HC $= \frac{1}{2}b$: erit CR $= m$, adeoque radius Circuli, quo descripto habebitur IP $= x$ & PM $= y$.

Est enim NM $=$ PM $-$ PN $= y + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$, adeoque NM$^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}b^2 - cy - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}c^2$. Porro DP $=$ IP $-$ ID $= x - a - \frac{1}{2}b$, adeoque DP$^2 =$ CN$^2 = x^2 - 2ax - bx + a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum sit NM^2 + CN^2 (§.417 *Geom.*) $=$ CM$^2 =$ CR$^2 =$ CH^2 + HR$^2 = \frac{1}{4}bb + aa + ab + \frac{1}{4}bb - ac - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc$, erit $y^2 + x^2 - cy + by - 2ax - bx + ac = 0$, quæ est æquatio ad construendum proposita. Circulus itaque rite constructus.

Si jam Circulus cum Parabola combinatur, punctum I in verticem Parabolæ A & IP super AP cadit. Quare fiat AL $= a$; erit LR$^2 = aa$ (§.388), hoc est, LR $= a$. Fiat porro LH $= \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; erit HR $= a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Fiat denique LD $=$ HC $= \frac{1}{2}b$; erit CR radius Circuli per punctum Parabolæ R ex centro C describendi, & semiordinata PM radix æquationis.

Nam PN $=$ LH $= \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$: hinc NM $= y + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Ex natura Parabolæ $y^2 : a =$ AP: unde DP $=$ CN $= \frac{y^2}{a} - a - \frac{1}{2}b$. Quare cum sit (§.417 *Geom.*) CM^2 ($=$CR^2) $=$ CN^2 + NM^2 erit $\frac{1}{4}b^2 + a^2 + ab + \frac{1}{4}bb - ac - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - 2y^2 + aa - \frac{by^2}{a}$

+

$+ab+\frac{1}{4}bb+y^2+by+\frac{1}{4}bb-cy-\frac{1}{2}bc$
$+\frac{1}{4}cc$,

hoc est,

$$\frac{y^4}{aa}-y^2-\frac{by^2}{a}+by-cy+ac=0$$

$$y^4-a^2y^2-aby^2+a^2by-a^2cy+a^3c=0 \quad (y-a$$

$$y^3+ay^2-aby-a^2c=0$$

S C H O L I O N.

615. *Satis liquet, quomodo æquationum cubicarum casus reliqui construi debeant, ut adeo plura addere supervacaneum judicemus.*

P R O B L E M A CCXLIX.

616. *Æquationem biquadraticam $y^4+aby^2+a^2cy=a^3d$ construere.*

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a:y=y:x$$

erit I. $ax=y^2$. Hinc $x=y^2:a$

Hoc valore in æquatione data substituto prodibit

$$a^2x^2+aby^2+a^2cy=a^3d \quad (ab$$

$$\text{II.} \quad y^2+\frac{ax^2}{b}+\frac{acy}{b}=\frac{a^2d}{b}$$

Item $a^2x^2+a^2bx+a^2cy=a^3d \quad (a^2$

$$x^2+bx+cy=ad$$

$$\text{III.} \quad x^2+bx=ad-cy$$

$$ax=y^2$$

$$\text{IV.} \quad x^2+bx+ax=y^2+ad-cy$$

$$ax=y^2$$

$$x^2+bx=ad-cy$$

$$\text{V.} \quad ax-x^2-bx=y^2-ad+cy$$

Habemus adeo æquationes locales;

I. $y^2-ax=0$

II. $y^2+\frac{ax^2}{b}+\frac{acy}{b}-\frac{a^2d}{b}=0$

III. $x^2+bx+cy-ad=0$

IV. $y^2-x^2-cy-bx+ad=0$
$\quad\quad -ax$

V. $y^2+x^2+cy+bx-ad=0$
$\quad\quad -ax$

Locus primus & tertius est Parabola, secundus Ellipsis, quartus Hyperbola æquilatera, quintus denique Circulus.

Construamus primum æquationem, Circulo cum Parabola $ax=y^2$ combito. Construatur Parabola MDN parametro a, erit $DQ=x$, $QM=y$. Tab. X. *Fig.* 98.

Pro Circulo $y^2+x^2+cy+bx-ax-ad=0$, erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{r}{q}=0 \quad \frac{s^2}{q^2}=1 \quad -2n=c \quad -2p=b-a$$

$$s=q \quad n=-\frac{1}{2}c \quad p=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$$

$$n^2+p^2-m^2=-ad$$

$$n^2+p^2+ad=m^2$$

$$\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb+ad=m^2$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb+ad)}=m$$

Erecta in D perpendiculari DK $=$ QP $=\frac{1}{2}c$ ob valorem ipsius c negativum, ducatur per K recta indefinita AB fiatque KC $=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$ erit (§ 417 *Geom.*). DC $=\sqrt{(\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb)}$. Fiat porro DI $=a$ & continuata DC in H, donec HD $=d$, quæratur media proportionalis DL (§. 327 *Geom.*), quæ erit $\sqrt{ad}$: consequenter LC $=\sqrt{(\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb+ad)}$ (§. 417 *Geom.*) est radius Circuli ex centro C per L describendi, qui cum Parabolam secet in M & N; erit QM radix æquationis vera, RN falsa.

Tab.X. *Fig.*98. Est enim $PM = y + \frac{1}{2}c$; $DQ = KP = y^2 : a$ (§.388), $CP = KP - KC = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Quare (§.417 *Geom.*) ob CL^2 seu $MC^2 = PM^2 + PC^2$; $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc + \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa + \frac{by^2}{a} - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + cy = ad \qquad aa$$

$$y^4 + aby^2 + aacy = a^3d.$$

Combinemus eundem Circulum cum Ellipsi, quam definit æquatio superius reperta $y^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{ac}{b}y - \frac{a d}{b} = 0$. Erit, vi Theorematis generalis (§.588),

$$\frac{r}{q} = 0 \quad \frac{t}{2m} = \frac{a}{b} \quad -2n = \frac{ac}{b} \quad p = 0$$

hinc

$$q = f \qquad n = -\frac{ac}{2b}$$

$$n^2 - \frac{tm^2}{2m} = -\frac{a^2d}{b}$$

$$\frac{a^2c^2}{4b^2} - \frac{am^2}{b} = -\frac{a^2d}{b}$$

$$\frac{ac^2}{4b} + ad = m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{ac^2}{4b} + ad\right)} = m$$

Construatur locus ad Circulum, ut ante, nempe ut sit $DK = \frac{1}{2}c$, $KC = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, $DI = a$, $DH = d$, adeoque $DL = \sqrt{ad}$ (§. 327 *Geom.*); consequenter $LC = \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad)}$ (§.417 *Geom.*). Tab.X. *Fig.*99.

Jam cum origo indeterminatæ x sit in D, & valor ipsius n in Ellipsi etiam negativus, & $p = 0$; ex DK resecetur $DG = ac : 2b$, & per G ducatur AB ipsis DQ & KP parallela, fiatque $AG = BG = \sqrt{(ad + ac^2 : 4b)}$. Tandem circa AB tanquam axem describatur Ellipsis AMB, in qua axis AB ad parametrum $= b : a$. Dico QM esse radicem æquationis veram. Est enim $GR = DQ = x$, $MR = MQ + QR = MQ + DG = y + ac : 2b$; ratio diametri ad parametrum $= b : a$; $AG = \sqrt{(ad + ac^2 : 4b)}$. Quare ex natura Ellipsis (§. 431)

$$a : b = RM^2 : AG^2 - GR^2 (= BR.RA)$$

$$= y^2 + \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2} : ad + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$

$$\frac{by^2}{a} + cy + \frac{ac^2}{4b} = ad + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$

$$x^2 = ad - \frac{by^2}{a} - cy$$

Porro $PM = MQ + QP = MQ + DK = y + \frac{1}{2}c$; $CP = KP - KC = DQ - CK = x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Quamobrem ob $LC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§.417 *Geom.*) $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc + x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + bx - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb$, hoc est,

$$y^2 + x^2 + cy - ax + bx = ad$$

$$x^2 = ad + ax - bx - y^2 - cy$$

Habemus ergo

$$ad - \frac{by^2}{a} - cy = ad + ax - bx - y^2 - cy$$

$$bx - ax = \frac{by^2}{a} - y^2 \qquad b - a$$

$$x = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : aa$$

hoc

hoc eſt, $\frac{y^4}{a^2} = ad - \frac{by^2}{a} - cy$, vi ſuperiorum

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad a^2}$$

$$y^4 = a^3 d - aby^2 - a^2 cy$$

$$y^4 + aby^2 + a^2 cy = a^3 d$$

Problema CCL.

617. *Conſtruere æquationem biquadraticam*

$$y^4 + aby^2 - a^2 cy = - a^3 d.$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $yy = ax$. Hinc $x = y^2 : a$

Si valor ipſius y^2 in æquatione propoſita ſubſtituatur : prodibit

$$a^2x^2 + aby^2 - a^2cy = - a^3d$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad ab}$$

$$\text{II. } \frac{ax^2}{b} + y^2 = \frac{acy}{b} - \frac{a^2 d}{b}$$

Item $a^2x^2 + a^2bx = a^2cy - a^3d$

$$\text{III. } x^2 + bx = cy - ad$$
$$ax = y^2$$

$$\text{IV. } x^2 + bx + ax = y^2 + cy - ad$$
$$ax = y^2$$
$$x^2 + bx = cy - ad$$

$$\text{V. } ax - x^2 - bx = y^2 - cy + ad$$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$

II. $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} + \frac{a^2d}{b} = 0$

III. $x^2 + bx - cy + ad = 0$

IV. $y^2 - x^2 + cy - bx - ad = 0$
$\qquad - ax$

V. $y^2 + x^2 - cy + bx + ad = 0$
$\qquad - ax$

Locus primus & tertius ſunt Parabolæ; ſecundus eſt Ellipſis; quartus Hyperbola æquilatera; quintus denique Circulus.

Dabimus conſtructionem per Circulum & Parabolam, cujus æquatio $y^2 - ax = 0$. Eſt ergo parameter $= a$, $AP = x$, $PM = y$. Tab. X. Fig. 100.

Pro circulo, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{r}{q} = 0. \quad -2n = -c \quad -2p = -a + b$$

hinc

$$q = \int \quad n = \tfrac{1}{2}c \qquad p = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b$$

$$n^2 + p - m^2 = ad$$

$$n^2 + p^2 - ad = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb - ad)} = m$$

Ducatur recta CR & ſumatur C pro centro Circuli. Erigatur $CK = \frac{1}{2}c$ ad CR perpendicularis & per K ducatur AP eidem parallela. Fiat $AK = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}$ erit in A origo indeterminatæ x & ... $= \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb)}$. Fiat $AI = d$, $AH = a$; quæratur ... media proportionalis $AL = \sqrt{ad}$ (§. ... *Geom.*). Porro ſuper AC deſcribatur ſemicirculus, & in eo applicetur $GA = AL = \sqrt{ad}$; erit $GC = \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - ad)}$ (§. 417 *Geom.*) adeoque radius Circuli.

Quoniam in Parabola, cujus æquatio $y^2 - ax = 0$, origo indeterminatæ x in verticem axis cadit; circa axem AP parametro a deſcribatur Parabola: dico PM eſſe radicem æquationis veram.

Tab.X. *Fig.* 100. Est enim $MR = PM - PR = PM - CK = y - \frac{1}{2}c$; $AP = y^2 : a$ & $CR = KP = AP - AK = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, consequenter ob $CG^2 = CM^2 = CR^2 + MR^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - ad = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa + \frac{by^2}{a} - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} - cy = -ad$$

$$y^4 + aby^2 - aacy = -a^3 d$$

Cum loco ad Circulum descripto eodem modo, quo in Problemate præcedente, combinatur locus ad Ellipsin. Lubet vero adhuc constructionem dare per Circulum & Hyperbolam æquilateram $y^2 - x^2 + cy - bx - ax - ad = 0$.

Est autem, vi Theorematis generalis (§. 590),

$$[illegible] = 0 \quad -\frac{t}{2m} = -1 \quad -2n = c \quad 2p = -a - b$$

$$t = 2m \quad n = -\frac{1}{2}c \quad p = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$$

$$[illegible] + m^2 - p^2 = -ad$$

$$m^2 = p^2 - n^2 - ad$$

$$m^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad$$

$$m^2 = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad)}$$

Tab.X. *Fig.* 101. Constructo nempe Circulo ut ante, ita ut sit $AK = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, $CK = \frac{1}{2}c$, adeoque $CA = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc)}$, $AH = a$, $AI = d$, adeoque $AL = AG = \sqrt{ad}$, consequenter $GC = MC = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc - ad)}$; quia origo indeterminatæ y in Hyperbola ob valorem ipsius n negativum ab axe versus sinistram distat intervallo $\frac{1}{2}c$, fiat $KT = \frac{1}{2}c$, ducaturque per T recta OS ipsi AP parallela & ad hanc AP perpendicularis.

Quoniam porro, ob valorem ipsius p negativum, indeterminatæ x origo a centro distat intervallo $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, fiat $FO = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & $OQ = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad)}$; erit O centrum & Q vertex Hyperbolæ æquilateræ; quæ si circa axem QS describatur, Circulum in M secabit. Dico PM esse radicem æquationis veram.

Est enim $CR = KP = AP - AK = x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & $MR = MP - RP = MP - CK = y - \frac{1}{2}c$, consequenter ob $MC^2 = CR^2 + RM^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{4}cc - ad = x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + bx - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$x^2 - ax + bx + y^2 - cy = -ad$$

$$x^2 = ax - bx + cy - y^2 - ad$$

Porro $MS = MP + PS = MP + KT = y + \frac{1}{2}c$, $SO = FS + FO = AP + FO = x + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, consequenter ob $SO^2 - QO^2 = MS^2$ (§. 509) $x^2 + ax + \frac{1}{4}aa + bx + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$x^2 + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

seu substituto valore ipsius x^2

$$ax - bx + cy - y^2 - ad + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

$$2ax = 2y^2 \text{ seu } ax = y^2$$

$$x^2 = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : aa$$

His valoribus ipsorum x^2 & x in æquatione

$x^2 +$

$$x^2 + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

substitutis, prodit

$$y^2 + cy = \frac{y^4}{aa} + y^2 + \frac{by^2}{a} + ad$$

$$cy = \frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + ad$$

$$aacy = y^4 + aby^2 + a^3 d$$

seu $y^4 + aby^2 - a^2 cy = -a^3 d$.

PROBLEMA CCLI.

618. *Construere æquationum biquadraticam $y^4 + 2by^3 + a^2 cy = a^3 d$.*

Quoniam $y^4 + 2by^3 = a^3 d - a^2 cy$; æquatio data in hanc resolvitur analogiam:

$$a^2 : y^2 = y^2 + 2by : ad - cy$$

Ut nova indeterminata introducatur, fiat

$$a : y = b + y : x$$

erit I. $ax = by + y^2$

$ax - by = y^2$, consequenter

$$a^2 : ax - by = ax + by : ad - cy$$

II. $a^3 d - a^2 cy = a^2 x^2 - b^2 y^2$

Substituatur in hac æquatione ulterius valor ipsius y^2; prodibit

$$a^3 d - a^2 cy = a^2 x^2 - ab^2 x + b^3 y$$

h. e. $a^3 d - a^2 cy - b^3 y = a^2 x^2 - ab^2 x$

III. $ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2 x}{a}$

$$yy + by = ax$$

IV. $ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} + y^2 + by = x^2 - \frac{b^2 x}{a} + ax$

$$ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2 x}{a}$$

$$y^2 + by = ax$$

V. $y^2 + by - ad + cy + \frac{b^3 y}{a^2} = ax - x^2 + \frac{b^2 x}{a}$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 + by - ax = 0$

II. $y^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2} - \frac{a^2 cy}{b^2} + \frac{a^3 d}{b^2} = 0$

III. $x^2 - \frac{b^2 x}{a} + cy - ad = 0$
$\quad + \frac{b^3 y}{aa}$

IV. $y^2 - x^2 - \frac{b^3 y}{a^2} + \frac{b^2 x}{a} + ad = 0$
$\quad + by - ax$
$\quad - cy$

V. $y^2 + x^2 + \frac{b^3 y}{a^2} - \frac{b^2 x}{a} - ad = 0$
$\quad + by - ax$
$\quad + cy$

Construamus æquationem per Circulum & Parabolam. Pro Circulo cum sit $y^2 + x^2 + \frac{b^3 y}{a^2} + by + cy - \frac{b^2 x}{a} - ax - ad = 0$; erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$r = 0 \quad \frac{s^2}{q^2} = 1 \quad -2n = \frac{b^3}{a^2} + b + c.$$

$$s = q \quad n = -\frac{b^3}{2a^2} - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$$

$$-2p = -\frac{b^2}{a} - a$$

$$p = \frac{b^2}{2a} + \frac{1}{2}a$$

$$n^2 + p^2 - m^2 = -ad$$

$$n^2 + p^2 + ad = m^2$$

$$\sqrt{(n^2 + p^2 + ad)} = m$$

Circulus ergo eodem prorsus modo construitur, quo in Problemate 249, (§.

Tab.X. Fig. 102. (§. 616). Fit nempe $DC = p = b^2 : 2a + \frac{1}{2}a$, $DO = n = b^3 : 2a^2 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, $HO = a$, $OI = d$; erit $OC = \sqrt{(n^2 + p^2)}$, $OL = \sqrt{ad}$, & hinc $LC = \sqrt{(n^2 + p^2 + ad)}$. Ducatur OQ ipsi DC parallela, erit ob valorem OD negativum origo indeterminatæ x in O.

Porro pro Parabola, ad quam $y^2 + by - ax = 0$, erit, vi theorematis generalis (§. 587),

$$\frac{r}{q} = 0 \qquad -2n = b \qquad -\frac{tf}{q} = -a$$

$$\text{hinc } r = 0 \qquad n = -\tfrac{1}{2}b \qquad t = a$$

$$q = f$$

$$n^2 + tp = 0$$

$$\tfrac{1}{4}bb + ap = 0$$

$$ap = -\tfrac{1}{4}bb$$

$$p = -\frac{bb}{4a}$$

Ob valorem itaque ipsius n negativum fiat $OK = \frac{1}{2}b$ ducaturque per K recta AR ipsi OQ parallela; ob valorem ipsius p negativum, fiat $KA = bb : 4a$; erit in A Parabolæ vertex parametro a circa axem AR describendæ, quæ Circulum secabit in M. Dico QM esse radicem æquationis veram.

Sit enim $QM = y$: erit $MR = y + \frac{1}{2}b$, adeoque $RA = \frac{yy + by + \frac{1}{4}bb}{a}$ (§. 391), consequenter $KR = AR - AK = \frac{yy + by}{a}$. Hinc $PC = OQ$ sive $KR - CD = \frac{yy + by}{a} - p$ & $PM = QM + QP = QM + DO = y + n$. Quare cum sit $LC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*); habebitur tandem $n^2 + p^2 + ad = \frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + \frac{b^2y^2}{aa} - \frac{2py^2}{a} - \frac{2pby}{a} + p^2 + y^2 + 2ny + n^2$, hoc est, $\frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + \frac{b^2y^2}{aa} - \frac{2py^2}{a} - \frac{2pby}{a} \; y^2 + 2ny = ad$. Substituantur valores p & n ex æquatione ad Circulum: Quoniam $p = \frac{1}{2}a + b^2 : 2a$ & $n = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + b^3 : 2a^2$; prodibit $\frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + \frac{b^2y^2}{aa} - y^2 - \frac{b^2y^2}{aa} - by - \frac{b^3y}{aa} + y^2 + by + cy + \frac{b^3y}{aa} = ad$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + cy = ad$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\; aa$$

$$y^4 + 2by^3 + a^2cy = a^3d$$

S C H O L I O N.

619. *Æquationes locales, in quas æquationes construendas resolvimus, sunt ad curvam aliquam determinatam; sed plurimum amplificatur methodus, si exemplo* Slusii *ad curvam indeterminatam revocentur: tum enim non amplius Ellipsis vel Hyperbola unica, sed infinitæ constructioni inserviant. Potest etiam æquatio localis ad curvam datam revocari, sicque Problema per Sectionem conicam datam construi. Agedum itaque! videamus, quomodo utrumque præstetur.*

P R O B L E M A CCLII.

620. *Æquationem datam resolvere in æquationes locales, quæ sint ad curvas indeterminatas.*

a) Substituatur pro y radice æquationis $az : v$, ubi pro v recta quælibet assumi potest, & nova, quæ prodit, æquatio in locales ut supra resolvatur: id quod exemplo unico ostendisse sufficit.

Sit

Sit ex.gr. $y^3 + aby = aac$. Quoniam $y = az:v$; erit $y^3 = a^3z^3 : v^3$; consequenter

$$\frac{a^3z^3}{v^3} + \frac{a^2bz}{v} = aac$$

$$z^3 + \frac{v^2bz}{a} = \frac{v^3c}{a}$$

Hæc æquatio in sequentem resolvitur analogiam:

$$v : z = z^2 + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$v : z = z : x$$

erit I. $z^2 = vx$. Hinc $z^2 : v = x$

Porro $z : x = z^2 + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$

hoc est, $= vx + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$

seu (§. 124) $= x + \frac{vb}{a} : \frac{vc}{a}$

II. $x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$

$vx = z^2$

III. $x^2 + \frac{vbx}{a} + vx = \frac{vcz}{a} + z^2$

$vx = z^2$

$x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$

IV. $vx - x^2 - \frac{vbx}{a} = z^2 - \frac{vcz}{a}$

$x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$

hoc est, ob $x = z^2 : v$

V. $x^2 + \frac{bz^2}{a} = \frac{vcz}{a}$

$z^3 + \frac{v^2bz}{a} = \frac{v^3c}{a}$ — v

$\frac{z^3}{v} + \frac{vbz}{a} = \frac{v^2c}{a}$

VI. $zx + \frac{vbz}{a} = \frac{v^2c}{a}$

Habemus adeo æquationes locales ad infinitas Sectiones conicas nempe

I. $z^2 - vx = 0$ II. $x^2 + \frac{vbx}{a} - \frac{vcz}{a} = 0$	ad infinitas Parabolas.
III. $z^2 - x^2 + \frac{vcz}{a} - \frac{vbx}{a} - vx = 0$	ad infinitas Hyperbolas æquilateras.
IV. $z^2 + x^2 - \frac{vcz}{a} + \frac{vbx}{a} - vx = 0$	ad infinitos Circulos.
V. $z^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{vcz}{b} = 0$	ad infinitas Ellipses.
VI. $zx + \frac{vbz}{a} - \frac{v^2c}{a} = 0$	ad infinitas Hyperbolas intra asymptotos.

β) Si fieret $\frac{aa}{v} : y = y : x$; locus primus $y^2 = \frac{a^2x}{v}$ foret ad infinitas Parabolas, nec radix æquationis y (id quod maxime commod[illegible] videri poterat) mutaretur in ali[illegible] sed cum locus ad Circul[illegible]e-generet in locum ad Ellips[illegible] simplicitati constru[illegible] minime consuleretur. Loca tamen a[illegible]Hyperbolam & Ellipsin dete[illegible]inatam ita reduci possunt ad Hyperbolas & Ellipses infinitas, ut utraque indeterminata y & x eadem maneat.

Ex.gr. Pro æquatione proposita construenda elicuimus supra (§. 607)

I. $y^2 + ax = 0$ II. $x^2 + bx - cy = 0$	loca ad Parabolam.
III. $y^2 + x^2 - cy - ax + bx = 0$	locum ad Circulum.

 Quo-

Quoniam $\quad y^2 = ax$

erit $\quad \frac{ay^2}{v} = \frac{a^2x}{v}$

& ob $\quad cy = x^2 + bx$

$$\frac{ay^2}{v} - cy = \frac{a^2x}{v} - x^2 - bx$$

$$y^2 - \frac{vcy}{a} = ax - \frac{vx^2}{a} - \frac{vbx}{a}$$

Item $\quad \frac{ay^2}{v} = \frac{a^2x}{v}$

$$cy = x^2 + bx$$

$$\frac{ay^2}{v} + cy = x^2 + \frac{a^2x}{v} + bx$$

$$y^2 + \frac{vcy}{a} = \frac{vx^2}{a} + ax + \frac{vbx}{a}$$

En locum ad infinitas Ellipses $y^2 + \frac{vx^2}{a} - \frac{vcy}{a} + \frac{vbx}{a} - ax = 0$ & locum ad infinitas Hyperbolas $y^2 - \frac{vx^2}{a} + \frac{vcy}{a} - ax - \frac{vbx}{a} = 0$: quorum uterque cum loco ad Circulum $y^2 + x^2 - cy - ax + bx = 0$ construi potest.

PROBLEMA CCLIII.

Æquationem localem reducere ad aliam ejusdem speciei, quæ sit ad curvam datam.

1. Ex æquatione locali eliciendus est valor linearum, per quas datur, aut, quod perinde est, ratio earundem.

2. Hi valores cum sint æquales lineis, per quas datur curva, ad quam æquatio reducenda: æquationes prodeunt, quarum reductione legitime facta prodibunt valores coëfficientium in æquatione data substituendi, ut in quæsitam degeneret.

Ex.gr. Æquatio ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ mutanda est in aliam, quæ sit ad Parabolam, cujus parameter r. Quoniam a parameter Parabolæ, ad quam æquatio data existit; erit $r = a$, consequenter æquatio quæsita $y^2 - rx = 0$.

Similiter reducenda sit æquatio $y^2 + x^2 + by - ay - cx = 0$ ad Circulum, cujus radius r. Quoniam radius Circuli, ad quam est æquatio data (§.589) $= \sqrt{(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{1}{4}cc)}$

erit $(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{1}{4}cc = r^2$

$$(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}cc$$
$$\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}cc)}$$

$$\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}cc)} = f$$
$$\tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}cc)} = g$$
$$\tfrac{1}{2}c = \sqrt{(r^2 - (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2)} = h$$

His valoribus in æquatione proposita substitutis; prodit æquatio ad Circulum desideratum

$$y^2 + x^2 + 2gy - 2fy - 2hx = 0.$$

PROBLEMA CCLIV.

622. *Invenire regulam generalem construendi omnes æquationes, tam cubicas quam biquadraticas.*

Sit descripta Parabola, & ex centro H radio AH Circulus secans eam in N, N & M. Sit AD $= b$, DH $= d$, AQ $= c$; erit AH$^2 = dd + bb$. Sit porro PM $= x$ parameter Parabolæ $= a$, erit OM $= x + c$, RM $= x + d$. Quoniam (§.404)

$$a : \text{OM} + \text{AQ} = \text{PM} : \text{AP}$$
$$a : x + 2c = x : \frac{x^2 + 2cx}{a}$$

erit DP $=$ HR $= \frac{x^2 + 2cx}{a} - b$, adeoque HR$^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb$, & RM$^2 = x^2 + 2dx + dd$.

Habe-

Habemus adeo:

$$\frac{x^4}{a^2}+\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}-\frac{2bx^2}{a}-\frac{4bcx}{a}+bb$$
$$+x^2+2dx+dd=bb+dd$$

$$\frac{x^4}{a^2}+\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}-\frac{4bcx}{a}=0$$
$$-\frac{2bx^2}{a}+2dx$$
$$+x^2$$

$$x^3+4cx^2+4c^2x-4abc=0$$
$$-2abx+2a^2d$$
$$+a^2x$$

Apparet adeo, si habetur terminus secundus positivus, radices veras cadere versus dextram. Sit adeo æquatio cum ea comparanda

$x^3+px^2 \pm qx \pm r=0$; erit

$4c=p \qquad 4c^2-2ab+a^2=q$

$c=\frac{1}{4}p \qquad 4c^2+a^2-q=2ab$

$$\frac{4}{16}p^2+a^2-q=2ab \quad 2a$$

$$\frac{p^2}{8a}+\frac{1}{2}a-\frac{q}{2a}=b$$

vel

$$a^2+4c^2-2ab=-q$$

$$a^2+\frac{4}{16}p^2+q=2ab$$

$$\frac{1}{2}a+\frac{p^2}{8a}+\frac{q}{2a}=b$$

Porro

$$2a^2d-4abc=r$$

$$2a^2d=r+4abc$$

$$d=\frac{r}{2a^2}+\frac{2bc}{a}$$

hoc est $d=\frac{r}{2a^2}+\frac{1}{4}p+\frac{p^3}{16a^2}\mp\frac{pq}{4a^2}$

vel

$$2aad-4abc=-r$$

$$2aad=4abc-r$$

$$d=\frac{2bc}{a}-\frac{r}{2a^2}$$

hoc est $d=\frac{1}{4}p+\frac{p^3}{16a^2}+\frac{pq}{4a^2}-\frac{r}{2a^2}$

Sit jam $pN=x$; reliqua sint ut ante: erit $Nr=pN-rp=pN-DH$ $=x-d$, $No=x-c$, $pm=x-2c$. Tab. X. *Fig.* 103.

Quoniam (§. 404)

$$a:oN+AQ=pm:Ap$$

$$a:x=x-2c:\frac{xx-2cx}{a}$$

erit $Dp-Hr=\frac{x^2-2cx}{a}-b$. Habemus adeo $NH^2=Hr^2+Nr^2$ (§. 417 *Geom.*)

$$\frac{x^4}{a^2}-\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}-\frac{2bx^2}{a}+\frac{4bcx}{a}+b^2$$
$$+x^2-2dx+dd=bb+dd$$

$$\frac{x^4}{a^2}-\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}+\frac{4bcx}{a}=0$$
$$-\frac{2bx^2}{a}-2dx$$
$$+x^2$$

$$x^3-4cx^2+4c^2x+4abc=0$$
$$-2abx-2a^2d$$
$$+a^2x$$

Apparet adeo, si terminus secundus sit negativus, radicem æquationis veram esse versus sinistram. Sit adeo æquatio cum ea comparenda x^3-px^2 $\mp qx \mp r=0$; erit

$$-p=-4c$$

$$\frac{1}{4}p=c$$

$$4c^2-2ab+a^2=q$$

$$a^2+4c^2-q=2ab$$

$$\frac{1}{2}a+\frac{2c^2}{a}-\frac{q}{2a}=b$$

hoc eſt $\frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} - \frac{q}{2a} = b$

vel

$$4c^2 - 2ab + a^2 = -q$$
$$a^2 + 4c^2 + q = 2ab$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; 2a$$
$$\frac{1}{2}a + \frac{2c^2}{a} + \frac{q}{2a} = b$$

hoc eſt $\frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a} = b$

Porro

$$4abc - 2a^2d = r$$
$$4abc - r = 2a^2d$$
$$\frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2} = d$$

hoc eſt $\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2} = d$

vel

$$4abc - 2a^2d = -r$$
$$4abc + r = 2a^2d$$
$$\frac{2bc}{a} + \frac{r}{2a^2} = d$$

hoc eſt $\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2} = d.$

Tab.X. Fig. 103. Eſt ergo in omnibus æquationibus cubicis completis

$$AE = \tfrac{1}{4}p$$
$$DA = \tfrac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a}$$
$$DH = \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} \mp \frac{r}{2a^2}$$

Nimirum in regula, q ſeu coëfficiens termini tertii ſemper afficitur ſigno contrario ejus, quod in æquatione habet. Habetur autem in regula $-r$, ſi p & r diverſis ſignis afficiuntur: alias ſemper eſt $+r$.

Quoniam coëfficientes illorum terminorum evaneſcunt, qui nihilo æquales ponuntur; evidens eſt ejusdem regulæ ad æquationes incompletas applicatio.

Denique ſi quadratum radii MH vel HN ponatur $bb + dd \mp af$; æquatio manebit biquadratica. Quare ſi biquadratica æquatio fuerit $x^4 \mp px^3 \mp qx^2 \mp rx \mp ſ = 0$; reliqua omnia manebunt ut ante, ſed

$$ſ = a^3 f$$
$$ſ : a^3 = f$$

Unde radius Circuli invenitur ut in Problemate 250 (§. 617), ſi fuerit $+ſ$, vel ut in Problemate 251 (§. 618), ſi fuerit $-ſ$. His obſervatis, regula eadem conſtructioni æquationum biquadraticarum ſatisfacit.

SCHOLION.

623. *Atque hæc eſt regula, quam* Thomas Bakerus (*a*) *centralem vocat & ad omnes caſus æquationum cubicarum & biquadraticarum applicat. Sed verum ejus fundamentum latet in iis, quæ ſuperius tradidimus. Reſtat, ut uſum hujus doctrinæ aliquot exemplis illuſtremus.*

PROBLEMA CCLV.

624. *Inter duas lineas datas invenire duas medias continue proportionales.*

Si datarum	quæſitarum
major $= b$	minor $= y$,
minor $= a$	major $= x$

erit, per conditionem Problematis,

$$a : y = y : x$$

I. $$ax = yy$$

$$y : x = x : b$$

II. $$xx = by$$

III.

(*a*) In *Clave Geometrica catholica* p. 6.

$$a : y = x : b$$

III. $$ab = xy$$
$$x^2 = by$$
$$ax = y^2$$

IV. $$x^2 - ax = by - y^2$$
$$ax = y^2$$
$$x^2 = by$$

V. $$x^2 + ax = y^2 + by$$
$$x^2 = by$$

$$\frac{ax^2}{v} = \frac{aby}{v}$$
$$ax = y^2$$

VI. $$\frac{ax^2}{v} + ax = \frac{aby}{v} + y^2$$
$$ax = y^2$$
$$\frac{ax^2}{v} = \frac{aby}{v}$$

VII. $$ax - \frac{ax^2}{v} = y^2 - \frac{aby}{v}$$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$ } ad Parabolam.
II. $x^2 - by = 0$ } ad Parabolam.
III. $xy - ab = 0$ ad Hyperbolam intra asymptotos.
IV. $y^2 + x^2 - by - ax = 0$ ad Circulum.
V. $y^2 - x^2 + by - ax = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.
VI. $y^2 - \frac{ax^2}{v} + \frac{aby}{v} - ax = 0$ ad infinitas Hyperbolas scalenas.
VII. $y^2 + \frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} - ax = 0$ ad infinitas Ellipses.

Quodsi in æquatione ad Hyperbolam intra asymptotos $xy = ab$ substituatur valor ex æquatione ad Parabolam $ax = y^2$; prodibit $y^3 - a^2 b = 0$.

Constructio itaque multis modis fieri potest, nimirum per Circulum & Hyperbolam intra asymptotos, per Circulum & Hyperbolam æquilateram, per Circulum & infinitas Hyperbolas, per Circulum & infinitas Ellipses, vel per duas Hyperbolas &c. vel denique per regulam centralem BAKERI.

Pro Circulo, ad quem est $y^2 + x^2 - by - ax = 0$, habetur, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{r}{q} = 0 \qquad 2n = b \qquad 2p = a$$
$$\frac{f^2}{q^2} = 1 \qquad n = \tfrac{1}{2}b \qquad p = \tfrac{1}{2}a$$
$$f = q$$
$$n^2 + p^2 = m^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}aa)} = m$$

Quoniam in Parabola parametro a descripta, ad quam $ax = y^2$, orig[illegible] ipsius x in vertice A existit; Circulus per ejus verticem describendus radio $= \sqrt{(\tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}aa)}$. Fiat itaque AD= [illegible] a, DH $= \tfrac{1}{2}b$; erit centrum Circul[illegible] PM $= y$, PA $= x$: id quod faci[illegible]ten-ditur eodem, quo superius, [illegible]do. Tab. IX. [illegible]93.

Pro Ellipsi, ad q[illegible] est y^2 [illegible] $\frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} - ax = 0$, habetur, vi Theorematis generalis (§. 588),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad \frac{t}{2m} = \frac{a}{v} \qquad 2n = \frac{ab}{v}$$

hinc

$$f = q \qquad n = \frac{ab}{2v}$$
$$\frac{2tp}{2m} = a = \frac{2ap}{v} \qquad n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$$
$$2ap = av \qquad n^2 + \frac{ap^2}{v} = \frac{am^2}{v}$$
$$p = \tfrac{1}{2}v \qquad vn^2$$

$$\frac{vn^2}{a} + p^2 = m^2$$

$$\frac{ab^2}{4v} + \frac{1}{4}v^2 = m^2$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{ab^2}{v} + v^2\right)} = m$$

Tab.X. *Fig.* [illegible] 104. Constructio itaque Problematis per Circulum & Ellipsin hæc est: Jungantur DF $= b$ & DE $= a$ ad angulos rectos. Fiat DK $= \frac{1}{2}b$ & erecta perpendiculari KC $= \frac{1}{2}a$; erit DC $= \sqrt{(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa)}$. Ex centro itaque C radio DC describatur Circulus: ita locus prior erit constructus atque origo indeterminatæ x in D. Quare pro Ellipsi fiat DH $= ab : 2v$ & per H ducatur ipsi DE parallela IN. Fiat HL $= \frac{1}{2}v$ & LI $=$ LN $= \frac{1}{2}\sqrt{(ab^2 : v + v^2)}$; erit L centrum, IN axis Ellipsis: quæ si describatur, secabit Circulum in M. Dico esse DQ $= x$, QM $= y$, consequenter DE, QM, DQ, D[illegible] quatuor continue proportionales.

[illegible] enim CP $= x - \frac{1}{2}a$ & PM $= y - \frac{1}{2}b$, adeo[illegible] ob DC² = CM² = CP² + PM² (§. 41[illegible] *Geom.*), $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb = xx - ax$ [illegible] $\frac{1}{4}aa + yy -$ [illegible] $+ \frac{1}{4}bb$, hoc est, $yy + xx - by - a$[illegible]$= 0$: qui est locus ad Circulum. Porr[illegible] OM $= y - ab : 2v$, LO $= x - \frac{1}{2}v$ adeoque ob

$$v : a = \text{IL}^2 - \text{LO}^2 : \text{OM}^2 \text{ (§. 431)}$$

$$1 : \frac{a}{v} = \frac{ab^2}{4v} - x^2 + vx : y^2 - \frac{aby}{v} + \frac{a^2b^2}{4v^2}$$

$$\frac{a^2b^2}{4v^2} - \frac{ax^2}{v} + ax = y^2 - \frac{aby}{v} + \frac{a^2b^2}{4v^2}$$

$$y^2 + \frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} - ax = 0$$

sed $y^2 + x^2 - by - ax = 0$

Ergo $\frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} + by - x^2 = 0$

$$x^2 - by = 0$$

$$x^2 = by$$

Substituatur hic valor in æquatione $y^2 + x^2 - by - ax = 0$; prodibit

$$y^2 + by - by - ax = 0$$

$$y^2 = ax$$

Quare $a : y = y : x$ & (ob $x^2 = by$) $y : x = x : b$. Sunt adeo a, y, x, & b quatuor continue proportionales.

Eodem modo Problema construitur per Circulum & infinitas Hyperbolas scalenas.

Constructionem per Circulum & Hyperbolam intra asymptotos adhuc apponimus. Jungantur nempe RI $= a$ & AR $= b$ ad angulos rectos, & per I describatur Hyperbola intra asymptotos RA, AT. Fiat RD $= \frac{1}{2}b$ & in D erigatur perpendicularis DC $= \frac{1}{2}a$, tandemque ex centro C radio CA describatur Circulus secans Hyperbolam in M: erit TM $= y$ & AT $= x$.

Nam ex natura Hyperbolæ (ob AR. RI = AT. TM) $ab = xy$ & CK $= x - \frac{1}{2}a$, KM $= y - \frac{1}{2}b$, adeoque ob CM² = CK² + KM², $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb = xx - ax + \frac{1}{4}aa + yy - by + \frac{1}{4}bb$, consequenter $yy + xx - ax - by = 0$, seu $xx - ax = by - yy$. Est ergo, vi æquationis prioris,

$$a : x = y : b$$

Quare $x - a : a = b - y : y$ (§. 124)

Porro, vi æquationis posterioris

$$x - a : b - y = y : x$$

Ergo (§. 124) $a : y = y : x$

Est vero etiam $a : y = x : b$ (§. *cit.*)

Ergo $a : y = y : x = x : b$ (§. 167 *Arith.*)

Quod-

Quodſi AR & AS jungantur ad angulos rectos, & circa axem AR parametro a deſcribatur Parabola AMH, circa AS vero parametro b Parabola altera AMI ſecans priorem in M; erit $AP = x$, $PM = y$: quem modum invenit MENECHMUS; ex conditione Problematis, abſque calculo analytico facile eruendum: & nos ideo apponimus, quia inde enata eſt methodus conſtruendi æquationes per duorum locorum combinationem. Eſt enim vi Parabolæ primæ $y^2 = ax$ & vi ſecundæ $x^2 = by$, adeoque $a : y = y : x$ & $y : x = x : b$.

COROLLARIUM.

625. Sit latus cubi $= a$, latus cubi dupli $= y$; erit $2a^3 = y^3$, ſeu ponendo $2a = b$, $aab = y^3$. Quærendæ igitur ſunt inter latus cubi & ejus duplum duæ mediæ continue proportionales, eritque earum prima latus cubi dupli. Et in genere pro tantuplicatione cubi eſt $ma^3 = y^3$, adeoque inter a & ma quærendæ ſunt duæ mediæ.

SCHOLION.

626. Coincidit adeo Problema Deliacum de duplicando cubo, quod Deliis remedium contra peſtem quærentibus Oraculum propoſuiſſe fertur, cum Problemate de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus (quod primus obſervavit HIPPOCRATES Chius): *unde & ipſum* Problema Deliacum *appellari ſolet. Celebre hoc Problema jam olim inter Geometras Græcos extitit, quos inter* PLATO, HERON Alexandrinus, APOLLONIUS Pergæus, ERATOSTHENES, PAPPUS Alexandrinus, SPORUS, MENECHMUS, ARCHITAS Tarentinus, PHILO Byzantius, PHILOPONUS, DIOCLES & NICOMEDES *modis diverſis ab* EUTOCIO (*a*) *conſervatis ſolverunt.*

(*a*) In *Commentariis* in lib. 2 ARCHIMEDIS *de Sphera & Cylindro.*

PROBLEMA CCLVI.

627. *Rectam* AB *utcunque diviſam in* C *ulterius dividere in* D, *ita ut ſit* CD : DB = AC² : CD². Tab. XI. *Fig.*

Sit $AC = a$, $CB = b$, $CD = y$, erit $DB = b - y$; conſequenter, per conditionem Problematis,

$$y : b - y = a^2 : y^2$$

Ut nova indeterminata introducatur, cum ob $y^3 = a^2 b - a^2 y$ Problema ſolidum eſſe facile intelligatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$, & hinc

$$y : b - y = a^2 : ax$$
$$= a : x \quad (\S.\ 124)$$

II. $xy = ab - ay$

Porro ob $y : b - y = a : x$

$$y^2 : by - y^2 = a : x \quad (\S.\ 124)$$
$$ax : by - y^2 = a : x$$
$$x : by - y^2 = 1 : x \quad (\S.\ cit.)$$

III. $x^2 = by - y^2$

$ax = y^2$ add.

IV. $x^2 + ax = by$

$ax = y^2$ add.

V. $x^2 + 2ax =$ …

Denique ob $ax = y^2$ (I) & $x^2 = by - y^2$ (III) ſubt.

VI. $ax - x^2 = 2y^2 - by$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$ ad Parabolam.

II. $xy + ay - ab = 0$ ad Hyperbolam intra aſymptotos.

III. $y^2 + x^2 - by = 0$ ad Circulum.

IV. $x^2 + ax - by = 0$ ad Parabolam.

V. $y^2 - x^2 + by - 2ax = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = 0$ ad Ellipſin.

Nos

Nos duas dabimus constructiones, alteram per Parabolam & Circulum; alteram per Circulum & Ellipsin.

Quoniam æquatio ad Parabolam $y^2 - ax = 0$; non alia re opus est, quam ut parametro a Parabola describatur: erit origo indeterminatæ x in vertice (§. 388).

Pro Circulo, ad quem est $y^2 + x^2 - by = 0$, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$r = 0 \quad \frac{2n = b}{n = \frac{1}{2}b} \quad \frac{n^2 = m^2}{m = n = \frac{1}{2}b}$$
$$p = 0$$

Tab. XI. Fig. 107. In vertice adeo Parabolæ erigatur perpendicularis $AD = \frac{1}{2}b$ & ex centro D, radio $AD = \frac{1}{2}b$, describatur circulus; erit $PM = y$.

Demissa enim perpendiculari DR, erit $MR = PM - PR = PM - AD = y - \frac{1}{2}b$ & (§. 391) $AP = DR = y^2 : a$, consequenter ob $DA^2 = DM^2 = MR^2 + DR^2$ (§. 417 *Geom.*), $y^4 : aa + y^2 - by + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + y^2 - by = 0$$
$$\overline{} \; y : aa$$
$$y^3 + a^2 y - a^2 b = 0$$

Pro Ellipsi ad quam $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = 0$, vi Theorematis generalis (§. 588),

$$\frac{2r}{q} = 0 \quad \frac{t}{2m} = \frac{1}{2} \quad \frac{2n = \frac{1}{2}b}{n = \frac{1}{4}b} \quad \frac{\frac{2tp}{2m} = \frac{1}{2}a}{p = \frac{1}{2}a}$$

hinc

$$q = f$$

$$\frac{n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}}{n^2 + \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}m^2}$$
$$\frac{\frac{1}{16}bb + \frac{1}{8}a^2 = \frac{1}{2}m^2}{\sqrt{(\frac{1}{8}bb + \frac{1}{4}a^2)} = m}$$

Describatur ergo Ellipsis, cujus axis $AB = 2\sqrt{(\frac{1}{8}bb + \frac{1}{4}a^2)}$ & parameter $= \sqrt{(\frac{1}{8}bb + \frac{1}{4}a^2)}$ ob $2m : t = 2 : 1$. Ex centro C demittatur perpendicularis $CH = n = \frac{1}{4}b$ & ducta DE per H axi AB parallela fiat $HD = p = \frac{1}{2}a$; erit in D origo indeterminatæ x.

Quare Circulum cum ea combinaturus erige perpendicularem $DL = \frac{1}{2}b$ & ex L radio DL describatur Circulus: erit $QM = y$, $DQ = x$.

Est enim $PC = QH = DQ - DH = x - \frac{1}{2}a$, $PM = y - \frac{1}{4}b$, adeoque $PC^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$, $PM^2 = y^2 - \frac{1}{2}by + \frac{1}{16}b^2$. Est porro $AC^2 = \frac{1}{8}b^2 + \frac{1}{4}a^2$, consequenter ob $t : 2m = 1 : 2$ (§. 431)

$$1 : 2 = PM^2 : AC^2 - PC^2$$
$$\frac{1 : 2 = y^2 - \frac{1}{2}by + \frac{1}{16}bb : \frac{1}{8}bb - x^2 + ax}{2y^2 - by + \frac{1}{8}bb = \frac{1}{8}bb + ax - xx}$$
$$\overline{2y^2 - by = ax - xx.}$$

Porro $RM = y - \frac{1}{2}b$, $LR = DQ = x$, $LM = \frac{1}{2}b$, consequenter ob $LM^2 = LR^2 + RM^2$ (§. 417 *Geom.*)

$$\frac{\frac{1}{4}bb = y^2 - by + \frac{1}{4}bb + xx}{y^2 - by = - xx}$$

Quo valore ipsius $y^2 - by$ in æquatione superiore substituto, prodit

$$\frac{y^2 - xx = ax - xx}{y^2 = ax}$$
$$\frac{y^2 : a = x}{y^4 : aa = x^2}$$

Hinc ob $y^2 - by + x^2 = 0$,

$$\frac{y^4}{aa} + y^2 - by = 0$$
$$\overline{} \; y : aa$$
$$y^3 + a^2 y - a^2 b = 0$$

Quod Ellipsis transeat per puncta D & L, ita ostenditur. Est $KL = DK = \frac{1}{4}b$, adeoque $KL^2 = \frac{1}{16}b^2$. $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2}$

$\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2)}$ & $KC = DH = \frac{1}{2}a$, adeoque $AK = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2)} - \frac{1}{2}a$ & $KB = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2)} + \frac{1}{2}a$, consequenter $AK.KB = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{8}b^2$. Sed $2KL^2 = \frac{2}{16}b^2 = \frac{1}{8}b^2$. Est itaque $2KL^2 = AK.KB$, consequenter punctum L, adeoque & punctum D in Ellipsi (§.420).

PROBLEMA CCLVII.

628. *Dato parallelepipedo cubum æqualem construere.*

Sint latera parallelepipedi a, b & c; latus cubi sit y; erit (§. 536 *Geom.*)

$$abc = y^3$$

hoc est, $a : y = y^2 : bc$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur; fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$

& ob $a : y = ax : bc$

II. $xy = bc$

Porro $a : y = y : x$

$a : y = ax : bc$

adeoque $y : x = ax : bc$ (§.167 *Arithm.*)

$ax^2 = bcy$

III. $x^2 = bcy : a$

$ax = y^2$ subt.

IV. $x^2 - ax = bcy : a - y^2$

V. $x^2 + ax = y^2 + \frac{bcy}{a}$

Denique ob $x^2 = bcy : a$

& $2ax = 2y^2$

VI. $2ax - x^2 = 2y^2 - bcy : a$

& VII. $2ax + x^2 = 2y^2 + bcy : a$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$ ad Parabolam.

II. $xy - bc = 0$ ad Hyperbolam intra asymptotos.

III. $x^2 - \frac{bcy}{a} = 0$ ad Parabolam.

IV. $y^2 + x^2 - \frac{bcy}{a} - ax = 0$ ad Circulum.

V. $y^2 - x^2 + \frac{bcy}{a} - ax = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{bcy}{2a} - ax = 0$ ad Ellipsin.

VII. $y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{bcy}{2a} - ax = 0$ ad Hyperbolam scalenam.

Pro loco ad Circulum, ad quem $y^2 + x^2 - \frac{bcy}{a} - ax = 0$, vi Theorematis generalis (§.589),

$$2n = bc : a \qquad 2p = a$$
$$n = bc : 2a \qquad p = \frac{1}{2}a$$
$$n^2 + p^2 = m^2$$
$$\sqrt{(\frac{b^2c^2}{4a^2} + \frac{1}{4}aa)} = m$$

Cum in Parabola, ad quam $y^2 - ax = 0$, parametro a descripta, origo [illegible] determinatæ x sit in vertice A, [illegible] Tab. IX. Fig. 93. $= \frac{1}{2}a$, $DH = n = bc : 2a$; erit [illegible] centrum Circuli radio HA de[illegible]ndi: qui si describatur, secabit Parabolam [illegible], eritque $MP = y$.

Est enim $AH^2 = AD^2 + DH^2 = \frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4a^2$, $PA = yy : a$ (§.391), & hinc $DP = HR = yy : a - \frac{1}{2}a$, $MR = y - bc : 2a$. Quare ob $AH^2 = HM^2 = HR^2 + MR^2 = \frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4a^2 = \frac{y^4}{aa} - yy + \frac{1}{4}aa + y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{bbcc}{4aa}$

hoc est, $\frac{y^4}{aa} - \frac{bcy}{a} = 0$

$y : aa$

$$y^3 - abc = 0$$

 Jun-

Tab. XI. *Fig.* 105. Jungantur $RI = b$ & $RA = c$ ad angulos rectos, ducatur indefinita AS ipsi RI parallela & intra asymptotos RA & AS per I describatur Hyperbola; erit origo indeterminatæ x in A. Porro ut Circulus cum ea combinetur, fiat $AD = n = bc : 2a$ & DC ad AD perpendicularis $= p = \frac{1}{2}a$; ex centro C radio AC describatur Circulus Hyperbolam in M intersecans, erit TM ipsi AR parallela $= y$.

Est enim ob $AR . RI = AT . TM$ (§. 502) $bc = xy$. Præterea $CM^2 = AC^2 = AL^2 + CL^2$ (§. 417 *Geom.*) $= \frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4aa$, $CK = LT = AT - AL = x - \frac{1}{2}a$ & $MK = TM - TK = TM - AD = y - bc : 2a$: unde ob $CM^2 = CK^2 + KM^2$ elicitur $\frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4aa = x^2$

$$- ax + \frac{1}{4}aa + y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{bbcc}{4aa}$$

hoc est, $y^2 - \frac{bcy}{a} + x^2 - ax = 0$

seu $y^2 - \frac{bcy}{a} = ax - x^2$

Substituatur pro bc valor ipsius xy; prodibit

$$y^2 - \frac{xy^2}{a} = ax - x^2$$

$$ay^2 - xy^2 = aax - axx \qquad a - x$$

$$y^2 = ax$$

$$y^4 = a^2x^2$$

$$y^4 : a^2 = x^2$$

Quare ob $y^2 - \frac{bcy}{a} + x^2 - ax = 0$

$$ax - \frac{bcy}{a} + \frac{y^4}{a^2} - ax = 0$$

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{bcy}{a} = 0$$

$$y^3 - abc = 0$$

Pro Ellipsi, ad quam est $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{bcy}{2a} - ax = 0$, vi Theorematis generalis (§. 588),

$\frac{r}{q} = 0$ hinc $q = f$

$$\frac{t}{2m} = \frac{1}{2} \qquad 2n = \frac{bc}{2a} \qquad n = \frac{bc}{4a}$$

$$-\frac{2tp}{2m} = -a \qquad \frac{2p}{2} = a \qquad p = a$$

$$n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$$

$$n^2 + \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}m^2$$

$$2n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\frac{b^2c^2}{8aa} + aa)} = m$$

Describatur ergo Ellipsis, cujus axis $AB = 2\sqrt{(a^2 + b^2c^2 : 8aa)}$, parameter $\sqrt{(a^2 + b^2c^2 : 8aa)}$, quia est ad axem in ratione subdupla. Ex centro C excitetur perpendicularis $CH = \frac{bc}{4a}$ & per H agatur DE ipsi AB parallela. Fiat $DH = a$: erit D origo indeterminatæ x. Ut Circulus cum eadem combinetur, fiat $DI = bc : 2a$ & $IL = \frac{1}{2}a$, & radio LD ex centro L describatur Circulus, qui Ellipsin secabit in M. Dico QM esse $= y$ & $DQ = x$.

Est enim $CP = HQ = DQ - DH = x - a$ & $PM = QM - PQ = QM - DK = y - bc : 4a$. Ex natura Ellipsis (§. 431)

$$2 : 1 = AC^2 - CP^2 : PM^2$$

$$2 : 1 = \frac{b^2c^2}{8aa} + a^2 - x^2 + 2ax - aa : y^2 - \frac{bcy}{2a} + \frac{b}{16}$$

$$\frac{b^2c^2}{8aa} - x^2 + 2ax = 2y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{b^2c^2}{8a^2}$$

$$2ax - x^2 = 2y^2 - bcy : a$$

Porro MR = QM — RQ = QM - DI = $y - bc : 2a$, LR = DQ — IL = $x - \frac{1}{2}a$. Quare ob $DL^2 = LM^2 = LR^2 + RM^2$ $\frac{1}{2}aa + b^2c^2 : 4a^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + y^2 - bcy : a + b^2c^2 : 4a^2$, hoc eſt,

$$x^2 - ax + y^2 - bcy : a = 0$$

ſeu $y^2 - \frac{bcy}{a} = ax - x^2$

Subſtituto valore ipſius $ax - xx$ in æquatione ſuperiori, prodit

$$ax + y^2 - \frac{bcy}{a} = 2y^2 - \frac{bcy}{a}$$

$$ax = y^2$$

$$x = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : a^2$$

His valoribus ipſorum x & x^2 denuo in æquatione ſuperiore ſubſtitutis prodit

$$y^2 - y^4 : a^2 = y^2 - \frac{bcy}{a}$$

$$\frac{y^4}{aa} = \frac{bcy}{a}$$

$$y : aa$$

$$y^3 = abc$$

Non abſimili modo fit conſtructio per Circulum & Hyperbolam.

PROBLEMA CCLVIII.

629. *Datum angulum* ACB *triſecare.*

Tab. XI. Fig. 110. Concipiamus angulum ACB eſſe trifariam ſectum in ACE, ECD & DCB, ducanturque arcuum æqualium ſubtenſæ cognomines AE, ED, DB, quæ æquales ſunt (§. 289 *Geom.*). Sit AC $= b$, AB $= a$, AE $= y$, EG $= x$.

Jam anguli EAB menſura eſt arcus DB (§. 314 *Geom.*). Anguli vero ACE menſura cum ſit arcus AE (§. 57 *Geom.*) ipſi DB æqualis *per hypoth.* anguli EAG & ACE æquales ſunt (§. 142 *Geom.*). Quoniam itaque præterea angulus AEC utrique triangulo EAG & EAC communis; erit (§. 267 *Geom.*) Tab. XI. Fig. 110.

AC:AE = AE:EG AC:EC = AE:AG

$b : y = y : x$ ſed AC = EC

I. $yy = bx$ ergo AE = AG

Ducatur EF ipſi DC parallela: erit EFH = GHC (§. 233 *Geom.*) = EDC (§. 312 & 233 *Geom.*). Porro EGF = HGC (§. 156 *Geom.*) = CED (§. 312 & 233 *Geom.*). Eſt igitur (§. 267 *Geom.*).

$$EC : ED = EG : GF$$

$$b : y = x : \frac{xy}{b}$$

Quoniam DB = ED = AE, & DB = BH, EA = AG, *per demonſtr.* ED = FH (§. 257 *Geom.*): erit AE + ED + DB = AG + BH + GH + FG [illegible] eſt, 3AE = AB + FG, conſeq[illegible]er

$$3y = a + xy : b$$

II. $3by = ab + xy$ [illegible] $y - xy = ab$ quæ æquatio in hanc reſolvitur analogiam:

$$b : y = 3b - x : a$$

$$y : x = 3b - x : a \quad (\text{§. 167 } Arith.)$$

III. $ay = 3bx - xx$

$yy = bx$ add.

IV. $ay + yy = 4bx - xx$

$ay = 3bx - xx$

$yy = bx$ ſubtr.

V. $ay - yy = 2bx - xx$

$ay = 3bx - xx$

$2yy = 2bx$ add.

   VI.

VI. $2yy + ay = 5bx - xx$

$ay = 3bx - xx$

$2yy = 2bx$ subtr.

VII. $ay - 2yy = bx - xx$

Habemus adeo æquationes locales

I. $yy - bx = 0$ ad Parabolam.

II. $xy - 3by + ab = 0$ ad Hyperbolam intra asymptotos.

III. $xx - 3bx + ay = 0$ ad Parabolam.

IV. $yy + xx + ay - 4bx = 0$ ad Circulum.

V. $yy - xx - ay + 2bx = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.

VI. $yy + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}bx = 0$ ad Ellipsin.

VII. $yy - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}bx = 0$ ad Hyperbolam scalenam.

Pro Circulo, ad quem est $yy + xx + ay - 4bx = 0$, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$-2n = a \qquad -2b = -4b$$
$$n = -\tfrac{1}{2}a \qquad p = 2b$$
$$n^2 + p^2 = m^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + 4bb)} = m$$

Tab. IX. Fig. 93. ...are Parabola, ad quam $yy - bx = 0$, param...ro b descripta, fiat $AD = 2b$, $DH = \frac{1}{2}a$ ... ex centro H radio DH des... ...ur Circulus; erit $QN = y$, $AQ = x$.

Est ...im his positis $bx = y^2$ (§. 388), consequenter $x = y^2 : b$, atque hinc DQ $= KH = 2b - y^2 : b$. Porro $KN = QN + QK = QN + DH = y + \frac{1}{2}a$. Quare ob $HN^2 = KH^2 + KN^2 = \frac{1}{4}aa + 4bb = 4bb - 4y^2 + y^4 : bb + yy + ay + \frac{1}{4}aa$, hoc est

$$\frac{y^4}{bb} - 3y^2 + ay = 0$$
$$y^3 - 3bby + abb = 0 \quad y : bb$$

Eadem vero æquatio prodit, si in superius inventa secunda æquatione $3y = a + xy : b$ substituitur valor ipsius $x = y^2 : b$ ex prima. Est nempe $3y = a + y^3 : bb$, hoc est, $y^3 - 3bby + abb = 0$.

Constructio per Circulum & Hyperbolam intra asymptotos ita absolvitur. Jungantur $KL = 2b$ & $CL = \frac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit $CK = \sqrt{(4bb + \frac{1}{4}aa)}$ radius Circuli ex centro C per K describendi. Producatur CL in I, donec LI $= a$ & KL in T, donec $LT = b$, seu $KT = 3b$. Intra asymptotos KTS per I describatur Hyperbola. Dico QM esse radicem veram quæsitam seu subtensam trientis arcus, qui metitur angulum trisecandum, radio b descripti: seu $QM = y$ & $KQ = x$.

Est enim $QT = KT - KQ = 3b - x$, adeoque ob $IL.LT = QT.QM$ (§. 502), $3by - xy = ab$. Porro $PC = QL = KL - KQ = 2b - x$ & $PM = y + \frac{1}{2}a$, adeoque ob $KC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*), $\frac{1}{4}aa + 4bb = y^2 + ay + \frac{1}{4}aa + 4bb - 4bx + xx$, hoc est, $y^2 + ay = 4bx - x^2$. Æquatio prior ad Hyperbolam in hanc resolvitur analogiam;

$$3b - x : b = a : y$$

Ergo $4b - x : b = a + y : y$ (§. 124)

$$4b - x : a + y = b : y$$

Æquatio posterior ad Circulum hanc suppeditat analogiam:

$$4b - x : y + a = y : x$$

Quare $b : y = y : x$ (§. 167 *Arithm.*)

Unde $bx = y^2$ & $y^2 : b = x$, $y^4 : b^2 = x^2$. Substitutis his valoribus in æquatione ad Circulum $y^2 + ay = 4bx - x^2$, prodit

$$y^2 + ay = 4y^2 - y^4 : b^2$$
$$ay = 3y^2 - y^4 : b^2$$
$$y : b^2$$
$$ab^2 = 3b^2y - y^3$$

seu $y^3 - 3b^2y + ab^2 = 0$ ut ante.

Notan-

Notandum vero est, cum eadem æquatio prodeat si ponatur $qm = y$, esse qm trientis complementi ad circulum subtensam AI.

Constructiones reliquas facile proprio marte addent, qui superiora rite perceperunt.

PROBLEMA CCLIX.

630. *Numerum irrationalem datum per lineam exprimere.*

Sit potentia imperfecta quæcunque x & radix ex ea extracta irrationalis $x^{1:m}$.

Ponatur $x^{1:m} = y$

erit $x = y^m$

hoc est, a pro unitate assumta

$$a^{m-1} x = y^m$$

quæ est æquatio ad infinita Parabolarum genera (§. 519). Quare si parametro a Parabola primi generis sit descripta & abscissa sit ad parametrum ut numerus sub signo radicali. ex. gr. ut 3 ad 1, si $\sqrt{3}$ desideretur, vel ut 3 ad 2, si quæratur $\sqrt{\frac{2}{3}}$; ejus semiordinata exprimet numerum quæsitum.

Est enim in casu primo, si $a = 1$, $x = 3$, $y^2 = 3$, adeoque $y = \sqrt{3}$. Et si fuerit $a = 1$, $a : x = 3 : 2$, erit $3x = 2a = 2$, consequenter $x = \frac{2}{3}$. Hinc $y^2 = \frac{2}{3}$, adeoque $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Eodem modo patet, describendam esse Parabolam secundi generis seu cubici ordinis, si radices cubicæ dentur; Parabolam vero tertii generis seu biquadratici ordinis, si radices dentur biquadraticæ & ita porro.

Sed possunt etiam Parabolæ inferiores satisfacere radicibus superioribus. Sit enim ex. gr. quærenda linea y, quæ eandem habeat rationem ad lineam datam a, quam habet 1 ad $\sqrt[3]{5}$. Per conditionem Problematis erit

$$1 : \sqrt[3]{5} = a : y$$

$$a\sqrt[3]{5} = y$$

$$5a^3 = y^3$$

Construetur adeo Problema per Parabolam primi generis & circulum, quærendo nempe inter a & $5a$ duas medias continue proportionales.

Fiat enim $a : y = y : x$

erit I. $y^2 = ax$

Æquatio proposita $5a^3 = y^3$ resolvitur in hanc analogiam:

$$a : y = y^2 : 5a^2$$
$$= ax : 5a^2$$
$$= x : 5a$$

unde $y : x = x : 5a$

$$x^2 = 5ay$$

$y^2 = ax$ · vi num. I.

II. $y^2 + x^2 = 5ay + ax$

Æquatio prima est ad Parabolam & secunda ad Circulum. Unde æqu[illegible] $y^3 = 5a^3$ construitur ut supra.

PROBLEMA CCL[illegible]

631. *Invenire puncta [illegible]cunque, quæ sint in curva datæ æquation[illegible]*

1. Ducta linea recta, quæ pro a[illegible] curvæ describendæ assumatur, pro arbitrio determinentur abscissæ quotcunque.
2. Erigantur perpendiculares indeterminatæ ad singulas abscissas.
3. Quoniam abscissa determinata est, æquatio data pro determinata recte habetur. Construatur itaque per methodum supra expositam: it. enim invenietur semiordinata abscissæ respondens.

E. gr.

Ex. gr. Sit construenda Parabola secundi generis seu cubici ordinis $aav = y^3$. Assumta igitur pro abscissa v recta determinata, nova quædam indeterminata introducatur. Fiat nempe

$$a : y = y : x$$

$$\text{I. } ax = y^2$$

Æquatio proposita in hanc resolvitur analogiam :

$$a : y = y^2 : av$$

hoc est $\quad ax : av$

seu $\quad x : v$ (§. 124)

Quare $y : x = x : v$ (§. 167 *Arithm.*)

$$x^2 = vy$$

addatur $y^2 = ax$

erit II. $y^2 + x^2 - vy - ax = 0$

Ope igitur æquationis ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ & alterius ad infinitos Circulos (quia v infinitis modis determinari potest & debet) $y^2 + x^2 - vy - ax = 0$ puncta quotcunque in Paraboloide cubicali inveniuntur. Est enim pro Circulo, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$2n = v \qquad 2p = a$$

$$n = \tfrac{1}{2}v \qquad p = \tfrac{1}{2}a$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}vv + \tfrac{1}{4}aa)} = m$$

Tab. XI. Fig. 112. Quare Parabola parametro a descripta, fiat portio axis AK $= \frac{1}{2}a$ & erecta perpendiculari indeterminatæ KG, ex ejus puncto quocunque C per verticem A describatur Circulus, erit QM semiordinata respondens abscissæ in Paraboloide cubicali, quæ est ipsius KC dupla. Ut igitur plures semiordinatæ determinentur, ut quotcunque aliis punctis rectæ KG per verticem Parabolæ ducendi sunt Circuli alii in punctis adhuc aliis Parabolam intersecantes.

Nam si KC $= \frac{1}{2}v$ & QM $= y$; erit AQ $= yy : a$, KQ $=$ CP $=$ AQ $-$ AK $= yy : a - \frac{1}{2}a$, PM $= y - \frac{1}{2}v$. Quamobrem ob AC^2 $=$ AK^2 $+$ KC^2 $=$ CM^2 $=$ CP^2 $+$ PM^2 (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}vv = y^4 : aa - y^2 + \frac{1}{4}aa + y^2 - vy + \frac{1}{4}vv$, hoc est,

$$y^4 : aa = vy$$

$$y^3 = aav$$

Est ergo 2KC abscissa & QM ipsi respondens semiordinata in Paraboloide cubicali.

Sit construendus Circulus secundi generis, ad quem est $y^3 = av^2 - v^3$. Æquatio in hanc abit analogiam :

$$v : y = y^2 : av - v^2$$

Cum in constructione v determinetur, introducatur nova indeterminata x; ponendo

$$v : y = y : x$$

erit I. $vx = yy$

Porro $v : y = vx : av - v^2$

hoc est $y : x = x : a - v$ (§. 124)

Itaque $ay - yv = xx$

Addatur $vx = yy$

erit II. $yy + xx + vy - ay - vx = 0$.

Ope itaque æquationis prioris ad infinitas Parabolas & posterioris ad infinitos Circulos determinantur quotcunque semiordinatæ ad abscissas quotcunque in Circulo secundi generis assumptas.

Parametro nimirum v describitur Parabola, in qua abscissa x, semiordinata y. Pro Circulo vero est, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = v - a$$

$$\text{hinc } r = 0 \qquad n = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}v$$

$$q = s$$

$$-\frac{2ps}{q} = -v \qquad m^2 = n^2 + p^2$$

$$-2p = -v \qquad = \tfrac{1}{4}aa - av + \tfrac{1}{2}v^2$$

$$p = \tfrac{1}{2}v \qquad m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - av + \tfrac{1}{2}v^2)}$$

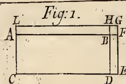
Fiat itaque AD $= \frac{1}{2}v$, DH $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}v$ & radio AH $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - av + \frac{1}{2}v^2)}$ describatur Circulus ex centro H transiens per verticem Parabolæ A, erit AP $= x$ & PM $= y$. T[ab.] Fi[g.]

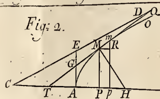
Ipsa tamen constructio molestior est antecedente, quia continuo nova Parabola describenda, ob indeterminatam parametrum v.

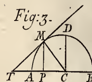
Finis Analyseos finitorum.

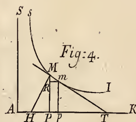
ELE-

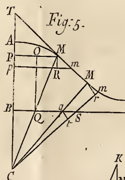
Fig: Anal: infin: Tab: I.

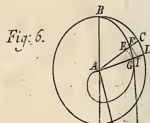


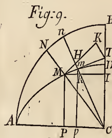


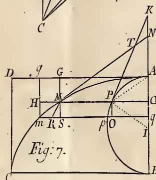


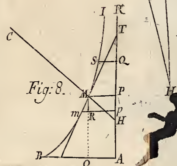


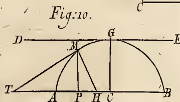


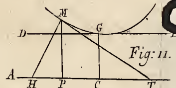


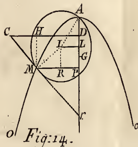


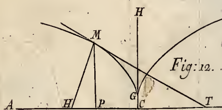


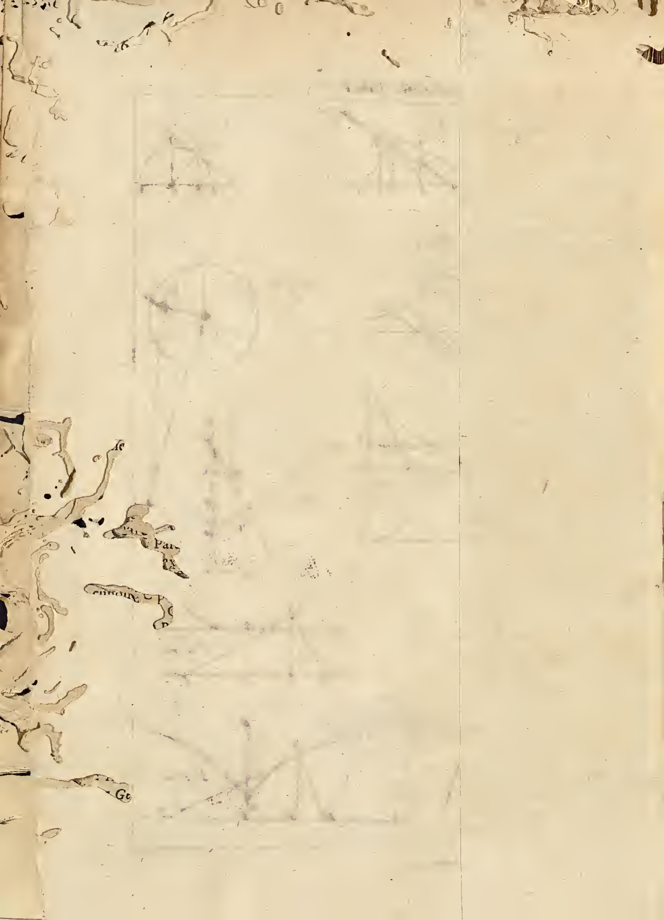












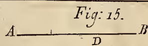
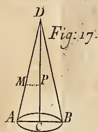
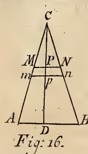


Fig: 15.
A
D
B


D
Fig: 17.
M
P
A
C
B


C
M
P
N
m
p
n
A
D
B
Fig: 16.

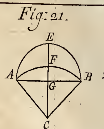


Fig: 21.
E
F
A
G
B
C

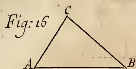


Fig: 16
C
A
B

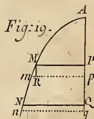
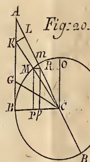
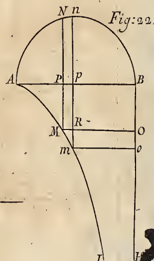


Fig: 19.
A
M
P
m
R
p
N
Q
n
q


A
L
Fig: 20.
K
m
M
R
O
G
B
P
p
C
B


N
n
Fig: 22.
A
P
p
B
R
M
O
m
o
I
H

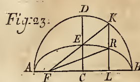
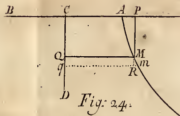
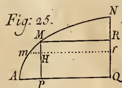
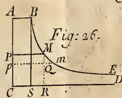
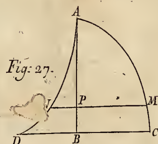


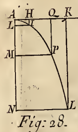
Fig: 23.
D
K
E
R
A
F
C
L
B

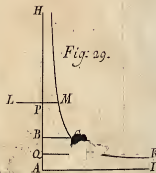

B
C
A
P
Q
M
q
m
R
D
Fig: 24.


N
Fig: 25.
M
R
m
r
H
A
P
Q


A
B
Fig: 26.
P
M
p
m
Q
E
D
C
S
R


A
Fig: 27.
P
M
D
B
C


A
H
Q
K
L
M
P
N
L
Fig: 28.


H
Fig: 29.
L
M
P
B
Q
K
A
I

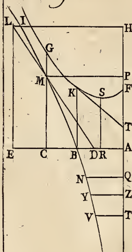


Fig. 30.
L I H G M P K S F T E C B D R A N Q Y Z V T

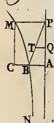


Fig. 31.
M P T Q C B A N

Fig. 32.
G E P M L I H B C F D A

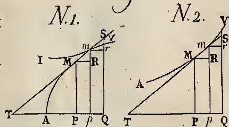


Fig. 33.
N. 1.
S V m r I M R T A P p Q
N. 2.
V S m r M R A T P p Q

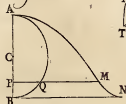
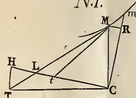
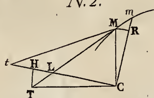


Fig. 34.
A C P Q M N B

Fig. 35.


N. 1.
M m R H L t T C


N. 2.
m M R t H L T C

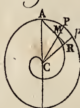


Fig. 36.
A P M p R C

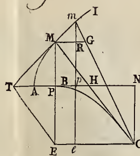


Fig. 37.
m I M G R T A P B p H N E e C

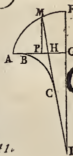


Fig. 38.
M F P H G A B C I

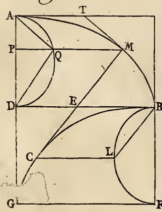


Fig. 39.
A T P Q M D E B C L G F

Fig. 41.
D a b A B C

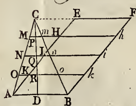


Fig. 40.
C E F M m H h P N I n i Q O K o k R A D B

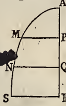
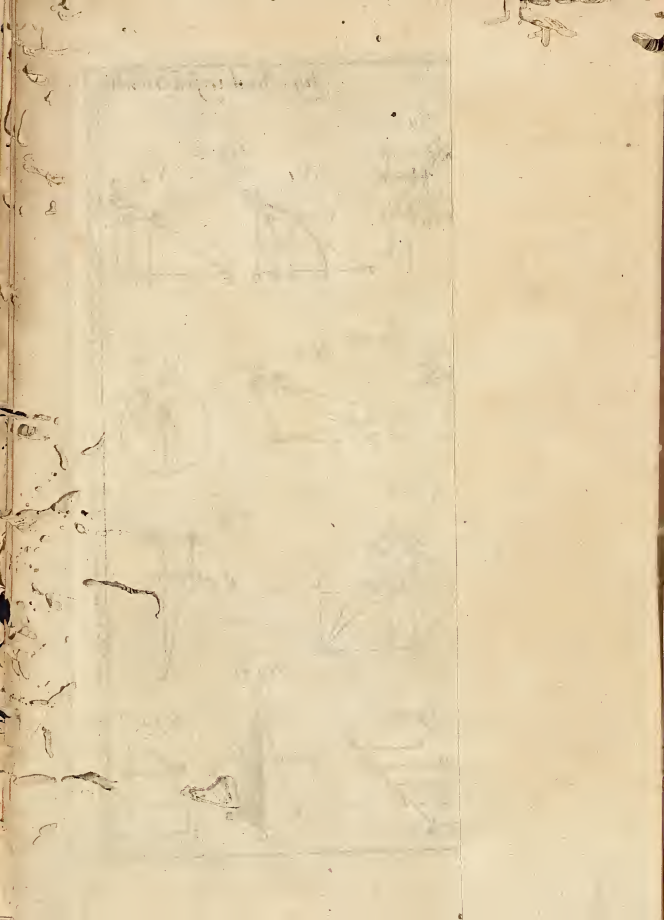
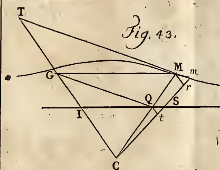
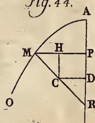


Fig. 42.
A M P N Q S R







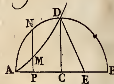
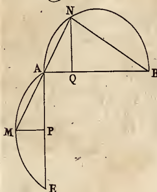
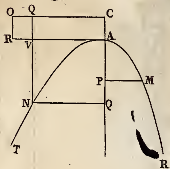
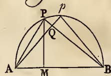


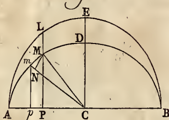
Fig. 46.

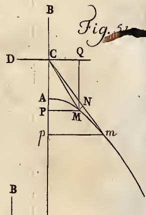
A P M o Q I N D S K C n F E L G O T B

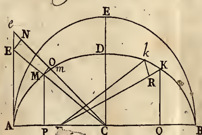


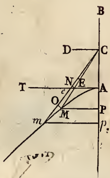












ELEMENTORUM ANALYSEOS MATHEMATICÆ

PARS SECUNDA,

ELEMENTA ANALYSEOS INFINITORUM TRADENS.

SECTIO PRIMA,

DE CALCULO DIFFERENTIALI.

CAPUT PRIMUM.

De natura Calculi differentialis.

DEFINITIO I.

1. CALCULUS *differentialis* eſt Methodus quantitates differentiandi, hoc eſt, inveniendi quantitatem infinite parvam, quæ infinities ſumta datam adæquat.

DEFINITIO II.

2. *Infiniteſima*, ſeu *quantitas infinite parva*, eſt particula quantitatis adeo exigua, ut eidem incomparabilis exiſtat, ſeu quæ omni aſſignabili minor.

COROLLARIUM I.

3. Infiniteſima itaque reſpectu ejus quantitatis, cui incomparabilis exiſtit, pro nihilo habenda. Si enim negligitur, error committitur omni aſſignabili minor, hoc eſt, nullus.

COROLLARIUM II.

4. Hinc duæ quantitates infiniteſima differentes æquales ſunt. [illegible]m enim infiniteſima neglecta nullum [illegible] errorem in quantitatibus (§. [illegible]), una alteri ſubſtitui poteſt. Sunt igitur æquales (§.15 *Arithm.*).

SCHOLION.

5. *Ut natura infinitesimarum rite intelligatur, ad sequentia animum advertisse juvat. Ponamus, te dimetiri montis altitudinem; dum vero per dioptras collineas, flatu venti pulvisculum abigi: montis ergo altitudo diametro unius pulvisculi censetur imminuta. Enimvero quoniam eadem altitudo montis invenitur, sive pulvisculum illud vertici adhæreat, sive abigatur; quantitas ejus diametri in præsente negotio pro nihilo habenda, hoc est, infinite parva existit. Similiter in Astronomia diameter Telluris respectu Fixarum habetur pro puncto seu infinitesima: idem enim observaretur motus primus, si Tellus esset punctum individuum. Eodem etiam modo in Eclipsibus lunaribus computandis Terra pro sphæra perfecta, consequenter montium, multoque magis ædium ac turrium altitudines pro infinitesimis habentur: neque enim aliter nobis appareret umbra Telluris super disco Lunæ, si Terra sphæra perfecta esset. Idem vero in abstractis quantitatibus locum habere, dudum agnovere Veteres & inter eos demonstratores rigidissimi,* EUCLIDES *(a) atque* ARCHIMEDES *(b). Ex. gr. si a linea data auferatur ipsius dimidium, ut habet* EUCLIDES*, seu, quod per...e est, pars alia quantacunque, & a residuo rursus ipsius dimidium aut pars alia similis primum ablatæ, atque ita porro: devenietur tandem ad aliquam quantitatem qualibet data minorem, hoc est, ad infinitesimam. Apparet adeo hinc, nomen infinitesimæ esse respectivum: involvit nempe relationem ad aliam quantitatem datam, cujus respectu infinitesima dicitur. Ex. gr. diameter Telluris in Eclipsibus lunaribus est infinite magna respectu altitudinis montium; sed eadem tamen est infinite parva respectu distantiæ Fixarum in ordine ad motum primum. Cavendum vero, ne cum illis, qui imaginaria cum realibus confundunt, propterea quod distincta continui ac infiniti notione destituti nescio quæ phantasmata sibi fingunt, infinitesimas & infinitesimarum infinitesimas pro entibus realibus habeas: a quo ipse Calculi infinitesimalis inventor, illustris* LEIBNITIUS*, alienus. (c)*

(a) *Element.* Lib. ... Prop. I.
(b) In præfatione ad *Quadraturam Parabolæ*, & in scriptis ejus omnibus.

(c) Vide *Acta Eruditorum* A. 1712. p. 167.

DEFINITIO III.

6. Infinitesimæ dicuntur *differentialia*, item *quantitates differentiales*, si spectantur ut differentiæ duarum quantitatum. Vir summus NEWTONUS (quem Angli sequuntur) infinitesimas *Fluxiones* vocat, quia eas considerat veluti momentanea quantitatum incrementa, ex. gr. lineæ fluxu puncti, aut superficiei fluxu lineæ, aut solidi fluxu superficiei genita.

COROLLARIUM.

7. Cum itaque solæ quantitates variabiles continuo augeantur, vel minuantur, constantibus vero nihil accedat, (§. 375 *Analys. finit.*); differentiale quantitatis constantis nullum est, sed variabiles tantum aliquod admittunt.

HYPOTHESIS.

8. *Quantitatum differentialia exprimantur per eandem litteram, quibus variabiles denotantur, præfixa tamen littera* d. Ex. gr. differentiale ipsius x dicatur dx; differentiale ipsius y dicatur dy. *Est autem* dx *quantitas positiva, si* x *continuo crescit; negativa, si decrescit.*

SCHOLION.

9. *Angli cum* NEWTONO *pro* dx *scribunt* $\dot{x}$; *pro* dy *vero* $\dot{y}$; *sed commodior est* Leibnitiana

nitiana *differentialium designatio, qua omnes reliqui utuntur, quia si differentialia denuo differentiantur facile oritur punctorum confusio: ut taceam typothetas facilius puncta negligere, quam litteram* d *omittere.*

COROLLARIUM I.

10. Quoniam quantitates constantes primis alphabeti litteris indigitamus (*§. 376 Analys. finit.*); erit $da = 0$, $db = 0$, $dc = 0$, (*§. 7*).

COROLLARIUM II.

11. Quare $d(x + y - a) = dx + dy$ & $d(x - y + a) = dx - dy$. Facilis adeo est differentiatio quantitatum per additionem aut subtractionem compositarum.

PROBLEMA I.

12. *Differentiare quantitates se mutuo multiplicantes.*

RESOLUTIO.

I. Si quantitates duæ se mutuo multiplicent, ut xy; differentiale unius factoris ducatur in factorem alterum; summa duorum factorum, quæ hac ratione prodeunt, $xdy + ydx$, erit differentiale quæsitum, hoc est, $d(xy) = xdy + ydx$.

DEMONSTRATIO.

Tab.I. Fig.1. xy repræsentat rectangulum ABDC, cujus latus unum $AC = x$, alterum $DC = y$. Si concipiamus latus utrumque augeri quantitate differentiali, nempe ut CA degeneret in $CL = x + dx$ & CD in $CE = y + dy$; rectangulum CABD abit in majus CLGE. Differentiale adeo ipsius xy est differentia inter rectangulum CABD & CLGE (§. 6). Quare $d(xy) = xy + ydx + xdy + dxdy - xy = ydx + xdy + dxdy$, nempe ALBH + DBFE + BHGF. Quodsi, in rectangulo $ALHB = ydx$, $AL = dx$ sumatur pro constante; erit $HGFB = dxdy$ differentiale ejus (§. 6). Eodem modo patet, esse idem rectangulum BHGF differentiale ipsius DBFE. Quamobrem HBFG seu $dxdy$ respectu rectangulorum ALHB & DBFE, seu ydx & xdy, habetur pro nullo, consequenter differentia inter rectangula CABD & CLGE, seu differentiale ipsius xy est $ydx + xdy$. *Q. e. d.* Tab.I. Fig.1.

II. Si plures quantitates se mutuo multiplicent, ex. gr. si fuerit vxy; fiat $vx = t$, erit $vxy = ty$, consequenter $d(vxy) = tdy + ydt$, *per cas.* 1. Sed $dt = vdx + xdv$, *per cas.* 1. Ergo his valoribus in differentiali antecedente $tdy + ydt$ substitutis prodit $d(vxy) = vxdy + vydx + xydv$. Patet adeo factum ex binis ducendum esse in differentiale tertii.

III. Eodem modo reperitur, quid factu opus sit, si plures quantitates se mutuo multiplicent. Sit enim ex. gr. quantitas differentianda $vxyz$. Fiat $vxy = t$, erit $vxyz = tz$, consequenter $d(tz) = zdt + tdz$, *per cas.* 1. Sed $dt = d(vxy) = vxdy + vydx + xydv$, *per cas.* 2. Ergo $d(vxyz) = zdt + tdz = zvxdy + zvydx + zxydv + vxydz$.

IV. Quodsi crescente una variabili altera y decresceret; evidens est, fore $ydx -$ [illegible] differentiale ipsius xy.

COROLLARIUM I.

13. Ergo $d(x^2) = xdx + xdx = 2xdx$, $d(x^3) = x^2dx + x^2dx + x^2dx = 3x^2dx$ &c. & in genere $d(x^m) = mx^{m-1}dx$. Unde patet, quomodo potentiæ differentientur.

COROLLARIUM II.

14. Cum 1, 2, 3, 4 &c. exponentes dignitatum x^1, x^2, x^3, x^4, &c. sint earundem logarithmi, posito logarithmo unitatis $= 0$ (*§. 334 Arithm.*); logarithmi vero dignitatum decrescentium $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$, &c. sint $-1, -2, -3, -4$ &c. (*§. 351 Arithm.*) erit $\frac{1}{x} = x^{-1}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ &c. & in genere $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$, consequenter $d(1:x^m) = d(x^{-m}) = -mx^{-m-1}dx$ (*§. 13*). Vel cum sit $1 = x^0$ (*§. 55 part. I.*), erit $1 : x^m = x^0 : x^m = x^{-m}$ (§. 54 *part.* I.), adeoque $d(1:x^m) = -mx^{-m-1}dx$ (§. 13).

COROLLARIUM III.

15. Et quia $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 57 *Analys. finit.*) & $1 : \sqrt[m]{x^n} = 1 : x^{n:m} = x^{-n:m}$ (*§. cit. & præc.*); erit $d\sqrt[m]{x^n} = \frac{n}{m} x^{n:m-1} dx = \frac{n}{m} x^{(n-m):m} dx = \frac{n}{m} dx \sqrt[m]{x^{n-m}}$ & $d(1:\sqrt[m]{x^n}) = -\frac{n}{m} x^{-n:m-1} dx = -\frac{n}{m} x^{(-n-m):m} dx = -ndx : m\sqrt[m]{x^{n+m}}$

SCHOLION.

16. *Quodsi cuipiam non satis manifestum videatur, quomodo Corollaria duo posteriora ex priore [illegible]r; is differentialia potentiarum [illegible] alio adhuc modo investigare potest: quem insequente Problemate exponimus, inprimis cum ejusdem methodi usus esse possit, quoties in formulis compositis differentiandis aqua hæret.*

PROBLEMA II.

17. *Differentiare* $1 : x^m$, *item* $\sqrt[m]{x^n}$ *&* $1 : \sqrt[m]{x^n}$.

RESOLUTIO.

I. Fiat $1 : x^m = v$

erit $1 = x^m v$

(§. 10, 12) $0 = mx^{m-1}vdx + x^m dv$

$-mx^{m-1}vdx = x^m dv$

$-\frac{mx^{m-1}vdx}{x^m} = dv$

$-\frac{mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = dv$ (§. 42, 54 *part.* I.)

h.e. $-mx^{-m-1}dx = dv$ (§. 54 *part.* I.)

II. Fiat $\sqrt[m]{x^n} = y$

$x^n = y^m$

$nx^{n-1}dx = my^{m-1}dy$ (§. 13)

hoc est, $nx^{n-1}dx = \frac{my^m dy}{y}$ (§. 54 *part.* I.)

$my^m : y$

$\frac{nyx^{n-1}}{my^m} dx = dy$

seu $\frac{nx^{n:m}x^{n-1}}{mx^n} dx = dy$

$\frac{nx^{n:m}}{m} x^{-1} dx = dy$ (§. 54, *part.* I.)

hoc est, $\frac{n}{m} x^{(n-m):m} dx = dy$

III. Fiat denique $1 : \sqrt[m]{x^n} = z$

erit $1 = z\sqrt[m]{x^n} = zx^{n:m}$

$0 = \frac{n}{m} x^{(n-m):m} zdx + x^{n:m}dz$ (§. 12.)

$-nx$

$$-\frac{nx^{(n-m):m}}{m} zdx = x^{n:m} dz$$

$$-\frac{nx^{(n-m):m}}{mx^{n:m}} dx = x^{n:m} dz$$

$$-\frac{nx^{(n-m):m}}{mx^{2n:m}} dx = dz \text{ (§. 54 part. 1)}$$

$$-\frac{n}{m} x^{(-n-m):m} dx = dz \text{ (§. 54 part. 1)}$$

h. e. $-\frac{ndx}{m\sqrt[m]{x^{n+m}}} = dz$ (§. 14).

En in omnibus caſibus eaſdem formulas, quas ſuperius elicuimus (§. 14, 15.)

SCHOLION.

18. *Me non monente clarum eſſe arbitror, formulas in Problemate repertas ſubire vicem regularum, juxta quas in caſibus ſimilibus inſtituitur differentiatio.*

PROBLEMA III.

19. *Differentiare quantitates ſe mutuo dividentes* $x:y$.

RESOLUTIO.

I. Sit $x:y = v$

erit $x = vy$

$$dx = vdy + ydv \text{ (§. 12)}$$

$$dx - vdy = ydv$$

hoc eſt $dx - \frac{xdy}{y} = ydv$

$$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = dv$$

ſeu $(ydx - xdy):y^2 = dv$

Regula 1. Differentiale diviſoris ducatur in dividendum & contra differentiale dividendi in diviſorem. 2. Factum prius ex poſteriore auferatur. 3. Reſiduum per quadratum diviſoris dividatur. Quotus eſt differentiale quantitatum ſe mutuo dividentium.

II. Si fuerit $xy:vz$ differentianda: ponatur $xy = t$ & $vz = w$; erit $xy:vz = t:w$. Sed $d(t:w) = (wdt - tdw):w^2$, *per caſ.* 1. & $dt = xdy + ydx$, $dw = vdz + zdv$ (§. 12). Ergo $d(t:w) = d(xy:vz) = (vzxdy + vzydx - xyvdz - xyzdv):v^2z^2$. Patet adeo, regulam præcedentem huic quoque caſui ſatisfacere.

CAPUT II.

De uſu Calculi differentialis in tangentibus curvarum determinandis.

PROBLEMA IV.

20. *Invenire ſubtangentem in curva algebraica quacunque.*

RESOLUTIO.

Sit ſemiordinata pm alteri PM infinite propinqua, erit Pp differentialis abſciſſæ, & demiſſa perpendiculari MR = Pp (§. 226 *Geom.*), Rm differentiale ſemiordin[illegible]atur tangens TM: ar[illegible] infinite exiguus Tab. I. *Fig.* 2.

Tab. I. Fig. 2. Mm non differet a linea recta, adeoque MmR triangulum rectilineum rectangulum: quod *Triangulum curvæ characteristicum* appellari solet, quia lineæ curvæ per illud a se invicem distinguuntur.

Ob parallelismum rectarum PM & pm (§. 370 *part.* 1), angulus MmR = TMP (§. 233 *Geom.*). Quare $\triangle\, MmR \backsim \triangle$ TMP (§. 267 *Geom.*). Sit itaque AP $= x$, PM $= y$: erit $Pp = MR = dx$ & $Rm = dy$ (§. 8), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$Rm : RM = PM : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Quodsi, ex æquatione curvæ cujuscunque data, in expressione subtangentis PT generali $ydx : dy$ valor ipsius dx substituatur: quantitates differentiales evanescunt, proditque valor subtangentis in quantitatibus communibus.

Tab. I. Fig. 4. Idem valor eruitur, si convexitas curvæ refertur ad axem AT.

COROLLARIUM I.

21. Pro Parabola *Apolloniana* est:

$$ax = y^2 \quad (\text{§. 388 } part. \text{ I})$$

Hinc $adx = 2ydx$ (§. 12)

$$dx = 2ydy : a$$

$PT = ydx : dy = 2y^2 dy : ady = 2y^2 : a = 2ax : a = 2x$: prorsus ut supra (§. 410 *part.* 1.)

COROLLARIUM II.

22. Pro infinitis Parabolis (§. 519 *part.* 1.)

$$a^{m-1} x = y^m$$

$$a^{m-1} dx = my^{m-1} dy \quad (\text{§. 12})$$

$$dx = my^{m-1} dy : a^{m-1}$$

$PT = $ [illegible] $y^m dy : a^{m-1} dy = my^m : a^{m-1} = ma^{m-}$[illegible]$a^{m-1} = mx$.

Ex. gr. Cum in Paraboloide cubicali $m = 3$; erit subtangens $= 3x$: cum in surdesolidali $m = 5$; erit subtangens $= 5x$.

COROLLARIUM III.

23. Pro Circulo est (§. 377 *part.* 1.)

$$ax - xx = yy$$

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a - 2x)$$

$PT = ydx : dy = 2y^2 dy : (a - 2x) dy = 2y^2 : (a - 2x) = (2ax - 2xx) : (a - 2x) = (ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x)$, hoc est, PC. PB = AP : PT, consequenter PC. PT = AP. PB (§. 378 *Geom.*) = PM² (§. 377 *part.* 1.)

Ergo $AT = (ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x) - x = (ax - xx - \frac{1}{2}ax + xx) : (\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$ hoc est, PC : PA = CA : AT.

COROLLARIUM IV.

24. Pro infinitis Circulis est (§. 524 *part.* 1.)

$$ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$$

$$max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy$$

$$dx = \frac{(m+1)\, y^m dy}{max^{m-1} - (m+1)x^m}$$

$PT = ydx : dy = (m+1)\, y^{m+1} : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax^m - x^{m+1}) : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax - x^2) : (ma - mx - x)$, & $AT = (m+1)(ax - x^2) : (ma - (m+1)x) - x = (max + ax - mx^2 - x^2 - max + mx^2 + x^2) : (ma - (m+1)x) = ax : (ma - (m+1)x)$. Cum itaque in Circulo secundi generis $m = 2$; erit $AT = ax : (2a - 3x)$, & $PT = (2ax - 3x^2) : (2a - 3x)$.

COROLLARIUM V.

25. Pro Ellipsi *Apolloniana* est (§. 420 *part.* 1.)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

Hinc

Hinc $2aydy = abdx - 2bxdx$

$2aydy : (ab - 2bx) = dx$

$PT = ydx : dy = 2ay^2 : (ab - 2bx) = 2abx - 2bx^2) : (ab - 2bx) = (2ax - 2x^2) : (a - 2x)$, prorsus ut supra (§. 440 *part.* 1).

COROLLARIUM VI.

26. Pro infinitis Ellipsibus est (§. 522 *part.* 1)

$$ay^{m+n} = bx^m (a - x)^n$$

$$(m+n) ay^{m+n-1} dy = mbx^{m-1} (a-x)^n dx - nbx^m (a-x)^{n-1} dx$$

$$dx = \frac{(m+n)\, ay^{m+n-1}\, dy}{mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m (a-x)^{n-1}}$$

$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n)\, ay^{m+n}}{mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}}$ $= (m+n) bx^m (a-x)^n : (mbx^{m-1} (a-x)^n - nbx^m (a-x)^{n-1}) =$ [divisione per $bx^{m-1} (a-x)^{n-1}$ facta] $(m+n)(ax - x^2) : (ma - mx - nx)$, & hinc

$AT = (max - mxx + nax - nxx) : (ma - mx - nx) - x = (max - mx^2 + nax - nx^2 - max + mx^2 + nx^2) : (ma - mx - nx) = nax : (ma - (m+n) x)$.

Cum adeo in Elliptoide cubicali sit $m = 2$, $n = 1$; erit $PT = (3ax - 3x^2) : (2a - 3x)$ & $AT = ax : (2a - 3x)$.

COROLLARIUM VII.

27. Pro Hyperbola *Apolloniana* est (§. 459 *part.* 1.)

$$ay^2 = abx + bxx$$

$$2aydy = abdx + 2bxdx$$

$$2aydy : (ab + 2bx) = dx$$

$PT = ydx : dy = 2ay^2 : (ab + 2bx) = (2abx + 2bxx) : (ab + 2bx) = (2ax + 2xx) : (a + 2x)$ prorsus ut supra (§. 491 *part.* 1.)

COROLLARIUM VIII.

28. Pro infinitis Hyperbolis, cum sit $ay^{m+n} = bx^m (a + x)^n$ (§. 525 *part.* 1.): reperietur, ut ante pro infinitis Ellipsibus, $PT = (m+n)(ax + x^2) : (ma + (m+n) x)$ & $AT = nax : (ma + (m+n) x)$.

COROLLARIUM IX.

29. Pro Hyperbola intra asymptotos est (§. 502 *part.* 1.)

$$xy = aa$$

$$xdy + ydx = 0$$

$$ydx = - xdy$$

$PT = ydx : dy = - xdy : dy = - x$

Quoniam valor subtangentis est negativus, id indicio est, subtangentem PT esse sumendam in oppositum originis abscissæ AP. Differentiale enim ipsius xy esse debebat $ydx - xdy$, quia y decrescit (§. 12). Tab. I. Fig. 4.

COROLLARIUM X.

30. Pro infinitis Hyperbolis intra asymptotos, est

$$a^{m+n} = x^n y^m$$

$$0 = nx^{n-1} y^m dx + mx^n y^{m-1} dy$$

$$- mx^n y^{m-1} dy = nx^{n-1} y^m dx$$

$$- mxdy : ny = dx$$

$PT = ydx : dy = - mxydy : nydy = - \frac{mx}{n}$.

COROLLARIUM XI.

31. Pro Cissoide DIOCLIS est (§. 548 *part.* 1.)

$$y^2 = x^3 : (a - x^3)$$

$$2ydy = (3ax^2 dx - 3x^3 dx + x^3 dx) : (a-x)^2$$

$$2y(a - x)^2 dy : (3ax^2 - 2x^3) = dx$$

$PT = ydx : dy = 2y^2 (a-x)^2 : (3ax^2 - 2x^3) = 2x^3 (a-x) : (3ax^2 - 2x^3) = 2(ax - xx) : (3a - 2x)$.

Habemus itaque:

$3a - 2x : a$ [illegible] $2x$: [illegible] Tab. VI.

sive $\frac{3}{2} a - x$ [illegible] $a - x = x : PT$ [illegible]geb.

h. e. [illegible] $+ GB : PB = AP : PT$. Fig. 63.

CoROL-

COROLLARIUM XII.

Tab. I. Fig. 2. 32. Denique pro omnibus curvis algebraicis est (§. 385 *part.* 1.)

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + f = 0$$

$$[\text{illegible}]y^{m-1}dy + nbx^{n-1}dx + scy^r x^{s-1}dx + rcy^{r-1}x^s dy = 0$$

$$nbx^{n-1}dx + scy^r x^{s-1}dx = -may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy$$

$$dx = \frac{-may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy}{nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}}$$

$$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{-may^m - rcy^r x^s}{nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}}$$

Sit ex. gr. $y^2 - ax = 0$, erit comparatione cum formula generali facta,

$$\frac{ay^m = y^2}{a = 1 \quad m = 2} \qquad \frac{bx^n = -ax}{b = -a \quad n = 1}$$

$$\frac{cy^r x^s = 0 \qquad f = 0.}{c = 0 \quad r = 0 \quad s = 0}$$

His valoribus in formula subtangentis generalissima substitutis, prodit subtangens Parabolæ primi generis $(-2.1.y^2 - 0.0y^0 x^0) : (1. - ax^{1-1} + 0.\ 0y^0 x^{0-1}) = -2y^2 : -a = 2y^2 : a$, ut supra (§. 21).

[illegible]militer sit pro circulo $y^2 - ax + x^2 = 0$; erit

$$\frac{ay^m = y^2}{a = 1 \quad m = 2} \qquad \frac{bx^n = -ax}{b = -a \quad n = 1}$$

$$\frac{bx^n = x^2}{b = 1 \quad n = 2} \qquad \frac{cy^r x^s = 0}{c = 0 \quad r = 0 \quad s = 0}$$

$$PT = \frac{-2.1.y^2}{1.-ax^0 + 2.1x} = \frac{-2y^2}{-a + 2x} = \frac{2y^2}{a - 2x}$$

ut supra (§. 23).

Sit $y^3 - x^3 - axy = 0$, erit

$$\frac{ay^m = y^3}{a = 1\ [\text{illegible}]} \qquad \frac{bx^n = -x^3}{b = -1 \quad n = 3}$$

$$[\text{illegible}] \qquad f = 0$$

$$c = -a \quad r = 1 \quad [\text{illegible}] = 1$$

His valoribus in formula subtangentis generali substitutis, prodit subtangens curvæ, ad quam est æquatio data $PT = (-3.1y^3 - 1. - ayx) : (3. - 1x^2 + 1. - ayx^0) = (-3y^3 + ayx) : (-3x^2 - ay) = (3y^3 - axy) : (3x^2 + ay)$; consequenter $AT = (3y^3 - axy) : (3x^2 + ay) - x = (3y^3 - axy - 3x^3 - axy) : (3x^2 + ay) = (3axy - 2axy) : (3x^2 + ay)$, [substituto nempe ex æquatione ad curvam ipsius $y^3 - x^3$ valore axy] hoc est, $axy : (3x^2 + ay)$.

SCHOLION.

33. *In applicatione formulæ generalis, bx^n & $cy^r x^s$ totidem terminis sigillatim comparantur, quot in dato casu speciali eisdem respondent, singulique valores simul in formula subtangentis substituuntur, propterea quod bx^n repræsentat omnes terminos, in quibus sola indeterminata x occurrit, & $cy^r x^s$ omnes terminos, in quibus utraque indeterminata x & y locum habet* (§. 385 part. 1.)

COROLLARIUM XIII.

34. Quia $PT = ydx : dy$, $PM = y$; erit (§. 417 *Geom.*) $TM = \sqrt{(y^2 dx^2 : dy^2 + y^2)} = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy$.

PROBLEMA V.

35. *Determinare subnormalem* PH *in linea algebraica quacunque.*

RESOLUTIO.

Sit $PM = y$, $AP = x$, erit $TP = ydx : dy$ (§. 20), & $TP : PM = PM : PH$ (§. 409 *part.* 1.)

hoc est, $\frac{ydx}{dy} : y = y : \frac{ydy}{dx}$

Quodsi, ut in Problemate præcedente, in expressione subnormalis PH generali valor ipsius dy substituatur, differentiales quantitates evanescunt, & valor subnormalis in quantitatibus ordinariis prodit.

Co-

COROLLARIUM I.

36. In Parabola *Apolloniana* $dy = adx : 2y$, (§. 21). Ergo PH $= ydy : dx = aydx : 2ydx = \frac{1}{2}a$, ut supra reperimus (§. 410 *part.* 1.)

COROLLARIUM II.

37. In infinitis Parabolis $dy = a^{m-1} dx : my^{m-1}$ (§. 22). Itaque PH $= ydy : dx = a^{m-1}y : my^{m-1} = a^{m-1}y^2 : my^m$ (§. 54 *part.* 1.) $= a^{m-1}y^2 : ma^{m-1}x$ (§. 519 *part.* 1.) $= y^2 : mx$, ut adeo sit $mx : y = y$: PH.

COROLLARIUM III.

38. In Circulo $adx - 2xdx = 2ydy$ (§. 23), hoc est, $\frac{1}{2}a - x = ydy : dx =$ PC. Apparet adeo, in Circulo omnes ad peripheriam normales in centro concurrere; consequenter tangentem TM radio CM ad angulos rectos insistere.

COROLLARIUM IV.

39. In infinitis Circulis $(max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx : (m+1)y^m = dy$. Unde subnormalis PH $[ydy : dx] = (max^{m-1}y - (m+1)x^m y) : (m+1)y^m = (max^{m-1}y^2 - (m+1)x^m y^2) : (m+1)y^{m+1} = (max^{m-1}y^2 - (m+1)x^m y^2) : (m+1)(ax^m - x^{m+1}) = (may^2 - (m+1)xy^2) : (m+1)(ax - x^2)$. Est itaque $ax - x^2 : y^2 = \frac{m}{m+1}a - x$: PH.

COROLLARIUM V.

40. In infinitis Ellipsibus $dy = (mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx) : (m+n)ay^{m+n-1}$ (§. 26). Unde PH $= ydy : dx = (mbx^{m-1}(a-x)^n y - nbx^m(a-x)^{n-1}y) : (m+n)ay^{m+n-1} = (mbx^{m-1}(a-x)^n y^2 - nbx^m(a-x)^{n-1}y^2) : (m+n)ay^{m+n}$ sive $:(m+n)bx^m(a-x)^n = (my^2(a-x) - nxy^2) : (m+n)(ax - x^2)$. Est itaque $ax - x^2 : y^2 = \frac{m}{m+n}a - x$: PH.

COROLLARIUM VI.

41. Eodem modo (§. 28) pro infinitis Hyperbolis reperitur PH $= (my^2(a+x) + nxy^2) : (m+n)(ax + x^2)$. Est itaque $ax + xx : yy = \frac{m}{m+n}a + x$: PH.

COROLLARIUM VII.

42. Pro Hyperbola intra asymptotos (§. 29) Tab. I. $dy = -ydx : x$. Unde PH $= ydy : dx = -y^2 : x$ Fig. 4. Valor negativus indicio est, subnormalem PH cadere versus sinistram. Quia $xy = a^2$, adeoque $y = a^2 : x$, & $y^2 = a^4 : x^2$, erit PH $= a^2y : x^2$, vel $a^4 : x^3$, consequenter $x^2 : a^2 = y$: PH & $x^3 : a^3 = a$: PH, hoc est, semiordinata habet ad subnormalem rationem duplicatam, & ad latus potentiae Hyperbolae rationem triplicatam abscissae ad latus potentiae Hyperbolae.

COROLLARIUM VIII.

43. In Cissoide DIOCLIS, $2ydy = (3ax^2dx - 2x^3dx) : (a-x)^2$ (§. 31). Igitur subnormalis $ydy : dx = (3ax^2 - 2x^3) : 2(a-x)^2$. Est adeo $(a-x)^2 : x^2 = \frac{3}{2}a - x$: PH.

COROLLARIUM IX.

44. Quia PH $= ydy : dx$ (§. 35), & PM Tab. I. $= y$; erit MH $= \sqrt{(y^2dy^2 : dx^2 + y^2)} = y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} : dx$. Fig. 2.

SCHOLION.

45. *Equidem data per Problema praecedens subtangente, subnormalis reperitur facillime absque calculo differentiali* (§. 409): *quoniam tamen subinde subnormalis inveniri debet, data tantummodo aequatione ad curvam; ideo in Problemate praesente docendum erat, quomodo independenter a subtangente ex aequatione eruenda.*

PROBLEMA VI.

46. *Determinare curvarum algebraicarum asymptotos.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam asymptotus CD cum Tab. I. curva non concurrit, nisi interval- Fig. 2. lo infinito emenso; haberi potest pro tangente in puncto, cui abscissa infinita respondet. Quantitates ergo constantes [illegible] respectu variabilium x & y [illegible] parvae (§. 2). Quamobrem si ex valore ipsius

Tab. I. *Fig.* 2. ipfius AT abjiciantur, quæ in nullam variabilem ducuntur; prodibit valor ipfius AC, per quem punctum C determinatur, ex quo afymptotus CD ducitur.

2. Quodfi idem fiat in æquatione pro curva, & facta differentiatione inveniatur ratio $dx : dy$; haud difficulter quoque eruitur valor ipfius AE: eft enim in illo cafu $\triangle$ MR$m \backsim \triangle$ CAE. Quod ut clarius intelligatur, ponamus abfciffam AP effe infinitam, adeoque TM afymptotum; evidens eft $\triangle$ MR$m \backsim \triangle$ TPM (§. 20). Sed $\triangle$ TPM $\backsim \triangle$ TAG (§. 268 *Geom.*). Ergo $\triangle$ TAG $\backsim \triangle$ MRm, confequenter MR : Rm = TA : AG (§. 267 *Geom.*). Surrogetur jam in locum $\triangle$ TAG alterum CAE; erit MR : Rm = CA : AE, hoc eft, $dx : dy$ = CA : AE.

COROLLARIUM I.

47. In Hyperbola *Apolloniana*, AT $= ax : (a + 2x)$ (§. 491 *part.* 1). Ergo in cafu afymptotico degenerat in $ax : 2x = \frac{1}{2}a =$ AC, prorfus ut fupra habetur (§. 474 *part.* 1). Porro ad Hyperbolam *Apollonianam*

$$ay^2 = bx\,(a + x)$$

hoc eft, in noftro cafu, ob a infinitefimam,

$$ay^2 = bxx$$

confequenter $y\sqrt{a} = x\sqrt{b}$

$$dy\sqrt{a} = dx\sqrt{b}$$

$$dx : dy = \sqrt{a} : \sqrt{b}$$

adeoque ob $dx : dy =$ CA : AE (§. 46)

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \tfrac{1}{2}a : \text{AE}$$

Unde hab[illegible] $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b} : \sqrt{a} = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, [illegible] ut fupra (§. 47[illegible] 1.).

Idem etiam adhuc aliter invenitur. In cafu infiniti, feu afymptotico, TP = CP $= \frac{1}{2}a + x = x$, ob $\frac{1}{2}a = 0$, quia $x = \infty$. Porro, ob fimilitudinem $\triangle\triangle$ TPM & CAE, eft

$$\text{TP} : \text{PM} = \text{CA} : \text{AE}$$

$$x : \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \tfrac{1}{2}a : \text{AE}$$

$$1 : \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \tfrac{1}{2}a : \text{AE}$$

$$\text{AE} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{b} : \sqrt{a} = \tfrac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

COROLLARIUM II.

48. Pro infinitis Hyperbolis, eft AT $= nax : (ma + mx + nx)$ (§. 28) adeoque in cafu afymptotico, in quo $x = \infty$, AC $= nax : (mx + nx) = na : (m + n)$ (§. 46). Quoniam porro (§. 525 *part.* 1.).

$$ay^{m+n} = bx^m (a + x)^n$$

erit $ay^{m+n} = bx^{m+n}$ (§. 46),

hoc eft, fi fiat brevitatis gratia $m + n = r$,

$$ay^r = bx^r$$

$$a^{1:r}y = b^{1:r}x$$

$$a^{1:r}dy = b^{1:r}dx$$

$$dx : dy = a^{1:r} : b^{1:r} = \text{CA} : \text{AE}$$

Unde ob CA $= na : r$, reperitur AE

$$\frac{na\sqrt[r]{b}}{r\sqrt[r]{a}} = \frac{n}{r}\sqrt[r]{a^{r-1}b}.$$

PROBLEMA VII.

49. *Determinare fubtangentem & fubnormalem in Conchoide.*

Quoniam Conchois eft curva algebraica (§. 377, 538 *part.* 1); fubtangens ejus inveniri poteft *per Probl.* 4, & fubnormalis *per Probl.* 5 (§. 20 & 35). Enim vero quia, ob æquationem ejus admodum prolixam, expreffio utraque non fatis concinna prodit; ideo confultius judicamus alia methodo utramque inveftigari, qua & in cafibus aliis fimilibus commode utendum.

Sit

Tab. I. Fig. 5. Sit nempe $AP = x$, $PM = y$. Intelligatur *pm* ipsi PM infinite propinqua: erit $Pp = MR = dx$, & $Rm = dy$, unde $PT = ydx : dy$, ut supra (§. 20). Sit porro $AB = QM$ (§. 535 *part.* I.) $= a$, $CM = z$, $BC = b$; erit $PB = a - x$, $PC = a + b - x$. Ut valor ipsius dx ex natura curvæ inveniatur; fiat:

$$a - x = v \qquad a + b - z = t$$

$$\text{erit} - dx = dv \qquad - dx = dt$$

Porro (§. 268 *Geom.*)

$$PB : MQ = PC : MC$$
$$v : a = t : z$$

$$at = zv$$
$$adt = zdv + vdz$$

Denique (§. 417 *Geom.*) $CM^2 = PC^2 + PM^2$, hoc est,

$$z^2 = t^2 + y^2$$
$$2zdz = 2tdt + 2ydy$$
$$zdz = tdt + ydy$$

Substituantur ex æquationibus duabus prioribus valores ipsorum differentialium dt & dv in duabus posterioribus: prodibit

$$-adx = -zdx + vdz \qquad zdz = -tdx + ydy$$

$$zdx - adx = vdz \qquad dz = \frac{-tdx + ydy}{x}$$

$$\frac{zdx - adx}{v} = dz$$

Quamobrem

$$\frac{zdx - adx}{v} = \frac{ydy - tdx}{z}$$

$$z^2dx - azdx = vydy - vtdx$$

$$z^2dx - azdx + vtdx = vydy$$

$$dx = \frac{vydy}{z^2 - az + vt}$$

Hinc $PT = ydx : dy = vy^2 : (z^2 - az + vt) = v(z^2 - t^2) : (z^2 - az + tv)$, ob $y^2 = z^2 - t^2$, & subnormalis $ydy : dx$ habetur $= (z^2 - az + vt) : v = t + (z^2 - az) : v$. Tab. I. Fig. 5.

Aliter.

Sit TC secans regulam in I perpendicularis ad MC & *mc* ipsi CM infinite propinqua. TM tangat Conchoidem in M. Radio CQ describatur arcus Q*t* & radio CM arcus M*r*. Sit $QM = a$, $CQ = x$, $CM = y$; erit $tS = dx$, $mr = dy$. Quoniam in △ Q*t*S angulus *t* rectus est (§. 38), & QCI itidem rectus (§. 78 *Geom.*), & ob angulum infinite parvum QCS = 0 (§. 3), angulus IQC = QS*t* (§. 239 *Geom.*), erit △ Q*t*S ∽ △ QIC, (§. 267 *Geom.*), adeoque Tab. IV. Fig. 43.

$$CQ : CI = tS : Qt$$
$$x : b = dx : \frac{bdx}{x}$$

Quoniam Q*t* & M*r* sunt arcus concentrici intra crura ejusdem anguli descripti, erit (§. 138, 412 *Geom.*)

$$CQ : Qt = CM : Mr$$
$$x : \frac{bdx}{x} = y : \frac{bydx}{x^2}$$

Denique cum eodem, quo supra, modo ostendatur, esse △ M*rm* ∽ △ MCT, erit

$$mr : Mr = MC : CT$$
$$dy : \frac{bydx}{x^2} = y : \frac{by^2dx}{x^2dy}$$

Ex natura Conchoidis (§. 535 *part.* I.)

$$y = x + a$$

adeoque $dy = d$[illegible]

Ergo $CT = \frac{by^2dx}{[illegible]y}$ [illegible] x^2

 Duca-

Tab. IV. Fig. 43. Ducatur itaque GM parallela regulæ IQ; erit (§. 268 *Geom.*).

$$CQ : CM = CI : CG$$

$$x : y = b : \frac{by}{x}$$

Quare si porro TM ducatur parallela ipsi GQ; erit (§. *cit.*)

$$CQ : CG = CM : CT$$

$$x : \frac{by}{x} = y : \frac{by^2}{x^2}$$

adeoque CT subtangens, consequenter TM tangens quæsita.

PROBLEMA VIII.

Tab. I. Fig. 6. 50. *Determinare subtangentem in Spirali* Archimedea, *& infinitis Spiralibus aliis.*

Sit semidiameter circuli $AB = a$, peripheria $= b$, arcus $BD = x$, $AG = y$. Intelligatur radius AC alteri AD infinite propinquus, & ducatur radio AG arculus EG; erit $CD = dx$, & $EF = dy$ & (§. 138, 412 *Geom.*)

$$AD : AG = DC : GE$$

$$a : y = dx : \frac{ydx}{a}$$

Quoniam EG ad AE perpendicularis (§. 38); ducatur HA ad AG normalis; quæ est subtangens Spiralis: erit EG parallela ipsi AH (§. 256 *Geom.*), adeoque cum sit FA = AE, sive AG, ob infinite parvam EF (§. 268 *Geom.*),

$$FE : EG = FA : AH$$

$$dy : \frac{ydx}{a} = y : \frac{y^2 dx}{ady}$$

Jam pro Spirali *Archimedea* (§. 571 *part.* I)

$$[illegible] = by$$

$$adx = [illegible]dy$$

Hinc subtangens $AH = \frac{y^2 dx}{ady} = by^2 : a^2 = zy : a$.

Pendet adeo determinatio subtangentis a quadratura Circuli, cum pro arcu x assumenda sit recta.

Pro infinitis Spiralibus est (§. 572 *part.* I.)

$$a^m x^n = b^n y^m$$

$$na^m x^{n-1} dx = mb^n y^{m-1} dy$$

$$dx = mb^n y^{m-1} dy : na^m x^{n-1}$$

$AH = y^2 dx : ady = mb^n y^{m+1} : na^{m+1} x^{n-1} = ma^m x^n y : na^{m+1} x^{n-1} = mxy : na.$

COROLLARIUM.

51. Quodsi ponamus arcum BC esse ad FC ut est abscissa curvæ algebraicæ ad semiordinatam; erit $BC = x$, $CD = dx$, $FC = y$, & (ducto radio AF arculo FI) $GI = FE = dy$, atque (§. 138, 412. *Geom.*) ob $AG = AF$ (§. 4)

$$AC : CD = AG : EG$$

$$a : dx = a - y : \frac{adx - ydx}{a}$$

$$dy : \frac{adx - ydx}{a} = a - y : \frac{(a-y)^2 dx}{ady}$$

Quodsi ergo ex æquatione curvæ algebraicæ, quæ exprimit relationem BC ad FC, substituatur in expressione subtangentis AH valor ipsius dx, prodibit subtangens quæsita. Sit. ex. gr. relatio arcus BC ad rectam FC contenta æquatione

$$bx = y^2$$

erit $\quad bdx = 2ydy$

unde $AH = (a-y)^2 dx : ady = 2y(a-y)^2 : ab.$

PROBLEMA IX.

52. *Determinare subtangentem* PT *in Cycloide.*

Sit

Tab.I. Fig.7. Sit APB circulus genitor Cycloidis AMC, KP tangens circuli. Ducatur TM, quæ Cycloidem in M tangat; erit TP subtangens. Rectæ QM per utrumque contactus punctum P & M transeunti intelligatur ipsa qm parallela & infinite propinqua; demittantur perpendiculares PO & MS: agatur denique MR ipsi PT parallela. Erit MS=PO (§.226 *Geom.*) & MR=Pp, quia arculus Pp, infinite exiguus, habetur pro parte rectæ pT, (§.257 *Geom*). Sit jam AP $=x$, PM$=y$; erit $Pp=MR=dx$, $mR=dy$. Ob parallelas MP & mR, *per construct.* angulus $MmR=TMP$, & ob parallelas MR & TP, *itidem per constr.* $mRM=mpT=MPT$ (§. 233 *Geom.*); consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$mR : RM = MP : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Est vero in Cycloide $y=x$ (§. 575 *part.* I); consequenter $dy=dx$, & hinc $ydx : dy$ seu $PT=y$. Ducta igitur recta PT, quæ circulum tangit in P, facillime quoque ducitur TM, quæ Cycloidem in puncto respondente M tangit.

COROLLARIUM.

53. Si APB fuerit linea algebraica alia, cujus arcus AP sint abscissæ transcendentis AMC, eodem modo determinatur subtangens; cum in omni casu reperiatur $PT = ydx : dy$. Ponamus ex. gr.

$$bx = ay$$

$$\text{erit } bdx = ady$$

$$dx = ady : b$$

$$PT = ydx : dy = aydy : bdy = ay : b.$$

PROBLEMA X.

54. *Determinare subtangentem* PT *in in Logistica.*

Tab.I. Fig.8. Sit AP$=x$, PM$=y$, pm ipsi PM parallela; erit $MR=Pp=dx$ & $Rm=dy$, & vi eorum, quæ in Problemate 4 (§. 20) demonstrata sunt,

$$mR : RM = PM : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Sit abscissa alia ipsa AP major vel minor$=v$, & semiordinata eidem respondens$=z$; erit subtangens $=zdv : dz$. Quoniam, ex natura Logisticæ, abscissæ in progressione arithmetica progrediuntur (§.552 *part.* I.) erit $dx=dv$. Quoniam vero semiordinatæ progrediuntur in geometrica (§. *cit.*); erit

$$y : y+dy = z : z+dz$$

$$y : dy = z : dz \text{ (§. 193 } Arithm.)$$

$$dx = dv$$

$$ydx : dy = zdv : dz$$

Theorema. In Logistica omnes subtangentes sunt inter se æquales, seu subtangens PT est constans.

PROBLEMA XI.

55. *Determinare subtangentem* MH *in Quadratrice* DINOSTRATIS. Tab.I. Fig.9.

Per punctum datum M ducatur radius CN, sitque TM tangens, MK ad CM & TK ad MK perpendicularis, Cn ipsi CN, & pm ipsi PM infinite propinqua; AP$=y$, AN$=x$, CM$=p$, ANB $=a$, AC$=b$; erit $MI=b-y$, $Pp=MR=dy$, $Nn=dx$. Quoniam arcus infinite parvus, radio CM descriptus, coincidit cum recta MH, erit (§. 138, 412 *Geom.*)

$$CN : Nn = C[illegible]$$

$$b : dx [illegible] p : \frac{pdx}{b}$$

Tab.I. Fig.9. Porro cum TK (*per hypoth.*) & CH (§.38) sint ad MK perpendiculares; erit mH ipsi KT parallela (§. 256 *Geom.*), adeoque (§. 268 *Geom.*)

$$Mm : MT = MH : MK.$$

Similiter mR & TI, quia ad MI perpendiculares (*per hypoth.*), inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*), adeoque (§. 268 *Geom.*)

$$Mm : MT = MR : MI$$

consequenter (§. 167 *Arithm.*)

$$MR : MI = MH : MK$$

$$dy : b - y = \frac{pdx}{b} : \frac{pdx}{dy} - \frac{pydx}{bdy}$$

Est vero; ex natura Quadratricis (§. 565 *part.* 1.)

$$bx = ay$$

$$bx : a = y$$

Item, $dx = ady : b$

Substitutis ergo, in valore ipsius MK, pro dx & y valoribus modo inventis, prodit MK $= \frac{ap}{b} - \frac{abpx}{abb} = (ap - px) : b = (a - x)p : b =$ NB. MC : AC. Est vero NB arcus radio NC descriptus; adeoque constructio a rectificatione arcus illius, seu a quadratura circuli pendet.

PROBLEMA XII.

Tab.I. Fig.2. 56. *Intra angulum* QTH *describere curvam desideratam algebraicam, quæ rectam* TQ *in dato puncto* M *tangat.*

RESOLUTIO.

Demittatur ex M ad TH perpendicularis PM, erit TP subtangens, PM semiordinata curvæ quæsitæ. Sit TP $= v$, PM $= y$, erit (§. 20)

$$T\ldots : \ldots MR : mR$$

$$v : y = \ldots : dy$$

$$vdy = ydx$$

Quare si ex æquatione curvæ determinatur valor ipsius dx vel dy, & in æquatione modo inventa substituatur; per communes Algebræ regulas determinantur tum abscissa x semiordinatæ PM datæ respondens, ut habeatur vertex curvæ A; tum lineæ rectæ, quibus datis curva datur. Quodsi vero contingat, aliquas ex his determinari non posse, id quidem indicio est, eam variis modis assumi posse, adeoque plures curvas ejusdem speciei satisfacere proposito.

COROLLARIUM I.

57. Si curva AMO Parabola primi generis esse debet; erit (§. 388 *part.* 1.)

$$ax = y^2$$

$$adx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : a.$$

Quodsi hic valor in æquatione $vdy = ydx$ pro dx substituatur; habebimus

$$vdy = 2y^2 dy : a$$

$$av = 2y^2 \text{ seu } a = 2y^2 : v.$$

Porro ex æquatione ad Parabolam $a = y^2 : x$ Quare

$$2y^2 : v = y^2 : x \quad y^2$$

$$2 : v = 1 : x$$

$$2x = v$$

$$x = \tfrac{1}{2}v$$

Divisa nempe TP bifariam in A, habetur vertex Parabolæ A, ut jam ex superioribus (§. 21) constat. Parametro itaque $2y^2 : v$ circa axem AH Parabola describenda (§. 401 *part.* 1.)

COROLLARIUM II.

58. Si curva AMO Hyperbola æquilatera: erit (§. 507 *part.* 1.)

$$ax + xx = y^2$$

$$adx + 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a + 2x)$$

Quod-

Quodsi in æquatione $vdy = ydx$ pro dx substituatur valor modo inventus, prodibit

$$vdy = 2y^2\, dy : (a + 2x)$$
$$av + 2vx = 2y^2$$
$$av = 2y^2 - 2vx$$
$$a = 2y^2 : v - 2x$$

hoc est, si fiat $y^2 : v = m$

$$a = 2m - 2x$$

Porro, ex æquatione ad Hyperbolam æquilateram

$$ax + xx = y^2$$
$$a = yy : x - x$$

Unde $y^2 : x - x = 2m - 2x$ | x

$$yy - xx = 2mx - 2xx$$
$$yy = 2mx - xx$$

seu $xx - 2mx = -yy$
$\quad m^2 \quad m^2$

$$x^2 - 2mx + m^2 = m^2 - yy$$
$$\left.\begin{matrix} x - m \\ m - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(m^2 - y^2)}$$
$$x = m \pm \sqrt{(m^2 - y^2)}$$

Dato itaque valore ipsius x, datur vertex Hyperbolæ æquilateræ, datur etiam parameter $a = 2m - 2x$; consequenter Hyperbola describi potest (§. 472 *part.* 1.)

COROLLARIUM III.

59. Quoniam pro Circulo $ax - x^2 = y^2$, eodem, quo ante, modo reperitur $a = 2y^2 : v + 2x$ seu, si fiat $y^2 : v = m$, $a = 2m + 2x$, & $x = \sqrt{(mm + yy)} - m$.

COROLLARIUM IV.

60. Si curva AMO Ellipsis primi generis; erit (§. 421 *part.* 1.) Tab. I. *Fig.* 2.

$$y^2 = bx - bx^2 : a$$
$$2ydy = bdx - 2bxdx : a$$
$$dy = (abdx - 2bxdx) : 2ay$$

Quodsi in æquatione $vdy = ydx$ substituatur valor modo inventus, prodibit

$$abv - 2bvx = 2ay^2$$
$$b = 2ay^2 : (av - 2vx)$$

Ex natura curvæ est

$$b = ay^2 : (ax - xx)$$

Unde $\dfrac{2ay^2}{av - 2vx} = \dfrac{ay^2}{ax - xx}$

$$2ax - 2xx = av - 2vx$$
$$-\tfrac{1}{2}av = xx - ax - vx$$

Si fiat $a - v = 2m$

erit $m^2 - \tfrac{1}{2}av = xx - 2mx + mm$

$$\sqrt{(m^2 - \tfrac{1}{2}av)} = \left\{\begin{matrix} x - m \\ m - x \end{matrix}\right.$$
$$m \pm \sqrt{(m^2 - \tfrac{1}{2}av)} = x$$

Quoniam ipsius a, seu axis transversi nullus valor erui potest; pro arbitrio assumi debet. Quodsi minor fuerit quam v; erit $x = m + \sqrt{(m^2 - \tfrac{1}{2}av)}$.

CAP. III.

CAPUT III.

De usu Calculi differentialis in Methodo de maximis & minimis.

DEFINITIO IV.

61. Si semiordinatæ alicujus curvæ usque ad certum terminum continuo crescunt vel decrescunt, quem prætergressæ denuo decrescunt vel crescunt; methodus, per quam determinatur earum maxima vel minima, dicitur *Methodus de maximis & minimis.*

SCHOLION.

62. Potest vero hæc methodus etiam ad determinandas quantitates alias, quæ ad certum aliquem terminum crescunt vel decrescunt, adhiberi. Sed repræsentandæ sunt per curvarum semiordinatas, ut Exempla inferius adducenda loquuntur.

PROBLEMA XIII.

Ta[illegible] 63. *Determinare maximam vel mi-*
Fig. 10. *nimam aplicatam in curva algebraica.*
11.

RESOLUTIO.

Quoniam in curvis maximum vel minimum habentibus tangens TM degenerat tandem in DE & axi parallela evadit, adeoque normalis MH coincidit cum maxima vel minima applicata CG; erit, in casu maximi vel minimi, subtangens TP infinita atque subnormalis PH nihilo æqualis. Est vero PH $= ydy : dx$. Quodsi ergo ponatur $ydy : dx = o$; reperietur $dy = o$ &, ob PT $= ydx : dy = \infty$, ([illegible] nota infinitatis) dx [illegible]

Fieri potest, ut tang[illegible] HG in directum jaceat semiordinatæ GC: quo in casu subtangens PT nihilo æquatur & subnormalis PH fit infinita. Est vero PT $= ydx : dy = o$ (§. 20), quare si ponatur $ydx : dy = o$, habebimus $dx = o$. Vel, ob PH $= ydy : dx = \infty$, reperitur $dy = \infty$. Sunt nimirum tam dx, quam y, intuitu dy infinitesimæ.

Ex æquatione itaque curvæ quærendus est valor ipsius dy, & vel nihilo, vel infinito æquandus, ut habeatur valor abscissæ, cui maxima applicata coordinatur.

COROLLARIUM I.

64. Quoniam in Circulo (§. 377 *part.* 1.)

$$ax - xx = y^2$$

erit

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$(adx - 2xdx) : 2y = dy = o$$

$$a - 2x = o$$

$$a = 2x$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Nempe maxima semiordinata in Circulo erigitur ex centro, uti ex Elementis constat (§. 299 *Geom.*).

Quodsi porro valor ipsius x in æquatione $ax - xx = y^2$ substituatur; prodibit $\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}aa = yy$, hoc est, $\frac{1}{2}aa = yy$. Unde $\frac{1}{2}a = y$: id quod denuo ex Elementis manifestum est.

Quodsi ponamus $2ydy : (a - 2x) = dx = \infty$: erit $a - 2x$ respectu numeratoris $2ydy$ infinite parva, adeoque (§. 3) $a - 2x = o$, ut ante.

COROL-

COROLLARIUM II.

65. Pro infinitis circulis (§. 24)

$$max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy = 0$$

$$max^{m-1} = (m+1)x^m$$

$$\overline{}\ (m+1)x^{m-1}$$

$$ma : (m+1) = x.$$

Ex. gr. Sit $m = 3$, seu æquatio ad circulum tertii generis $y^4 = ax^3 - x^4$; erit $x = \frac{3}{4}a$; consequenter $y^4 = \frac{27}{64}a^4 - \frac{81}{256}a^4 = \frac{108}{256}a^4 - \frac{81}{256}a^4 = \frac{27}{256}a^4$. Unde $y = \frac{1}{4}a \sqrt[4]{27}$.

COROLLARIUM III.

66. Pro Ellipsibus infinitis (§. 26)

$$(m+n)ay^{m+n-1}dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx = 0$$

$$mbx^{m-1}(a-x)^n = nbx^m(a-x)^{n-1}$$

$$ma - mx = nx$$

$$ma = mx + nx$$

$$ma : (m+n) = x.$$

Sit ex. gr. Ellipsis primi generis; erit $m = 1$ & $n = 1$, adeoque $x = \frac{1}{2}a$, & ob $y^2 = bx - bxx : a$ (§. 421 *part.* 1.), $y^2 = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}ab$. Unde $y = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$.

COROLLARIUM IV.

67. Si $x^3 + y^3 = axy$

erit $3x^2dx + 3y^2dy = axdy + aydx$

$$3x^2dx - aydx = axdy - 3y^2dy = 0$$

$$3x^2 = ay$$

$$3x^2 : a = y$$

$$27x^6 : a^3 = y^3$$

$$x^3 + 27x^6 : a^3 = 3x^3$$

$$27x^6 = 2a^3x^3$$

$$\overline{}\ x^3$$

$$27x^3 = 2a^3$$

$$3x = a\sqrt[3]{2}$$

$$x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$$

Porro

$$y = 3x^2 : a = \frac{3}{9}a\sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$$

COROLLARIUM V.

68. Sit $y - a = a^{1:3}(a - x)^{2:3}$

erit $dy = -2a^{1:3}dx : 3(a - x)^{1:3}$

Quodsi hic valor ipsius dy ponatur nihilo æqualis; erit $-2a^{1:3} = 0$. Quamobrem cum nullus valor ipsius x inde eruatur; ponatur

$$-2a^{1:3} : 3(a-x)^{1:3} = \infty$$

erit, ob denominatorem respectu numeratoris infinite parvum (§. 3),

$$3(a-x)^{1:3} = 0$$

$$a - x = 0$$

$$a = x$$

Unde $y - a = a^{1:3}(a-x)^{2:3} = a^{1:3}.\ 0 = 0$

adeoque $y - a = 0$

$$y = a.$$

COROLLARIUM VI.

69. Sit $y^5 = a^2x^3 - x^5 + b^2c^2x$

erit $5y^4dy = 3a^2x^2dx - 5x^4dx + b^2c^2dx = 0$

$$3a^2x^2 - 5x^4 + b^2c^2 = 0$$

$$5x^4 - 3a^2x^2 = b^2c^2$$

$$x^4 - \frac{3}{5}a^2x^2 = \frac{1}{5}b^2c^2$$

$$\frac{9}{100}a^4 \qquad \frac{9}{100}a^4$$

$$x^4 - \frac{3}{5}a^2x^2 + \frac{9}{100}a^4 = \frac{9}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2c^2$$

$$\left.\begin{matrix} x^2 - \frac{3}{10}a^2 \\ \frac{3}{10}a^2 - x^2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\frac{9}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2c^2)}$$

$$x^2 = \frac{3}{10}a^2 \pm \sqrt{(}[illegible]a^4 + \frac{1}{5}b^2c^2)$$

$$x = \sqrt{(}[illegible] \pm \sqrt{(\frac{1}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2c^2)}$$

Fiat $x = m$

erit $y^5 = a^2m^3 - m^5 + b^2c^2m$

$$y = \sqrt[5]{(a^2m^3 - m^5 + b^2c^2m)}$$

COROLLARIUM VII.

70. Sit $b^2x^2 + a^4 = cxy^2 + x^3y$

erit $2b^2xdx = 2cxydy + cy^2dx + 3x^2ydx + x^3dy$

$$2b^2xdx - cy^2dx - 3x^2ydx = 2cxydy + x^3dy = 0$$

$$2b^2x - cy^2 - 3x^2y = 0$$

$$2b^2x = cy^2 + 3x^2y$$

$$2b^2x^2 = cxy^2 + 3x^3y$$

$$b^2x^2 = cxy^2 + x^3y - a^4$$

$$b^2x^2 = 2x^3y + a^4$$

$$b^2x^2 - a^4 = 2x^3y$$

$$\frac{b^2x^2 - a^4}{2x^3} = y$$

$$\frac{b^4x^4 - 2a^4b^2x^2 + a^8}{4x^6} = y^2$$

$$\frac{b^4cx^4 - 2a^4b^2cx^2 + a^8c}{4x^6} = cy^2$$

$$\frac{3b^2x^2 - 3a^4}{2x} = 3x^2y$$

adeoque ob

$$2b^2x - cy^2 - 3x^2y = 0$$

$$2b^2x - \frac{b^4cx^4 - 2a^4b^2cx^2 + a^8c}{4x^6} - \frac{3b^2x^2 - 3a^4}{2x} = 0$$

h. e. $\frac{1}{2}b^2x - \frac{b^4cx^4 - 2a^4b^2cx^2 + a^8c}{4x^6} + \frac{3a^4}{2x} = 0$

$$2b^2x^7 + 6a^4x^5 - b^4cx^4 + 2a^4b^2cx^2 - a^8c = 0$$

$$x^7 + \frac{3a^4x^5}{b^2} - \frac{1}{2}b^2cx^4 + a^4cx^2 - \frac{a^8c}{2b^2} = 0$$

[illegible]uæ est æq[illegible] imens valorem ipsius x, [illegible] maximæ respondentis.

PROBLEMA XIV.

71. *Ex dato puncto* R *in axe* AX *curvæ algebraicæ ducere ad perimetrum curvæ rectam* MR, *quæ sit minima omnium ex eodem puncto* R *ducendarum.*

RESOLUTIO.

Sit AP $= x$, PM $= y$, AR $= c$, erit PR $= c - x$, & ob PM^2 + PR^2 = MR^2 (§. 417 *Geom.*), MR$^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2$. Concipiamus ergo curvam, cujus applicata sit MR (§. 62), erit

$$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = z^2$$

$$-2cdx + 2xdx + 2ydy = 2zdz = 0$$

$$ydy + xdx - cdx = 0$$

Quodsi, ex æquatione ad curvam algebraicam data, pro ydy substituatur valor ejus; valorem ipsius x eruere licet.

COROLLARIUM I.

72. In Parabola (§. 21)

$$\tfrac{1}{2}adx = ydy$$

Ergo $\frac{1}{2}adx + xdx - cdx = 0$

$$x = c - \tfrac{1}{2}a \ \& \ \tfrac{1}{2}a = c - x$$

Hinc $ax = ac - \frac{1}{2}aa = y^2$, & $(c - x)^2 + y^2 = \frac{1}{4}aa + ac - \frac{1}{2}aa = ac - \frac{1}{4}aa = z^2$. Unde MR $= z = \sqrt{(ac - \frac{1}{4}aa)}$. Est adeo MR^2 : PM^2 $= ac - \frac{1}{4}aa : ac - \frac{1}{2}aa = c - \frac{1}{4}a : c - \frac{1}{2}a$.

Quia PR $= c - x = \frac{1}{2}a$, evidens est PR esse subnormalem (§. 36), consequenter MR normalem, unde patet

Theorema. Perpendicularis ad Parabolam est minima, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci potest.

Co-

Tab.I. Fig.13.

COROLLARIUM II.

73. In Hyperbola æquilatera (§. 507 *part.* 1.)

$$ax + xx = y^2$$
$$adx + 2xdx = 2ydy$$
$$\tfrac{1}{2}adx + xdx = ydy$$

Quare $\tfrac{1}{2}adx + xdx + xdx - cdx = 0$ (§.71)

$$2x = c - \tfrac{1}{2}a$$
$$x = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{4}a$$

five $PR = c - x = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{4}a$

Quoniam fubnormalis reperitur $x + \tfrac{1}{2}a$ (§. 35), $PR = c - x = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{4}a$ eft denuo fubnormalis, confequenter &

Theorema. In Hyperbola æquilatera normalis eft breviffima omnium rectarum, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci poffunt.

COROLLARIUM III.

74. In Ellipfi primi generis eft (§. 420 *part.* 1.)

$$ay^2 = abx - bx^2$$
$$2aydy = abdx - 2bxdx$$
$$ydy = (abdx - 2bxdx) : 2a$$

Quare $\tfrac{1}{2}bdx - bxdx : a + xdx - cdx = 0$

$$\tfrac{1}{2}b - c - bx : a + x = 0$$
$$x - \frac{bx}{a} = c - \tfrac{1}{2}b$$
$$ax - bx = ac - \tfrac{1}{2}ab$$
$$x = (ac - \tfrac{1}{2}ab) : (a - b)$$
$$c - x = (\tfrac{1}{2}ab - bc) : (a - b).$$

Cum fubnormalis reperiatur $\tfrac{1}{2}b - bx : a$ (§. 35), erit $PR = c - x = \tfrac{1}{2}b - (bc - \tfrac{1}{2}bb) : (a-b) = (\tfrac{1}{2}ab - bc) : (a - b)$, ut adeo PR denuo fit fubnormalis; confequenter &

Theorema. In Ellipfi normalis fit linea recta breviffima, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci poteft.

COROLLARIUM IV.

75. Eodem modo in Hyperbola fcalena reperitur $x = (ac - \tfrac{1}{2}ab) ; (a + b)$. Tab.I. Fig.13.

COROLLARIUM V.

76. Quoniam $ydy + xdx - cdx = 0$ (§.71)

$$ydy = cdx - xdx$$
$$\frac{ydy}{dx} = c - x = PR$$

Eft adeo PR fubnormalis (§. 35), atque adeo patet generale

Theorema: In omni curva perpendicularis eft linea recta breviffima, quæ ex dato puncto in axe ad eam duci poteft.

PROBLEMA XV.

77. *A puncto C extra curvam algebraicam dato ducere rectam CM, quæ fit minima omnium ex eodem puncto C ad curvam ducendarum.* Tab.I. Fig.14.

RESOLUTIO.

Ob punctum C datum, datur quoque perpendicularis ad axem CD, itemque AD. Sit $AD = p$, $CD = q$, $AP = x$, $PM = y$; erit $MH = AP - AD = x - p$, & $CH = CD - PM = q - y$, confequenter $MC^2 = CH^2 + HM^2 = q^2 - 2qy + yy + x^2 - 2px + pp$. Cum adeo MC^2 fit minimum quoddam; erit ejus differentiale nihilo æquale (§. 63), hoc eft, $-2qdy + 2ydy + 2xdx - 2pdx = 0$

feu $(y - q)dy + (x - p)dx = 0$.

Reliqua peragenda funt ut in Problemate præcedente (§. 71).

COROLLARIUM I.

78. Si curua AMO fuerit Parabola primi generis; erit

$$ax = y^2$$
$$adx = 2\ldots$$
$$\ldots = 2ydy : a$$

Unde $y - q + (x - p) 2y : a = 0$

$ay - aq + 2xy - 2py = 0$

$ay - aq + 2y^3 : a - 2py = 0$

$aay - aaq + 2y^3 - 2apy = 0$

h. e. $y^3 + \frac{1}{2}a^2 y - \frac{1}{2} aaq = 0$
$\quad - apy$

Tab.I. Quodſi hæc æquatio ope Parabolæ datæ at-
*Fig.*14. que circuli conſtruatur (§. 622 *part.* 1.); una eademque opera determinantur & AP & PM, & punctum M. Nimirum (*vi* §. *cit.*) fieri debet $AL = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$ & $IL = \frac{1}{4}q$, atque centro I per verticem Parabolæ A deſcribendus eſt circulus, qui eam in puncto deſiderato M ſecabit. Erit autem $AL = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$; ſi ex A in G transferatur $\frac{1}{2}a$ & DG bifariam ſecetur in L. Nam $AD = p$, adeoque $DG = \frac{1}{2}a - p$. Ergo $DL = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p$, conſequenter $AL = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p + p = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$. His factis $AP = x$, $PM = y$. Etenim ex natura Parabolæ $AP = y^2 : a$, adeoque $LP = IR = y^2 : a - \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p$, conſequenter $IR^2 = y^4 : a^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}a^2 - py^2 : a + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2$. Porro [illegible] $y - \frac{1}{4}q$, adeoque $MR^2 = y^2 - \frac{1}{2}qy + \frac{1}{16}q^2$. Habemus itaque (§. 417 *Geom.*) $MI^2 = IR^2 + MR^2 = y^4 : a^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}a^2 - py^2 : a + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2 + y^2 - \frac{1}{2}qy + \frac{1}{16}q^2$. Eſt vero $MI^2 = AI^2 = IL^2 + LA^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{16}q^2$: Quare

$$\frac{y^4}{a^2} + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}qy = 0$$
$$-\frac{py^2}{a}$$

$$y^4 + \frac{1}{2}a^2 y^2 - \frac{1}{2}a^2 qy = 0$$
$$- apy^2$$

$y^3 +$ [illegible] $\frac{1}{2}a^2 q = 0$
[illegible] apy

quæ eſt æquatio ad conſtr[illegible]dum propoſita.

COROLLARIUM II.

79. Quoniam (§. 77)
$(y - q) dy + (x - p) dx = 0$
erit $(x - p) dx = (q - y) dy$

$$\frac{(x - p)y}{q - y} = \frac{ydy}{dx}$$

Jam porro (§. 268 *Geom.*)
$CH : MH = CD : Dr$
$q - y : x - p = q : Dr$
adeoque $Dr = \frac{qx - pq}{q - y}$; conſequenter ob $DP = x - p$, $Pr = \frac{qx - pq}{q - y} - x + p = (qx - pq - qx + pq + xy - py) : (q - y) = (x - p) y : (q - y)$. Eſt adeo $Pr = ydy : dx$ ſubnormalis (§. 35). Patet adeo denuo generale

Theorema. In omni curva AMO linea ad eam perpendicularis eſt breviſſima omnium, quæ ex dato extra eam puncto C ad eam duci poſſunt.

SCHOLION.

80. *Ex allato exemplo liquet, ſi Problema non fuerit planum, conſultius eſſe ut in expreſſione generali valor potius ipſius* dx, *quam* dy *ſubſtituatur. Nec abſimili modo in curvis algebraicis determinatur punctum intra earum ambitum datum, a quo ad earum perimetros ducantur rectæ minimæ: quemadmodum ex ſequente Problemate patet.*

PROBLEMA XVI.

81. *A puncto* C *intra curvam algebraicam dato ducere rectam* CM, *quæ ſit minima omnium ex eodem puncto* C *ad curvam ducendarum.*

Sit $AD = p$, $CD = q$, $AP = x$, $PM = y$, erit $HC = PD = p - x$ & $MH = y - q$, conſequenter $MC^2 = MH^2 + HC^2$ (§. 417 *Geom.*) $= y^2 - 2qy + q^2 + p^2 - 2px + x^2$. Cum MC^2 ſit minimum quoddam, ex hypotheſi: erit ejus differentiale nihilo æqua-

æquale (§. 63), hoc est, $2ydy - 2qdy - 2pdx + 2xdx = 0$ seu $(y-q)\,dy - (p-x)\,dx = 0$. Reliqua peragenda sunt ut in Problemate 14 (§. 71).

COROLLARIUM I.

82. Quoniam $(y-q)\,dy = (p-x)\,dx$

$$\text{erit } \frac{dy}{dx} = \frac{p-x}{y-q}$$

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{(p-x)\,y}{y-q} = \frac{HC.\,PM}{MH}$$

Quare cum sit MH : HC = PM : PR (§. 268 *Geom.*); erit PR subnormalis (§. 35). Patet adeo denuo

Theorema. In omni curva AMO linea normalis est brevissima, quæ a dato intra eam puncto C ad eam duci potest.

COROLLARIUM II.

83. Linea itaque ad curvam normalis est brevissima omnium, quæ a dato quocunque in eodem plano puncto ad eam duci potest (§. 76, 79, 82).

PROBLEMA XVII.

Tab.II. Fig.15. 84. *Lineam rectam* AB *ita secare in* D, *ut rectangulum ex* AD *&* DB *sit maximum eorum, quæ hac ratione construi possunt.*

Sit $AB = a$, $AD = x$, erit $DB = a - x$, consequenter $AD.\,DB = ax - xx$ maximum aliquod, atque hinc (§. 63) ejus differentiale nihilo æquale: concipitur nempe esse ad circulum, ad quem

$$ax - xx = yy$$

$$\text{Quare } adx - 2xdx = 2ydy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Linea igitur AB est secanda in duas partes æquales, estque quadratum omnium rectangulorum maximum, quorum altitudines & bases junctim sumtæ inter se æquantur.

PROBLEMA XVIII.

85. *Lineam rectam* AB *ita secare in* D, *ut* $AD^m.\,DB^n$ *sit maximum factorum simili modo formatorum.* Tab.II. Fig.

Sit denuo $AB = a$, $AD = x$, erit $DB = a - x$, consequenter $AD^m.DB^n = x^m\,(a-x)^n$. Erit igitur x abscissa respondens semiordinatæ maximæ in infinitis circulis, ad quos $x^m\,(a-x)^n = y^{m+n}$ (§. 517 *part.* I), & hinc (§. 63)

$$mx^{m-1}(a-x)^n\,dx - nx^m(a-x)^{n-1}dx = 0$$

$$mx^{m-1}(a-x)^n = nx^m\,(a-x)^{n-1}$$

$$m\,(a-x) = nx$$

$$ma = mx + nx$$

$$ma : (m+n) = x$$

Sit ex. gr. $m = 2$, $n = 1$, erit $x = \frac{2}{3}a$, hoc est, si recta $AD = \frac{2}{3}a$ & $BD = \frac{1}{3}a$, atque BD sumatur pro altitudine prismatis, AD pro latere quadrati, quod est basis ejusdem; erit prisma omnium maximum eorum, quæ ex divisione rectæ AB in duas partes formari possunt.

PROBLEMA XIX.

86. *Super recta* AB *tanquam hypothenusa triangulum rectangulum maximum construere.* Tab.II. Fig.16.

Sit $AB = a$, $AC = x$, erit (§. 417 *Geom.*) $BC = \sqrt{(aa - xx)}$, area (§. 392 *Geom.*) $= \frac{1}{2}AC.\,CB = \frac{1}{2}x\sqrt{(aa - xx)}$. Habemus adeo æquationem ad curvam tertii generis

$$x\sqrt{(aa - xx)} = 2yy$$

$$\text{seu } aaxx - x^4 = 4y^4$$

 Unde

Tab.II. Fig.16. Unde $2a^2 xdx - 4x^3 dx = 16y^3 dy = 0$

$$2a^2 x = 4x^3$$

$$\frac{1}{2}a^2 = x^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = x$$

Patet adeo triangulum maximum esse æquicrurum. Nam si $AB^2 = aa$ & $AC^2 = \frac{1}{2}aa$, erit etiam $CB^2 = \frac{1}{2}aa$; consequenter $AC = CB$.

PROBLEMA XX.

Tab.II. Fig.17. 87. *Inter omnes conos æquales determinare eum, qui minimam habet superficiem.*

Sit soliditas conorum æqualium a^3, ratio radii ad peripheriam $r:p$, radius coni $AC = x$; erit $r:p = x:\frac{px}{r}$. Hæc peripheria basis $px:r$ ducta in $\frac{1}{2}x$ dat basin coni $px^2:2r$ (§. 429 *Geom.*): per quam si dividatur a^3, habetur $\frac{1}{3}DC = 2a^3r:px^2$ (§. 548 *Geom.*). Unde $DC = 6a^3r:px^2$, &

$$DC^2 = 36a^6r^2:p^2x^4$$

$$AC^2 = x^2$$

$$AD^2 = x^2 + 36a^6r^2:p^2x^4 \text{ (§. 417 Geom.)}$$

$$AD = \sqrt{(p^2x^6 + 36a^6r^2)}:px^2$$

$\frac{1}{2}$ peripheria baf. $px:2r$

Superf. coni $\sqrt{(p^2x^6 + 36a^6r^2)}:2rx$ (§. 548 *Geom.*)

Habemus itaque, vi methodi de maximis & minimis (§. 63),

$$(p^2x^6 + 36a^6r^2):4r^2x^2 = y^2$$

h. e. $p^2x^4:4r^2 + 9a^6:x^2 = y^2$

$$p^2x^3dx:4r^2 - 18a^6xdx:x^4 = 2ydy = 0$$

$$p^2x^3dx \ldots ^6 dx:x^3 = 0$$

$$p^2x^3:r^2 = 18 \ldots x^3$$

$$p^2x^6 = 18a^6r^2$$

$$px^3 = 3a^3r\sqrt{2}$$

$$x^3 = 3a^3r\sqrt{2}:p$$

$$x = a\sqrt[3]{(3r\sqrt{2}:p)}$$

Quoniam $px^3 = 3a^3r\sqrt{2}$, erit $x^3:a^3 = 3r\sqrt{2}:p$, consequenter evidens est

Theorema. Cubus radii coni inter æquales minimam superficiem habentis est ad ipsum conum in ratione composita radii ad peripheriam & $3\sqrt{2}$ ad 1.

PROBLEMA XXI.

88. *Sit* ADB *semicirculus & curva* AMD *ejus naturæ, ut sit* $BP:PN = AP:PM$; *determinare punctum* M, *in quo* MN *est maxima linea earum, quæ simili modo determinantur.*

Sit diameter semicirculi $AB = a$, $AP = x$; erit $PB = a - x$, & $PN = \sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 327, 377 *Geom.*). Est vero, *per hypoth.*

$$BP:PN = AP:PM$$

$$a-x:\sqrt{(ax-x^2)} = x:PM$$

adeoque $PM = \frac{x\sqrt{(ax-x^2)}}{a-x} = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{(a-x)}}$, consequenter $NM = PN - PM = \sqrt{(ax - x^2)} - \sqrt{x^3}:\sqrt{(a-x)}$, & hinc $MN^2 = (a^2x - 2ax^2 + 2x^3 - 2\sqrt{(a^2x^4 - 2ax^5 + x^6)}):(a-x) = [\text{ob} \sqrt{(a^2x^4 - 2ax^5 + x^6)} = ax^2 - x^3]$, $\frac{a^2x - 4ax^2 + 4x^3}{a-x}$. Quare cum NM^2 sit maximum aliquod, erit (§. 63)

$$\frac{(a^2 - 8ax + 12x^2)(a-x)dx + (a^2x - 4ax^2 + 4x^3)dx}{(a-x)^2}$$

$$(a^2 - 8ax + 12x^2)(a-x) + a^2x - 4ax^2 + 4x^3 =$$

h. e.

Tab. IV. Fig. 45. h. e. $\left.\begin{array}{l} a^3 - 8a^2x + 12ax^2 \\ - a^2x + 8ax^2 - 12x^3 \\ + a^2x - 4ax^2 + 4x^3 \end{array}\right\} = 0$

$a^3 - 8a^2x + 16ax^2 - 8x^3 = 0$ ——— $a - 2x$

$a^2 - 6ax + 4x^2 = 0$

$4x^2 - 6ax = - a^2$ ——— 4

$x^2 - \frac{3}{2}ax = - \frac{1}{4}a^2$

$\frac{9}{16}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{5}{16}a^2$

$x^2 - \frac{3}{2}ax + \frac{9}{16}a^2 = \frac{5}{16}a^2$

$\frac{3}{4}a - x = \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$

$x = \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$

Dividatur radius CB bifariam in E, erit $CE = \frac{1}{4}a$, adeoque, ob $CD = \frac{1}{2}a$, $DE = \sqrt{\frac{5}{16}a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$. Fiat $EP = ED$; erit $PB = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$; consequenter $AP = AB - PB = \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$.

PROBLEMA XXII.

Tab. IV. Fig. 46. 89. *Determinare maximam applicatam* QN *in curva* AMND *ejus naturæ, ut ducta recta* FM *per punctum* D, *rectæ* AE *quæ lineam* CB *positione datam in* E *ad angulos rectos secat, sit eidem* AE *constanter æqualis.*

Sit $FM = AE = a$, $DE = b$, $EP = MG = x$, erit $DP = x - b$ & $FG = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Jam cum anguli ad P & G sint recti, *per construct.* & ob parallelas AE & MG (§. 256 *Geom.*) $PDM = DMG$ (§. 233 *Geom.*), erit $\triangle FGM \backsim \triangle PDM$, & ideo (§. 267 *Geom.*)

$$MG : GF = DP : PM$$

$$x : \sqrt{(a^2 - x^2)} = x - b : PM$$

adeoque $PM = \frac{(x-b)\sqrt{(a^2-x^2)}}{x} = (1 - \frac{b}{x})(\sqrt{a^2 - x^2})$

Hinc $PM^2 = (1 - \frac{2b}{x} + \frac{b^2}{x^2})(a^2 - x^2)$

$= a^2 - \frac{2a^2b}{x} + \frac{a^2b^2}{x^2} - x^2 + 2bx - b^2$

Habemus adeo (§. 63) Tab. IV. Fig. 46.

$$\frac{2a^2bdx}{x^2} - \frac{2a^2b^2dx}{x^3} - 2xdx + 2bdx = 0$$

$$\frac{a^2b}{x^2} - \frac{a^2b^2}{x^3} - x + b = 0$$ ——— x^3

$$a^2bx - a^2b^2 - x^4 + bx^3 = 0$$ ——— $x - b$

$$a^2b - x^3 = 0$$

$$x^3 = a^2b$$

$$x = \sqrt[3]{a^2b}.$$

Parametro a circa axem EB describatur Parabola EIR (§. 400 *part.* 1) fiatque (§. 622 *part.* 1) $EO = \frac{1}{2}a$, & OK ad EB perpendicularis $= \frac{1}{2}b$. Ex centro K, radio KE, describatur circulus EIT secans Parabolam in I, erit IL ad EB perpendicularis ($= EQ$) $= x$, adeoque QN perpendicularis ad AE transiens per I maxima applicata.

Est enim $IS = IL - SL = x - \frac{1}{2}b$, & cum $EL = x^2 : a$ (§. 391 *part.* 1) $LO = SK = \frac{1}{2}a - x^2 : a$. Quare $SI^2 = x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2$, & $SK^2 = \frac{1}{4}a^2 - x^2 + x^4 : a^2$; consequenter $EK^2 = IK^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - bx + x^4 : a^2$. Unde ob $EK^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$ habetur $x^4 : a^2 - bx = 0$, adeoque $x^3 - a^2b = 0$.

PROBLEMA XXIII.

90. *Determinare maximam applicatam* PM *curvæ* AME *ejus naturæ, ut diameter circuli* ANB *sit axi* AE *& rectæ per* A *ductæ* MN *in quolibet curvæ puncto* M *æqualis.* Tab. IV. Fig. 47.

Sit $MN = AB = AE = a$, $AM = x$, $PM = y$, erit $AN = a - x$. Jam cum AB & PM sint ad AE perpendiculares, *per hypoth.* erunt eædem inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*) adeoque $AMP = NAB$ (§. 233 *Geom.*). Quare cum porro angulus

Tab. IV. Fig. 47. ad P rectus fit (§.78 *Geom.*) & ANB, qui est in semicirculo, fit itidem rectus, (§.317 *Geom.*); erit △ AMP ∽ △ ANB (§. 267 *Geom.*) &

$$PM : AM = AN : AB$$
$$y : x = a-x : a$$
$$ay = ax - x^2$$
$$ady = adx - 2xdx = 0$$
$$a - 2x = 0$$
$$a = 2x$$
$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Hinc porro $y = x - \frac{x^2}{a} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a$.

Est igitur in casu applicatæ maximæ $AM = \frac{1}{2}a$: unde reperitur $AP = \frac{1}{4}\sqrt{3a^2}$ (§.417 *Geom.*)

SECTIO SECUNDA.

DE CALCULO INTEGRALI, SEU SUMMATORIO.

CAPUT I.

De natura Calculi integralis.

DEFINITIO V.

91. *Calculus Integralis* seu *Summatorius* est Methodus quantitates differentiales summandi, hoc est, ex quantitate differentiali data inveniendi eam, ex cujus differentiatione resultat differentiale datum.

COROLLARIUM.

92. Integrationis itaque seu summationis rite peractæ indicium est, si quantitas inventa juxta regulas Cap. 1, Sect. I, traditas differentiata eam producit, quæ ad summandum proponebatur.

SCHOLION.

93. *Quoniam* Angli *differentialia quantitatum fluxiones vocant* (§. 6); *Calculum, quem nos differentialem dicimus*, Methodum fluxionum; *quem vero integralem vocamus & [illegible]a differentiis ad summas, seu, ut cum* Angl[illegible] *loquar, a fluxionibus ad quantitates fluen[illegible] (ita nimirum variabiles dicunt) ascendit*, Methodum [illegible]m inversam *appellant*.

[illegible]HESIS.

94. *Signum summ[illegible] quantitatis integralis fit* ∫, *ita ut* ∫ydx *denotet summam seu integrale differentialis* ydx.

PROBLEMA XXIV.

95. *Quantitatem differentialem integrare seu summare.*

RESOLUTIO.

Ex superioribus manifestum est, quod sit

I. $\int dx = x$ (§.8).
II. $\int(dx \mp dy) = x \mp y$ (§.11.).
III. $\int(xdy + ydx) = xy$ (§.12).
IV. $\int mx^{m-1}\,dx = x^m$ (§.13)
V. $\int(n:m)\,x^{(n-m):m}\,dx = x^{n:m}$ (§.17).
VI. $\int(ydx - xdy):y^2 = x:y$ (§.19).

Ex his casus quartus & quintus frequentius occurrunt, in quibus quantitas differentialis summatur, si exponenti variabilis unitas additur, & ea, quæ prodit, dividitur per novum exponentem ductum in differentiale radicis, ex. gr. in casu quarto per $(m - 1 + 1)\,dx$, hoc est, per mdx.

Quodsi quantitas differentialis ad summandum

mandum proposita nulli illarum formularum similis; aut reducenda est ad summabilem finitam, aut ad seriem infinitam cujus singuli termini summari possunt, vel etiam ad Quadraturas & Rectificationes curvarum simpliciorum, quæ quadrari vel rectificari nondum possunt, veluti ad Quadraturam circuli, vel Rectificationem arcus circuli: quas reductiones exemplis potius, quam regulis docemus, ne calculi tyronibus nauseam moveamus.

Et quia eadem differentialia prodeunt, si variabilibus constantes quantitates adjiciantur, quam si eædem abfuerint (§. 11); itaque fieri potest, ut $\int dx$ sit $x + a$ vel $x - a$, $\int(xdy + ydx) = xy \mp a^2$, vel $xy \pm ab$, & ita porro. Sed quid de quantitate adjicienda tenendum sit, docebitur paulo post.

SCHOLION.

96. *Quemadmodum in Analysi finitorum quælibet quantitas ad quemcunque dignitatis gradum evehi, sed non vice versa ex qualibet radix extrahi potest desiderata; ita similiter in Analysi infinitesimali quantitas quælibet variabilis, aut ex variabilibus & constantibus quomodocunque composita, haud difficulter differentiatur, sed non vice versa quodlibet differentiale integrari potest. Quemadmodum autem porro in Analysi finitorum non ex omnibus æquationibus radices extrahendi Methodus hactenus inventa, neque enim ætas nostra transcendit limites ultra seculum & quod excurrit Algebræ jam assignatos: ita similiter in Analysi infinitorum Calculus integralis suam perfectionem nondum est assecutus. Sicuti autem in Analysi finitorum ad methodos extrahendi radicem per approximationem recurrimus, ubi perfectam extrahere non datur; ita similiter in Analysi infinitorum ad series infinitas confugimus, ubi perfectam summationem dare non valemus.*

CAPUT II.

De usu Calculi integralis in Quadraturis curvarum.

DEFINITIO VI.

97. *Differentiale* seu *Elementum areæ* dicitur rectangulum PMRP *ex* semiordinata PM in differentiale abscissæ P*p*.

COROLLARIUM I.

98. Si ergo semiordinata PM $= y$, abscissa AP $= x$, erit Pp $=$ MR $= dx$, consequenter Elementum areæ PM. MR $= ydx$.

COROLLARIUM II.

99. Quoniam mR $= dy$ & MR $= dx$; erit $\triangle$MR$m = \frac{1}{2}dxdy$ (*§. 392 Geom.*). Sed $\frac{1}{2}dxdy$ est ipsius ydx infinitesima (§. 12), consequenter trapezium PMmp æquale est rectangulo PMRp, in præsente nimirum casu, ubi pm ipsi PM infinite propinqua intelligitur (§. 4). Quare cum area AMP in infinita istiusmodi trapezia resolvi possit; erit ea $\int ydx$ (*§. 91, 94*). Tab. I. Fig. 2.

COROLLARIUM III.

100. Quodsi itaque ex æquatione ad curvam datam substituatur valor ipsius y, & ydx integrabile evadat; integratione peracta habetur Quadratura curvæ. Curvam igitur quadrare, idem est ac summare ydx.

PROBLEMA XXV.

101. *Invenire aream Trianguli.* Tab. II. Fig. 18.

Sit CP $= x$, MN $= y$, CD $= a$, AB $= b$; erit, ob MN ipsi AB parallelam, (§. 2[...] 396 *Geom.*)

$$CP : MN = CD : AB$$

$$x : y = a : b$$

$$y = bx : a$$

Tab.II. Fig.18. Ergo elementum $MNnm = ydx$ (§. 98) $= bxdx : a$. Unde habetur $\int ydx = bx^2 : 2a$ (§.95): quæ est area indefinita CMN (§.99). Quodsi pro CP, seu x, substituatur CD, seu a; prodibit area totius trianguli $ACB = ba^2 : 2a = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}AB.CD$, prorsus ut in Elementis Geometriæ (§.392) demonstratum.

SCHOLION.

102. *Hoc Exemplum ideo attulimus, ut Tyrones, quibus principia Calculi summatorii sub initium duriora videntur, intelligant, per eum non alia reperiri, nisi quæ demonstrationibus rigidis firmantur; tum ut methodi applicationem in exemplo obvio facilius perspiciant.*

PROBLEMA XXVI.

103. *Parabolam quadrare.*

Pro Parabola *Apolloniana* (§. 388 *part.* 1)

$$ax = y^2$$
$$a^{1:2}x^{1:2} = y$$
$$ydx = a^{1:2}x^{1:2}dx$$
$$\int ydx = \tfrac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2} = \tfrac{2}{3}xy$$, substituto valore ipsius $a^{1:2}x^{1:2}$.

COROLLARIUM.

104. Est ergo spatium parabolicum ad rectangulum ex semiordinata in abscissam ut $\frac{2}{3}xy$ ad xy, hoc est, ut 2 ad 3 (§.124 *part.* 1).

PROBLEMA XXVII.

105. *Infinitas Parabolas quadrare.*

Pro infinitis Parabolis & curvis agnatis (§. 519 *part.* 1)

$$a^n x^m = y^r$$
$$a^{n:r} x^{m:r} = y$$
$$ydx = a^{n:r} x^{m:r} dx$$
$$\int ydx = \ldots a^{n:r} x^{m:r+1} = \frac{r}{m+r}xy,$$ ob $a^{n:r} x^{m:r} = y$.

COROLLARIUM.

106. Spatium parabolicum aut paraboloidicum quodcunque est ad rectangulum ex semiordinata in abscissam, ut $rxy : (m+r)$ ad xy, hoc est, ut r ad $m+r$ (§.124 *part.* 1).

PROBLEMA XXVIII.

107. *Quadrare segmentum spatii parabolici* PMNQ *inter duas semiordinatas* PM *&* QN *interceptum.*

I. Quoniam AP constans est, & origo abscissæ indeterminatæ in P: sit $AP = b$, $PQ = x$, $QN = y$, erit $AQ = b + x$. Sit porro parameter $= a$, erit (§.388 *part.* 1)

$$ab + ax = y^2$$
$$\sqrt{(ab + ax)} = y$$
$$ydx = dx\sqrt{(ab + ax)}$$

Ut hoc elementum integrabile reddatur; fiat

$$\sqrt{(ab + ax)} = v$$

erit
$$ab + ax = v^2$$
$$adx = 2vdv$$
$$dx = 2vdv : a$$
$$ydx = 2v^2dv : a$$
$$\int ydx = \tfrac{2}{3}v^3 : a = \tfrac{2}{3}(ab + ax)\sqrt{(ab + ax)} : a = \tfrac{2}{3}(b + x)\sqrt{(ab + ax)}.$$

Quoniam in P, $x = 0$, & spatium quoque QNMP evanescit; si in integrali inventa ponatur $x = 0$, quod relinquitur, $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, ostendit quid ei adjiciendum vel demendum, ut spatium QNMP nihilum evadat in P, consequenter ut integrale fiat quadratura ipsius QNMP. Habemus nempe in nostro casu subtrahendum $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$: unde

unde ipsius QNMP area $=\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$.

II. Sit AQ constans, & $=b$, origo ipsius x in Q, erit QP $=x$, PM $=y$, AP $=b-x$ & (§. 388 *part.* 1)

$$ab-ax=y^2$$

$$\sqrt{(ab-ax)}=y$$

$$ydx=dx\sqrt{(ab-ax)}$$

Fiat ut ante $ab-ax=v^2$

erit $-adx=2vdv$

$$dx=-2vdv:a$$

$$ydx=-2v^2dv:a$$

$$\int ydx=-\tfrac{2}{3}v^3:a=-\tfrac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$$

Ut intelligatur quid integrali sit adjiciendum, quo spatii PMNQ mensuram constituat; ponatur ut ante $x=0$, relinquetur $-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. Unde manifestum est, si illi adjiciatur $+\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, haberi spatium PMNQ $=\frac{2}{3}b\sqrt{ab}-\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

SCHOLION.

108. *Spatium* PMNQ *esse in casu priore* $\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, *in posteriore* $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}-\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$ *etiam ex Problemate 26 (§. 103) manifestum est. Nimirum* PMNQ $=$ ANQ $-$ AMP. *Sed in casu priore* ANQ $=\frac{2}{3}$ AQ. QN $=\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}$, *&* AMP $=\frac{2}{3}$AP. PM $=\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. *Unde* PMNQ $=\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. *In posteriore* ANQ $=\frac{2}{3}$AQ. QN $=\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ *&* AMP $=\frac{2}{3}$ AP. PM $=\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$. *Unde* QNMP $=\frac{2}{3}b\sqrt{ab}-\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

COROLLARIUM.

109. Quodsi adeo curva non supponatur descripta, sed tantum æquatio ad eam detur, ut adeo non constet, ubi origo ipsius x sit statuenda; evidens est, ex resolutione Problematis præsentis, quod in integrali poni debeat $x=0$, &, deletis iis quæ per x multiplicantur, residuum, si quod fuerit, sub signo contrario ipsi sit adjiciendum, ut habeatur quadratura quæsita.

PROBLEMA XXIX.

110. *Quadrare curvam, ad quam* $xy^3=a^4$.

Quoniam

$$y=a^{4:3}x^{-1:3}$$

erit $ydx=a^{4:3}x^{-1:3}dx$

$$\int ydx=\tfrac{3}{2}a^{4:3}x^{2:3}=\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{a^4x^2}=\tfrac{3}{2}a\sqrt[3]{ax^2}.$$

PROBLEMA XXX.

111. *Quadrare curvam* CARTESII (d), *ad quam* $b^2:x^2=b-x:y$.

Quoniam $b^2y=bx^2-x^3$

erit $y=(bx^2-x^3):b^2$

$$ydx=(bx^2dx-x^3dx):b^2$$

$$\int ydx=x^3:3b-x^4:4b^2$$

PROBLEMA XXX.

112. *Quadrare curvam, ad quam* $x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^5=a^4y$.

Quoniam $y=x^5:a^4+x^4:a^3+x^3:a^2+x^2:a+a$

erit $ydx=\left(\frac{x^5}{a^4}+\frac{x^4}{a^3}+\frac{x^3}{a^2}+\frac{x^2}{a}+a\right)dx$

$$\int ydx=\frac{x^6}{6a^4}+\frac{x^5}{5a^3}+\frac{x^4}{4a^2}+\frac{x^3}{3a}+ax$$

PROBLEMA XXXI.

113. *Quadrare curvam, ad qu[am]* $y^2=x^4+a^2x^2$.

Quoniam $y=x\sqrt{(x^2+a^2)}$ [partly obscured]

erit $ydx=x\,dx\sqrt{(x^2+a^2)}$ [partly obscured]

 Ut

(d) [E]pist. Tom. III. pag. 219.

Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(x^2+a^2)}=v$$

erit $x^2+a^2=v^2$

$$2xdx=2vdv$$

$$xdx=vdv$$

$$xdx\sqrt{(a^2+x^2)}=v^2 dv$$

$\int ydx=\frac{1}{3}v^3=\frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)}$. Ponatur $x=0$, erit residuum $\frac{1}{3}a^2\sqrt{a^2}$ sive $\frac{1}{3}a^3$. Ergo quadratura curvæ $\frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)}-\frac{1}{3}a^3$ (§. 109).

PROBLEMA XXXII.

114. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2=x^3+ax^2$.

Quoniam $y=x\sqrt{(x+a)}$

erit $ydx=xdx\sqrt{(x+a)}$

Ut elementum integrabile evadat, fiat

$$\sqrt{(x+a)}=v$$

erit $x+a=v^2$ & $x=v^2-a$

$$dx=2vdv$$

$$ydx=2v^4 dv-2av^2 dv$$

$\int ydx=\frac{2}{5}v^5-\frac{2}{3}av^3=\frac{2}{5}(x+a)^2\sqrt{(x+a)}-\frac{2}{3}a(x+a)\sqrt{(x+a)}=(\frac{6}{15}(x^2+2ax+aa)-\frac{10}{15}(ax+aa))\sqrt{(x+a)}=(6x^2+2ax-4aa)\sqrt{(x+a)}:15$. Ponatur $x=0$; relinquetur $-\frac{4}{15}aa\sqrt{a}$. Area igitur curvæ $\frac{1}{15}\sqrt{(x+a)}(6x^2+2ax-4aa)+\frac{4}{15}aa\sqrt{a}$ (§. 109).

PROBLEMA XXXIII.

115. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2=x^2:(x+a)$.

Quoniam $y=x:\sqrt{(x+a)}$

erit $ydx=xdx:\sqrt{(a+x)}$

Ponatur $\sqrt{(x+a)}=v$

erit $x+a=v^2$

$$x=v^2-a$$

$$dx=2vdv$$

$xdx:\sqrt{(x+a)}=(2v^3dv-2avdv):v$
$=2v^2dv-2adv$

$\int ydx=\frac{2}{3}v^3-2av=\frac{2}{3}(x+a)\sqrt{(x+a)}-2a\sqrt{(x+a)}=(2x+2a-6a)\sqrt{(x+a)}:3=(2x-4a)\sqrt{(x+a)}:3=\frac{2}{3}\sqrt{(x^3-3ax^2+4a^3)}$. Reductio ad mere surdam necessaria, ut appareat, si fiat $x=0$, & termini quidam nullescant, quale residui esse debeat signum, propterea quod $x-2a$ signis afficitur diversis.

Ponatur $x=0$; relinquetur $\frac{2}{3}\sqrt{4a^3}=\frac{4}{3}a\sqrt{a}$. Area igitur curvæ $=\frac{2}{3}\sqrt{(x^3-3ax^2+4a^3)}-\frac{4}{3}a\sqrt{a}$ (§. 109) $=\frac{2}{3}(x-2a)\sqrt{(x+a)}-\frac{4}{3}a\sqrt{a}$.

PROBLEMA XXXIV.

116. *Quadrare omnes curvas, quæ comprehenduntur sub æquatione generali* $y=\sqrt[m]{(x+a)}$.

Quoniam $y=(x+a)^{1:m}$

erit $ydx=dx(x+a)^{1:m}$

Ut elementum integrabile fiat, ponatur

$$(x+a)^{1:m}=v$$

erit $x+a=v^m$

$$dx=mv^{m-1}dv$$

$$ydx=mv^m dv$$

$$\int ydx=\frac{mv^{m+1}}{m+1}=\frac{m}{m+1}(x+a)\sqrt[m]{(x+a)}.$$

Fiat $x=0$: erit residuum $\frac{m}{m+1}a\sqrt[m]{a}$.

Unde area curvæ $\frac{m}{m+1}(x+a)\sqrt[m]{(x+a)}-\frac{m}{m+1}a\sqrt[m]{a}$ (§. 109).

PRO-

PROBLEMA XXXV.

117. *Quadrare omnes curvas, quæ definiuntur hac æquatione generali* $y = ax^m : \sqrt{(b + cx^{m+1})}$.

Elementum harum curvarum $ydx = ax^m dx : \sqrt{(b + cx^{m+1})}$. Ut integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(b+cx^{m+1})} = v$$

$$\text{erit } b + cx^{m+1} = v^2$$

$$(m+1)cx^m dx = 2vdv$$

$$x^m dx = 2vdv : c(m+1)$$

$$ydx = 2adv : (m+1)c$$

$$\int ydx = 2av : (m+1)c$$

$= 2a\sqrt{(b+cx^{m+1})} : (m+1)c$.

Fiat $x = 0$, relinquetur $2a\sqrt{b} : (m+1)c$

Est igitur area $\frac{2a\sqrt{(b+cx^{m+1})} - 2a\sqrt{b}}{(m+1)c}$

PROBLEMA XXXVI.

118. *Quadrare innumeras Hyperbolas intra asymptotos.*

Pro infinitis Hyperbolis intra asymptotos $a^{m+n} = y^m x^n$.

Fiat $a = 1$

erit $1 = y^m x^n$

$$x^{-n} = y^m$$

$$x^{-n:m} = y$$

$$ydx = x^{-n:m} dx$$

$$\int ydx = \frac{m}{m-n} x^{-n:m+1} = \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{x^{m-n}}$$

$$= \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{x^m y^m} = \frac{m}{m-n} xy$$

Tab. I. Fig. 4. Si $m > n$; spatii interminati $\int$MPAS quadratura semper habetur: si $m < n$, ob valorem negativum reperitur quadratura spatii IMPK: si vero $m = n$, spatium neutrum quadratur. Sit enim $xy^2 = a^2$; erit $m = 2$, $n = 1$, adeoque $\int$MPAS $= 2xy$. Si $xy^4 = a^5$; erit $m = 4$, $n = 1$, adeoque $\int$MPAS $= \frac{4}{3}xy$. Tab. I. Fig. 4. Si $x^2 y = a^3$; theorema dat $a^3 : x = -xy$ seu xy pro spatio interminato IMPK. Si $x^4 y = a^5$; habetur $m = 1$, $n = 4$, adeoque $-\frac{1}{3}xy$, hoc est $\frac{1}{3}xy =$ IMPK. Sed si $xy = a^2$; erit $m = 1$, $n = 1$, adeoque $m : (m-n) = \frac{1}{0}$: est adeo numerator respectu denominatoris infinitus.

SCHOLION.

119. Johannes WALLISIUS (c) *spatium* $\int$APMS, *eo in casu, ubi valor negativus, vocavit* plusquam infinitum: *ostendit vero Celeberrimus* VARIGNONIUS (f), *Virum ceteroquin magno suo merito celebrem aliquid humani passum esse, consentiente summo* LEIBNITIO (g).

PROBLEMA XXXVII.

120. *Hyperbolam* Apollonianam *intra asymptotos quadrare*.

Quoniam ad Hyperbolam intra asymptotos (§. 490 *part.* I.) $a^2 = by + xy$, seu si fiat $a = b = 1$ (quod ponere licet, cum quantitatis b determinatio sit arbitraria, *vi* §. *cit.*)

$$1 = y + xy$$

$$\text{erit } 1 : (1+x) = y$$

hoc est divisione actu facta, (§. 45 *part.* I)

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 \text{ \&c.}$$

$$ydx = dx - xdx + x^2 dx - x^3 dx + x^4 dx - x^5 dx + x^6 dx : \text{\&c. in infinit.}$$

$$\int ydx = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{7}x^7 \text{ \&c. in infinit.}$$

(c) In *Arithmet. infinit.* Schol. Prop. 101. f. 40[illegible] & Prop. 104. fol. 409.

(f) *Memoires de l'Aca*[illegible] A. 1706. p. m. 15.

(g) In *A*[illegible] *rum*, A. 1712. p. 267. & seqq.

SCHOLION.

121. *Hanc quadraturam Hyperbolæ primus dedit Serierum infinitarum inventor* Nicolaus MERCATOR (h). *Cum autem seriem quæsivisset per divisionem; celeberrimi Geometræ* LEIBNITIUS *atque* NEWTONUS (i) *methodum hanc serierum infinitarum promoverunt, hic quidem eas eliciens per radicum extractiones, ille autem ex serie quadam præsupposita. Utriusque exempla in sequentibus occurrunt.*

PROBLEMA XXXVIII.

122. *Quadrare curvam, in qua* $x^2 y + y = 1$.

Quoniam $x^2 y + y = 1$

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

vel $$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$ydx = dx : (x^2 + 1)$$

vel $$= dx : (1 + x^2).$$

Resolvatur $1 : (x^2 + 1)$ per divisionem in seriem infinitam (§. 45 *part.* 1), reperietur

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} \text{ \&c.}$$

$$= x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} \text{ \&c.}$$

Quare

$$ydx = x^{-2}dx - x^{-4}dx + x^{-6}dx - x^{-8}dx \text{ \&c.}$$

adeoque

$$\int ydx = -x^{-1} + \tfrac{1}{3}x^{-3} - \tfrac{1}{5}x^{-5} + \tfrac{1}{7}x^{-7} \text{ \&c.}$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} \text{ \&c.}$$

Resolvatur similiter $1 : (1 + x^2)$ in seriem (§. *cit.*), reperietur

$$y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \text{ \&c.}$$

[illegible]oque

$$yd[illegible] = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx \text{ \&c.}$$

Quare $\int ydx = x -$ [illegible] $+ \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9$ &c.

Qu[illegible] exprimit aream,

(h) In *Logarithmotechnia*, [illegible] p. 31. & seqq.
(i) Vid. *Epistolæ* ipsorum apu[illegible] IUM vol. III. *Operum Mathematic.*

quia convergit, hoc est, termini continuo fiunt minores, ut in casu singulari tandem deveniatur ad particulam inassignabilem, etiamsi terminorum numerus sit finitus, series autem prior citius convergit posteriore; ideo utendum est serie prima, si x fuerit satis magna, secunda vero, si satis parva.

PROBLEMA XXXIX.

123. *Quadrare Hyperbolam* AMP.

Quoniam in Hyperbola $ay^2 = abx + bx^2$ (§. 459 *part.* 1.); $y = \sqrt{(ax + x^2)}\sqrt{b} : \sqrt{a}$, adeoque $ydx = dx\sqrt{(ax + x^2)}\sqrt{b} : \sqrt{a}$; consequenter $\int ydx = \sqrt{(b : a)} \int dx \sqrt{(ax + x^2)}$. Quoniam $\int dx\sqrt{(ax + x^2)}$ est area Hyperbolæ æquilateræ (§. 507 *part.* 1) hac data datur etiam area Hyperbolæ scalenæ. Quare ut elementum areæ Hyperbolæ æquilateræ integrabile reddatur, solvatur $\sqrt{(ax + x^2)}$ in seriem infinitam (§. 98 *part.* 1), erit in theoremate generali

$$m = 1,\ n = 2,\ P = ax$$

$$Q = x : a = a^{-1} x$$

$$P^{m:n} = a^{1:2} x^{1:2} = A.$$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2} a^{1:2} x^{1:2}.\ a^{-1} x$$

$$= \tfrac{1}{2} a^{-1:2} x^{3:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{2} a^{-1:2} x^{3:2}.\ a^{-1} x$$

$$= -\frac{1}{2.4} a^{-3:2} x^{5:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{3}{6}.-\frac{1}{2.4} a^{-3:2} x^{5:2}.a^{-1} x$$

$$= +\frac{1.3}{2.4.6} a^{-5:2} x^{7:2} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{5}{8}.\frac{1.3}{2.4.6} a^{-5:2} x^{7:2}.\ a^{-1} x$$

$$= -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} a^{-7:2} x^{9:2} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\tfrac{7}{10}.-\frac{1.3.5}{2.4.6.8} a^{-7:2} x^{9:2} a^{-1} x$$

$$= +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} a^{-9:2} x^{11:2} \text{ \&c.}$$

Est

Eſt itaque

$y = a^{1:2} x^{1:2} + \frac{1}{2} a^{-1:2} x^{3:2} - \frac{1}{2.4} a^{-3:2} x^{5:2} + \frac{1.3}{2.4.6} a^{-5:2} x^{7.2} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} a^{-7:2} x^{9:2}$ + &c. in infinit.

$ydx = a^{1:2} x^{1:2} dx + \frac{1}{2} a^{-1:2} x^{3:2} dx - \frac{1}{2.4} a^{-3:2} x^{5:2} dx + \frac{1.3}{2.4.6} a^{-5:2} x^{7:2} dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} a^{-7:2} x^{9:2} dx$ &c. in infinit.

adeoque

$\int y dx = \frac{2}{3} a^{1:2} x^{3:2} + \frac{1}{5} a^{-1:2} x^{5:2} - \frac{1}{4.7} a^{-3:2} x^{7:2} + \frac{1.3}{4.6.9} a^{-5:2} x^{9:2} - \frac{1.3.5}{4.6.8.11} a^{-7:2} x^{11:2} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10.13} a^{-9:2} x^{13:2}$

&c.

Quoniam $a^{1:2} x^{1:2} = \sqrt{ax}$, erit

$\int y dx = \sqrt{ax} \left(\frac{3}{2} x + \frac{x^2}{5a} - \frac{x^3}{4.7a^2} + \frac{1.3.x^4}{4.6.9a^3} - \frac{1.3.5x^5}{4.6.8.11a^4} + \frac{1.3.5.7x^6}{4.6.8.10.13a^5} \right.$ &c. in infin.)

PROBLEMA XL.

124. *Circulum quadrare.*

Tab.I. Fig.2. Sit AB $= 1$, AP $= x$, PM $= y$; erit (§. 377 *part.* 1.)

$y = \sqrt{(x - xx)}$

$ydx = dx \sqrt{(x - xx)} = dx (x - xx)^{1:2}$

Ut elementum integrabile reddatur, ex $x - xx$ extrahatur radix per Theorema generale (§. 98 *part.* 1), in quo erit

$m = 1, n = 2, P = x, Q = -xx : x = -x$

$P^{m:n} = x^{1:2} = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} x^{1:2} . - x = - \frac{1}{2} x^{3:2} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = - \frac{1}{4} . - \frac{1}{2} x^{3:2} . - x = - \frac{1}{2.4} x^{5:2} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = - \frac{3}{6} . - \frac{1}{2.4} x^{5:2} . - x = - \frac{1.3.x^{7:2}}{2.4.6} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = - \frac{5}{8} . - \frac{1.3}{2.4.6} x^{7:2} . - x = - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} x^{9:2} = E$

$\frac{m-4n}{5n} EQ = - \frac{7}{10} . - \frac{1.3.5.}{2.4.6.8} x^{9:2} . - x = - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} x^{11:2}$ &c. in infin.

Habemus adeo $ydx = x^{1:2} dx - \frac{1}{2} x^{3:2} dx - \frac{1}{2.4} x^{5:2} dx - \frac{1.3}{2.4.6} x^{7:2} dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} x^{9:2} dx - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} x^{11:2} dx$ &c. in infin.

Hinc $\int y dx = \frac{2}{3} x^{3:2} - \frac{1}{5} x^{5:2} - \frac{1}{4.7} x^{7:2} - \frac{1.3}{4.6.9} x^{9:2} - \frac{1.3.5}{4.6.8.11} x^{11:2}$ &c. in infin. $= \sqrt{x} \left(\frac{2}{3} x - \frac{1}{5} x^2 - \frac{1}{4.7} x^3 - \frac{1.3}{4.6.9} x^4 - \frac{1.3.5}{4.6.8.11} x^5 - \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10.13} x^7 \right.$ &c. in infinit. $) = \sqrt{x} \left(\frac{2}{3} x - \frac{1}{5} x^2 - \frac{1}{28} x^3 - \frac{1}{72} x^4 - \frac{5}{704} x^5 - \frac{7}{1664} x^2 \right.$ &c. in infin.)

Hæc nempe ſeries exhibet quadraturam indeterminatam ſegmenti AMP.

Aliter.

Quoniam ſi radius Circuli $= 1$, CP $= x$, PM $= y$ (§. 377 *part.* 1.) $y = \sqrt{(1 - x^2)}$ & $\sqrt{(1 - x^2)} = 1 - \frac{1}{2} x^2$ [illegible] $- \frac{1}{16} x^6 - \frac{5}{128} x^8 - \frac{7}{256} x^{10}$ &c. in infinit. erit (§. 98 *part.* 1.) Tab.I. Fig. 3

$ydx = dx - \frac{1}{2} x^2 dx - \frac{1}{8} x^4 dx - \frac{1}{16} x^6 dx - \frac{5}{128} x^8 dx - \frac{7}{256} x^{10} dx -$ & in infin.

$\int y dx = x - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{40} x^5 - \frac{1}{112} x^7 - \frac{5}{1152} x^9 - \frac{7}{2816} x^{11}$ &c. in infinit.

Quando x radio CA æqualis evadit, ſpatium DCPM degenerat in quadrantem. Subſtituta itaque 1 pro x; erit quadrans $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} -$ [illegible] &c. in infinit., quæ [illegible] ſeries integram Circuli aream [illegible] ter fuerit 1.

Quodſi

Quodsi progressum in infinitum perspicere lubet, multiplicatio ut ante tantummodo indicanda, dum $\sqrt{(1-x^2)}$ in seriem resolvitur.

Ita nimirum prodibit $y = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2.4}x^4$
$- \frac{1.3}{2.4.6}x^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^8 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{10}$
&c. in infinit.

$$ydx = dx - \tfrac{1}{2}x^2dx - \frac{1}{2.4}x^4dx - \frac{1.3}{2.4.6}x^6dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^8dx - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{10}dx$$
&c.

$$\int ydx = x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{1}{2.4.5}x^5 - \frac{1.3}{2.4.6.7}x^7 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10.11}x^{11}$$
&c. in infin.

Dicatur terminus primus A, secundus B, tertius C, quartus D, quintus E &c. erit

$A = x$

$B = -\frac{1}{2.3}x^3 = -\frac{1.1}{2.3}Ax^2$

$C = -\frac{1}{2.4.5}x^5 = -\frac{1.3}{2.3.4.5}x^5 = -\frac{1.3}{4.5}Bx^2$

$D = -\frac{1.3}{2.4.6.7}x^7 = -\frac{1.3.3.5}{2.3.4.5.6.7}x^7 = -\frac{3.5}{6.7}Cx^2$

$E = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 = \frac{1.3.5.3.5.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^9 = -\frac{5.7}{8.9}Dx^2$

&c. *Aliter.*

Tab. II. Fig. 20. Sit tangens arcus dimidii GB $= x$, radius BC $= 1$; erit tangens integri seu dupli KB $= 2x:(1-xx)$ (§. 327 *part.* 1) & (§. 269 *Geo*[m.])

BG : KG : KC

$x : 1 = \frac{x^2+1}{1-xx} : \frac{1+x^2}{1-xx}$ [illegible]

Est enim KG $= 2x:(1-xx) - x = (2x - x + x^3):(1-xx) = (x+x^3):(1-xx)$

Porro (§. 268 *Geom.*)

KC : KB = MC : PM

$\frac{1+x^2}{1-x^2} : \frac{2x}{1-x^2} = 1 : \frac{2x}{1+x^2}$

KC : BC = MC : PC

$\frac{1+x^2}{1-x^2} : 1 = 1 : \frac{1-x^2}{1+x^2}$

Unde PB $= 1 - (1-x^2):(1+x^2) = (1+x^2-1+x^2):(1+x^2) = 2x^2:(1+x^2)$. Hinc differentiando eruitur Pp = MR $= (4xdx + 4x^3dx - 4x^3dx):(1+x^2)^2 = 4xdx:(1+x^2)^2$, & mR $= (2dx + 2x^2dx - 4x^2dx):(1+x^2)^2 = (2dx - 2x^2dx):(1+x^2)^2$. Ob MR^2 + mR^2 = Mm^2 (§. 417 *Geom.*) habetur Mm^2 $= 16x^2dx^2:(1+x^2)^4 + (4dx^2 - 8x^2dx^2 + 4x^4dx^2):(1+x^2)^4 = (4dx^2 + 8x^2dx^2 + 4x^4dx^2):(1+x^2)^4$, & M$m$ $= (2dx + 2x^2dx):(1+x^2)^2 = 2dx:(1+x^2)$. Denique M$m$. $\frac{1}{2}$MC $= dx:(1+x^2)$. Ut sector hic infinite parvus MCm, seu elementum sectoris BCM, cujus dimidii tangens x, summetur; resolvi debet $1:(1+x^2)$ in seriem (§. 45 *part.* 1): quo facto reperitur $dx:(1+x^2) = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c. adeoque $\int dx:(1+x^2) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. quæ series exprimit sectorem BCM, ita ut arcus dimidii tangens GB $= x$.

Quando arcus integer BM in quadrantem degenerat; tangens dimidii BG fit radio æqualis (§. 32 *Trig.*). Si ergo pro x substituatur 1, series $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinit. quadrantem Circuli exprimit. Immo totam aream emetitur, si 1 denotet diametrum Circuli.

Brevius.

Brevius.

Tab.II. Fig.20. Sit tangens KB $= x$, BC $= 1$ & secans CA alteri CK infinite propinqua, ductusque arculus KL radio CK; erit AK $= dx$, KC $= \sqrt{(1 + x^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Jam cum anguli ad B & L sint recti (§. 38); & ob angulum infinite parvum KCL angulus BKC = KAC (§. 239 *Geom.* & §. 3 *Analyſ. infinit.*); erit (§. 267 *Geom.*)

$$KC : BC = KA : KL$$

$$\sqrt{(1 + x^2)} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)}}$$

Porro (§. 137, 412 *Geom.*)

$$CK : KL = CM : mM$$

$$\sqrt{(1 + x^2)} : \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)}} = 1 : \frac{dx}{1 + x^2}$$

Sector igitur $CMm = \frac{1}{2}dx : (1 + x^2) = \frac{1}{2}(dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c.). Unde per summationem eruitur sector BCM, cujus tangens KB $= x$, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{18}x^9 - \frac{1}{22}x^{11}$ &c. in infinit. adeoque si BM octans Circuli, seu arcus 45°, sector erit (§. 32 *Trigon.*) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{18} - \frac{1}{22}$ &c. in infinit. Hujus adeo seriei duplum $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinitum est quadrans Circuli, immo integra area si diameter $= 1$.

SCHOLION.

125. *Seriem primam invenit* NEWTONUS, *alteram* Jacobus GREGORIUS, *& in eandem incidit* LEIBNITIUS *ignorans, dubio procul, prodituram seriem* Gregorianam, *cum ex tangente quæreret aream. Neque enim putandum est, quod inventum seriei, quam* GREGORIO *repertam non ignorabat, etsi publice non constaret, sibi attribuerit absque ulla ratione Vir probati alias candoris. Sed nullum est dubium quin ingeniosissimus* LEIBNITIUS *methodo ab iis diversa, quas ego proposui, ad suam pervenerit. Cum enim methodum priorem, in quam incideram ante annos complures, amico percontanti, unde constet, (quod* LEIBNITIUS *in* Actis Eruditorum *asseruerat)* $\int(dx : (1 + x^2))$ *dependere a quadratura circuli, &* *quomodo inde eruatur series* Leibnitiana *pro circulo* $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ &c. *responsurus, judicio* LEIBNITII *submisissem, eam equidem non improbavit, monuit tamen, totum negotium brevius absolvi posse: unde etiam factum est, ut postea de breviori cogitarem.*

PROBLEMA XL.

126. *Ellipsin* Apollonianam *quadrare.* Tab.I. Fig.10.

Sit AC $= a$, GC $= c$, PC $= x$; erit (§. 432 *part.* 1)

$$y^2 = c^2 (a^2 - x^2) : a^2$$

$$y = c\sqrt{(a^2 - x^2)} : a$$

Est vero $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$ &c. in infin. (§. 98 *part.* 1.). Ergo $ydx = cdx - \frac{cx^2dx}{2a^2} - \frac{cx^4dx}{8a^4} - \frac{cx^6dx}{16a^6} - \frac{5cx^8dx}{128a^8} - \frac{7cx^{10}dx}{256a^{10}}$ &c. in infinit. consequenter $\int ydx = cx - \frac{cx^3}{6a^2} - \frac{cx^5}{40a^4} - \frac{cx^7}{112a^6} - \frac{5cx^9}{1152a^8} - \frac{7cx^{11}}{2816a^{10}}$ &c. in infinit.

Quodsi pro x ponatur a; erit quadrans Ellipsis $ac - \frac{1}{6}ac - \frac{1}{40}ac - \frac{1}{112}ac - \frac{5}{1152}ac - \frac{7}{2816}ac$ &c. in infinitum: quæ eadem series [illegible] Ellipsis aream exhibet, [illegible] denotet.

Aliter.

Tab.II. *Fig.*23. Quoniam elementum Ellipſeos eſt $cdx\sqrt{(a^2-x^2)}:a$; erit ECLR$=\frac{c}{a}\int(dx\sqrt{(a^2-x^2)})$. Sed $\int(dx\sqrt{(a^2-x^2)})=$ DCLK (§. 124). Eſt itaque $a:c=$ DCLK : ECLR, hoc eſt, area circularis DCLK eſt ad Ellipticam ECLR ut axis major AB (qui eſt diameter circuli) ad minorem 2CE (§. 124 *part.* 1). Pendet adeo quadratura Ellipſeos a quadratura Circuli.

COROLLARIUM I.

127. Si fiat $\sqrt{ac}=1$, erit area Ellipſis $=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{40}-\frac{1}{112}-\frac{5}{1152}-\frac{7}{2816}$ &c. in infinitum. Patet adeo Ellipſin eſſe circulo æqualem, cujus diameter eſt media proportionalis inter axes Ellipſis conjugatos (§. 124).

COROLLARIUM II.

128. Eſt ergo Ellipſis ad circulum, cujus diameter axi majori æqualis, ut ac ad a^2 (§. 408 *Geom.*), hoc eſt, ut c ad a (§. 124 *part.* 1), ſeu ut axis minor ad majorem: quod idem de ſegmentis indefinitis oſtendimus [illegible] in reſolutione.

COROLLARIUM III.

129. Data Circuli quadratura, dabitur etiam quadratura Ellipſis, & contra.

SCHOLION.

130. *Quamvis Circuli integri quadratura finita hactenus dari non potuerit, varias tamen ejus portiones quadrarunt Geometræ. Primam quadraturam partialem alicujus lunulæ dedit jam olim* HIPPOCRATES Chius, *ex mercatore naufrago Geometra factus. Sit* AEB *ſe[illegible]rculus &* GC = BG. *Deſcribatur radio* BC *quadrans* AFB; *erit* AEBFA Lunula HIPPOCRATIS. *Quoniam* $BC^2=2GB^2$ (§. 417 *Geom.*); *erit quad[illegible]s* AFBC *ſemicirculo* AEB *æqualis* [illegible]). *Ablato igitur utrin[illegible] ſegmento commun[illegible]A; erit* AEBFA $=\triangle$ ACB $=GB^2$.

Tab. [illegible] Fig. 21.

PROBLEMA XLII.

131. *Cycloidem quadrare.*

Quoniam TP=PM (§ 52): erunt in Tab. [illegible] Fig. [illegible] △PMΓ anguli M & Γ æquales (§. 184 *Geom.*), adeoque TPQ=2M (§. 239 *Geom.*). Eſt vero anguli APQ menſura arcus dimidius AP (§. 291, & 314 *Geom.*) & idem metitur angulum TPA (§. 322 *Geom.*). Ergo APQ=TPA (§. 142 *Geom.*). Sed TPQ=TPA+APQ =2APQ=2TMP, per *demonſtrata.* Ergo APQ=TMP=MmS, ob parallelas MP & mq (§. 233 *Geom.*). Quamobrem, cum ad S & Q ſint recti, *per conſtr.*; erit (§. 267 *Geom.*)

AQ : QP = MS : Sm

Sit jam AQ$=x$, AB$=1$, erit MS $=dx$, PQ$=\sqrt{(x-xx)}$ (§. 377 *part.* 1.) & $mS=dx\sqrt{(x-xx)}:x$. Reperimus autem ſupra (§. 124) $\sqrt{(x-xx)}=x^{1:2}-\frac{1}{2}x^{3:2}-\frac{1}{8}x^{5:2}-\frac{1}{16}x^{7:2}$ &c. in infinitum. Ergo $dx\sqrt{(x-xx)}:x=$ (quoniam ob diviſionem per x factam numeratores exponentium duabus unitatibus minuuntur, §. 54 *part.* 1) $x^{-1:2}dx-\frac{1}{2}x^{1:2}dx-\frac{1}{8}x^{3:2}dx-\frac{1}{16}x^{5:2}dx$ &c. in infinitum, cujus ſumma $2x^{1:2}-\frac{1}{3}x^{3:2}-\frac{1}{20}x^{5:2}-\frac{1}{56}x^{7:2}$ &c. in infinitum, eſt ſemiordinata Cycloidis QM ad axem AB relatæ. Hinc QM.dx, ſeu elementum QMSq ſpatii cycloidici AMQ$=2x^{1:2}dx-\frac{1}{3}x^{3:2}dx-\frac{1}{20}x^{5:2}dx-\frac{1}{56}x^{7:2}dx$ &c. in infinitum: cujus ſumma$=\frac{4}{3}x^{3:2}-\frac{2}{15}x^{5:2}-\frac{1}{70}x^{7:2}-\frac{1}{252}x^{9:2}$ &c. in infinit. exprimit ſegmentum Cycloidis AMQ.

Quodſi $mS=gG=dx\sqrt{(x-xx)}:x$ ducatur in GM$=$AQ$=x$, reperietur elementum GMHg areæ AMG$=dx\sqrt{(x-xx)}$: quod cum idem ſit cum elemen-

mento fegmenti circuli APQ (§. 124), erit fpatium AMG fegmento circuli APQ; confequenter area ADC femicirculo APB æqualis.

COROLLARIUM.

132. Quoniam CB femiperipheriæ circuli æquatur (§. 574 *part.* 1.) fi ea $= p$ & AB $= a$; erit rectangulum BCDA $= ap$ (§. 375 *Geom.*), & femicirculus APB, adeoque & fpatium cycloidicum externum ADC$=\frac{1}{4}ap$ (§. 429 *Geom.*). Ergo area femicycloidis ACB $=\frac{3}{4}ap$ & AMCBPA $=\frac{1}{2}ap$; confequenter area Cycloidis eft circuli genitoris tripla.

PROBLEMA XLIII.

133. *Ciffoidem* DIOCLIS *quadrare.*

Quoniam $y^2 = x^3 : (1-x)$, fi 1 diameter circuli genitoris (§. 548 *part.* 1.); erit

$$y = x\sqrt{x} : \sqrt{(1-x)} = x^{3:2}(1-x)^{-1:2}$$

Extrahatur ergo ex $1 : \sqrt{(1-x)}$ actu radix, per Theorema generale (§. 98 *part.* 1) in quo erit $m = -1$, $n = 2$, P $= 1$, Q $= -x$ & hinc

$$P^{m:n} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = -\tfrac{1}{2}.1. - x = \tfrac{1}{2}x = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{3}{4}.\frac{1x}{2}. - x = \frac{1.3x^2}{2.4} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{5}{6}.\frac{1.3x^2}{2.4}. - x = \frac{1.3.5x^3}{2.4.6} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{7}{8}.\frac{1.3.5x^3}{2.4.6}. - x = \frac{1.3.5.7x^4}{2.4.6.8}$$

&c. in infinitum.

Unde $ydx = x^{3:2}(1-x)^{-1:2}dx = x^{3:2}dx + \frac{1}{2}x^{5:2}dx + \frac{1.3}{2.4}x^{7:2}dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{9:2}dx + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{11:2}dx$ &c. cujus fumma $\frac{2}{5}x^{5:2} + \frac{1}{7}x^{7:2} + \frac{1.3}{4.9}x^{9:2} + \frac{1.3.5}{4.6.11}x^{11:2} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.13}x^{13:2}$ &c. in infinitum $= \sqrt{x}\left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{7}x^3 + \frac{1.3}{4.9}x^4 + \frac{1.3.5}{4.6.11.}x^5 + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.13}x^6\right.$ &c. in infinitum$\left.\right)$ exprimit fpatium APM.

Aliter.

Sit AP$=x$, PN$=v$, PM$=y$, AB$=a$; erit (§. 548 *part.* 1)

Tab. II. Fig. 22.

$$ay^2 - xy^2 = x^3$$

$$2aydy - 2xydy - y^2dx = 3x^2dx$$

$$2(a-x)dy - ydx = 3x^2dx : y$$

Quoniam (§. 547 *part.* 1) $x^2 = vy$; erit $x^2 : y = v$. Fiat præterea $a - x$ $=$ PB $= z$: habebimus

$$2zdy - ydx = 3vdx$$

$$2\int zdy - \int ydx = 3\int vdx$$

Eft vero vdx elementum circuli PNnp; $\int zdy$, ob $z =$ PB $=$ OM & $dy = m$R $= o$O, elementum mMOo areæ AMOB & ydx elementum PMmp areæ AMP. Jam quando $\int zdy$ integram aream intra Ciffoidem AI & ejus afymptotum BH exhibet, etiam $\int ydx$ eft eadem area, adeoque $\int ydx = \int zdy$; confequenter $2\int zdy - \int ydx = \int zdy$. Quare cum in eodem cafu $\int vdx$ femicirculum producat ANB; erit, ob $\int zdy = 3\int vdx$, totum fpatium ciffoidale in infinitum protenfum femicirculi genitoris ANB triplum.

PROBLEMA XLIV.

134. *Quadrare Logifticam, feu Logarithmicam.*

Sit fubtangens PT $= a$ (§. 547), PM $= y$, P$p = dx$; erit (§. *cit.*)

Tab. I. Fig. [illegible]

$$ydx : dy = a$$

$$ydx = ady$$

$$\int ydx = ay$$

Spa-

Tab. I. Fig. 8. Spatium ergo interminatum HPMI æquatur rectangulo ex PM in PT.

COROLLARIUM I.

135. Sit QS $= z$; erit spatium interminatum ISQH $= az$, consequenter SMPQ $= ay - az = a\ (y - z)$, hoc est, spatium inter duas Logisticæ semiordinatas interceptum æquatur rectangulo ex subtangente in differentiam semiordinatarum.

COROLLARIUM II.

136. Est itaque spatium BAPM ad spatium PMSQ ut differentia semiordinatarum AB & PM ad differentiam semiordinatarum PM & SQ (*§. præc.* & §. 124 *part.* 1).

PROBLEMA XLV.

137. *Quadrare Spirales.*

Tab. 7. Fig. .. Sint omnia ut in Problemate 8 (§. 50); erit arculus EG $= ydx : a$, qui ductus in $\frac{1}{2}$ AG producit sectorem infinite parvum GAE $= y^2 dx : 2a$ (§. 435 *Geom.*). Est autem pro Spirali *Archimedea*,

$$by = ax$$

$$y^2 = a^2 x^2 : b^2$$

$$y^2 dx : 2a = ax^2 dx : 2b^2$$

$$\int y^2 dx : 2a = ax^3 : 6b^2$$

Quodsi pro arcu x ponatur integra peripheria b; erit spatium spirale integrum $\frac{1}{6} ab$. Similiter pro infinitis Spiralibus ad circulum relatis (§. 572 *part.* 1).

$$b^n y^m = a^m x^n$$

$$y^m = a^m x^n : b^n$$

$$y = ax^{n:m} : b^{n:m}$$

$$y^2 = a^2 x^{2n:m} : b^{2n:m}$$

y^2 [illegible] $= ax^{2n:m} dx : 2b^{2n:m}$

[illegible] mento commun [illegible]

$\int y^2 dx : 2a = max^{(2n+m}$ [illegible] $(4n+2m) b^{2n:m}$

Quare si pro x ponatur integra peripheria circuli b, prodibit pro spatiis spiralibus integris $mab^{2n:m+1} : (4n+2m)\, b^{2n:m} = mab : (4n+2m)$.

Quodsi ponamus arcum BC esse ad CF ut abscissa ad semiordinatam in curva aliqua algebraica, eodem modo reperitur spatium spirale. Sit enim ex. gr. BC ad CF ut abscissa Parabolæ ad semiordinatam, erit (sumto r pro parametro)

$$rx = a^2 - 2ay + yy$$

$$dx = (2ydy - 2ady) : r$$

$$y^2 dx : 2a = (y^3 dy - ay^2 dy) : ar$$

$$\int y^2 dx : 2a = y^4 : 4ar - y^3 : 3r$$

Nec absimili modo invenitur spatium inter arcum BC & Spiralem BF comprehensum, cujus elementum est trapezium CFID $= (CD + FI)\ \frac{1}{2}$ FC (§. 400 *Geom.*). Est vero CD $= dx$, FI $= ydx : a$, FC $= a - y$, adeoque CFID $= (dx + ydx : a)\ (\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} y) = (a^2 dx - y^2 dx) : 2a$.

Si jam Spiralis sit parabolica, pro dx substituatur valor ipsius $(2ydy - 2ady) : r$, erit elementum speciale $(ay^2 dy + a^2 ydy - y^3 dy - a^3 dy) : ar$, cujus summa, $y^3 : 3r + ay^2 : 2r - y^4 : 4ar - a^2 y : r$, est spatium quæsitum BFC.

PROBLEMA XLVI.

138. *Quadrare Conchoidem* NICOMEDIS.

Sit AP $= x$, PM $= y$, BC $= b$, AB $= a$ & OQ ad PM perpendicularis: erit PB $=$ OQ $= a - x$, PC $= a + b - x$. Quoniam OQ & BA perpendiculares ad PM, *per hypoth.* erunt inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*), consequenter (§. 268 *Geom.*),

PC:

b.I. ig 5.

$$PC : PM = OQ : OM$$

$$a+b-x : y = a-x : OM$$

& hinc $OM = y(a-x) : (a+b-x)$ adeoque $OM^2 = y^2 (a-x)^2 : (a+b-x)^2$. Porro $OQ^2 = (a-x)^2$, & $QM^2 = AB^2$ (§. 535 *part.* 1) $= a^2$. Quare (§. 417 *Geom.*)

$$a^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \frac{y^2 (a-x)^2}{(a+b-x)^2}$$

$$2ax - x^2 = y^2 (a-x)^2 : (a+b-x)^2$$

$$\sqrt{(2ax - x^2)} = y(a-x) : (a+b-x)$$

$$y = \frac{a+b-x}{a-x} \sqrt{(2ax - x^2)}$$

Habemus itaque elementum areæ $PpmM = ydx = \frac{a+b-x}{a-x} dx \sqrt{(2ax-x^2)}$ nec alia re opus eſt, quam ut $\sqrt{(2ax-x^2)}$ reſolvatur in ſeriem (§. 98 *part.* 1.), ſeries hæc porro ducatur in $a+b-x$ & factum tandem dividatur per $a-x$. Ita enim obtinetur ſeries, quæ ſingulis terminis in dx ductis exprimit elementum areæ atque eodem, quo ante, modo ſummatur. Ne calculus perplexus tyrones turbet, ſumamus caſum ſimpliciſſimum, in quo eſt $b = a$, adeoque $a+b = 2a$, & ne $\sqrt{2}$ toties ſit ſcribenda, ponamus $2a = c$, ut ſit $a = \frac{1}{2}c$: erit $ydx = \frac{c-x}{\frac{1}{2}c - x} dx \sqrt{(cx - x^2)}$. Eſt autem $\sqrt{(cx - x^2)}$ ſemiordinata circuli, cujus diameter c, atque adeo coincidit reſolutio in ſeriem cum ea, quam dedimus paulo ante (§. 124), niſi quod ibidem ſuppoſuerimus $c = 1$. Quoniam tamen hic conſultius eſt c retineri & in reſolutione, in gratiam operationum ſequentium, quædam notanda ſunt; ideo non inconſultum ducimus, vi Theorematis *Newtoniani* (§. 99 *part.* 1) reſolutionem ipſam inſtituere. Erit itaque

$$m = 1,\ n = 2,\ P = cx,$$

$Q = -x^2 : cx = -x : c = -c^{-1}x$ (§. 54, 55 *part.* 1), adeoque

$$P^{m:n} = c^{1:2} x^{1:2} = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2} c^{1:2} x^{1:2}. -c^{-1}x = -\tfrac{1}{2} c^{-1:2} x^{3:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{4}. -\tfrac{1}{2} c^{-1:2} x^{3:2}. -c^{-1}x = -\tfrac{1}{8} c^{-3:2} x^{5:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{3}{6}. -\tfrac{1}{8} c^{-3:2} x^{5:2}. -c^{-1}x = -\tfrac{1}{16} c^{-5:2} x^{7:2} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{5}{8}. -\tfrac{1}{16} c^{-5:2} x^{7:2}. -c^{-1}x = -\tfrac{5}{128} c^{-7:2} x^{9:2},\ \&c.$$

Eſt itaque $\sqrt{(cx - x^2)} = c^{1:2} x^{1:2} - \frac{1}{2} c^{-1:2} x^{3:2} - \frac{1}{8} c^{-3:2} x^{5:2} - \frac{1}{16} c^{-5:2} x^{7:2} - \frac{5}{128} c^{-7:2} x^{9:2}$ &c. in infinitum.

Quodſi hanc ſeriem multiplices per $c-x$, & porro dividas per $\frac{1}{2}c - x$, prodibit $(c-x)\sqrt{(cx - x^2)} : (\frac{1}{2}c - x) = 2c^{1:2} x^{1:2} + c^{-1:2} x^{3:2} + \frac{11}{4} c^{-3:2} x^{5:2} + \frac{45}{8} c^{-5:2} x^{7:2} + \frac{723}{64} c^{-7:2} x^{9:2}$ &c. in infinitum.

Multiplicatio & diviſio modo ordinario inſtituitur. Etenim ſi ſeriem multiplices per c, prodit $c^{3:2} x^{1:2} - \frac{1}{2} c^{1:2} x^{3:2} - \frac{1}{8} c^{-1:2} x^{5:2} - \frac{1}{16} c^{-3:2} x^{7:2} - \frac{5}{128} c^{-5:2} x^{9:2}$ &c. in infinit. Si porro eandem ducas in $-x$, prodit $-c^{1:2} x^{3:2} + \frac{1}{2} c^{-1:2} x^{5:2} + \frac{1}{8} c^{-3:2} x^{7:2} + \frac{1}{16} c^{-5:2} x^{9:2}$ &c. Quodſi terminos homogeneos in unam ſummam colligas, obtinetur ſeries c $x^{1:2} - \frac{3}{2} c^{1:2} x^{3:2} + \frac{5}{8} c^{-1:2} x^{5:2} + \frac{1}{16} c^{-3:2} x$ [illegible] $+ \frac{3}{128} c^{-5:2} x^{9:2}$ &c. Hac porro diviſa per $\frac{1}{2}c - x$ (§. 40 *par*[illegible]) prodit quotus $2c^{1:2} x^{1:2} + c$ [illegible] $+ \frac{45}{8} c$ [illegible] $\frac{723}{64} c^{-7:2} x^{9:2}$ &c.

 E[illegible]

Tab. I. Fig. 5. Est adeo elementum areæ Conchoidis $2c^{-1:2} x^{1:2} dx + c^{-1:2} x^{3:2} dx + \frac{11}{4} c^{-3:2} x^{5:2} dx + \frac{45}{8} c^{-5:2} x^{7:2} dx + \frac{723}{64} c^{-7:2} x^{9:2} dx$ &c. in infinit. Quare area AMP $= \frac{4}{3} c^{1:2} x^{3:2} + \frac{2}{5} c^{-1:2} x^{5:2} + \frac{11}{14} c^{-3:2} x^{7:2} + \frac{5}{4} c^{-5:2} x^{9:2} + \frac{723}{352} c^{-7:2} x^{11:2}$ &c. in infin.

PROBLEMA XLVII.

139. *Invenire rationem, quam habent spatia curvilinea juxta axem eundem vel axes æquales descripta, semiordinatis correspondentibus rationem constantem habentibus.*

Sit elementum spatii curvilinei unius $= ydx$. Quoniam ordinatæ ad æquales partes axis continuo applicantur, *per hypoth.* erit elementum spatii alterius zdx, posita nempe semiordinata hujus z, abscissa communi x. Sed cum in singulis elementis eadem semper sit ratio ipsius y ad z, *per hypoth.* erit $\int ydx : \int zdx = ydx : zdx$ (§. 187 *Arithm.*) $= y : z$ (§. 181. *Arithm.*).

Theorema. Spatia curvilinea æque alta habent rationem basium, quibus insistunt, si semiordinatæ correspondentes fuerint in ratione constante.

COROLLARIUM I.

140. Quare si ARB fuerit semiellipsis; AKB semicirculus & KL ad AB perpendicularis; erit KL ad RL in ratione constante DC ad EC (§. 599 *part.* 1.), adeoque segmentum circulare BKL ad segmentum ellipticum BRL ut KL ad RL. Ta[b.] [I]I. Fig.

COROLLARIUM II.

141. Quodsi ex foco F ducantur rectæ FR & FK, erunt quoque triangula FKL & FRL ut KL ad RL (§. 389 *Geom.*). Quamobrem sector circularis BFK est ad sectorem ellipticum BFR ut KL ad RL (§. 187 *Arithm.*). Cum itaque KL : RL = CD : CE (§. 599 *part.* 1.) & ut CD ad CE ita Circulus integer ad Ellipsin integram (§. 128); erit quoque sector KFB ad sectorem RFB ut Circulus ad Ellipsin (§. 167. *Arithm.*), consequenter ut sector KFB ad aream integri Circuli, ita sector RFB ad integram Ellipsis aream (§. 173 *Arithm.*).

SCHOLION.

142. *Quoniam sectores ex arcuum elementis derivantur; de iis quadrandis agemus Capite sequente, ubi arcuum rectificatio docetur.*

CAPUT III.

De usu Calculi integralis in Rectificatione Curvarum.

DEFINITIO VII.

143. R*Ectificatio curvæ* est inventio rectæ, cui æqualis est linea curva.

[illegible] RIUM.

144. Cum linea curva c[illegible] constare ex innumeris lineolis rectis infinite exiguis; si una earum inveniatur per calculum differentialem, summa dabit longitudinem curvæ. Nimirum cum ex superioribus constet, esse MR $= dx$, mR $= dy$ (§. 20); erit Mm seu elementum curvæ $\surd(dx^2 + dy^2)$ (§. 417 *Geom.*). Quodsi itaque ex æquatione differentiali ad curvam specialem substituatur Tab. Fig.

ſtituatur valor vel ipſius dx^2, vel ipſius dy^2; habetur elementum ſpeciale: quod integratum prodit longitudinem curvæ.

S C H O L I O N.

145. *Interdum elementum curvæ commodius ex circumſtantiis ſpecialibus eruitur, prout exempla mox afferenda loquentur.*

P R O B L E M A XLVIII.

146. *Parabolam rectificare*,

Pro Parabola $adx = 2ydy$ (§. 21)

$$a^2 dx^2 = 4y^2 dy^2$$

$$dx^2 = 4y^2 dy^2 : a^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dy^2 + 4y^2dy^2 : a^2)}$$
$$= dy\sqrt{(aa + 4yy)} : a.$$

Ut hoc elementum curvæ integrabile fiat, reſolvatur in ſeriem infinitam (§. 99 *part.* 1.); erit in Theoremate generali

$n = 2$, $m = 1$, $P = a^2$, $Q = 4y^2 : a^2$

$P^{m:n} = a = A$

$$\frac{m}{n}AQ = \tfrac{1}{2}a.\,4y^2 : a^2 = 2y^2 : a = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{1}{4}.\frac{2y^2}{a}.\frac{4y^2}{a^2} = -\frac{2y^4}{a^3} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{3}{6}.-\frac{2y^4}{a^3}.\frac{4y^2}{a^2} = \frac{4y^6}{a^5} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{5}{8}.\frac{4y^6}{a^5}.\frac{4y^2}{a^2} = -\frac{10y^8}{a^7} \text{ \&c.}$$

in infinitum.

Quare $dy\sqrt{(aa + 4yy)} : a = dy + \frac{2y^2dy}{a^2} - \frac{2y^4dy}{a^4} + \frac{4y^6dy}{a^6} - \frac{10y^8dy}{a^8}$ &c. cujus integrale $y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$ &c. in infinitum exprimit arcum parabolicum.

C O R O L L A R I U M I.

Tab.II. Fig.24. 147. Sint AC & DC ſemiaxes conjugati Hyperbolæ æquilateræ; erit $AC = DC = a$ (§. 505 *part.* 1). Sit $CQ = MP = 2y$; erit (§. 534 *part.* 1) $QM = \sqrt{(4yy + aa)}$. Quodſi qm intelligatur ipſi QM infinite propinqua; erit $Qq = dy$, adeoque elementum areæ $CQMA = dy\sqrt{(aa + 4yy)}$. Pendet itaque rectificatio Parabolæ a quadratura ſpatii Hyperbolici CQMA.

C O R O L L A R I U M II.

148. Sit AMR Parabola, cujus parameter AC, & circa communem axem deſcripta Hyperbola æquilatera ANT, cujus axis 2CA. Si fiat $CQ = AV = QN = 2PM$, & rectangulum CORA ſpatio curvilineo CQNA æquale; erit AR æqualis arcui AM (§. 146, 147), conſequenter $RV = AM - 2PM$, ſeu differentia inter ordinatam & arcum reſpondentem, & $ORVQ = VNA$. Tab. IV. Fig.48.

S C H O L I O N.

149. *Probe notandum eſt, omnes ſummationes reduci ad quadraturas curvarum, quocunque in caſu iiſdem utamur. Unde ut ſint perfectæ, in omnibus obſervanda eſt regula ſupra tradita de quadraturis* (§. 109).

P R O B L E M A XLIX.

150. *Rectificare Parabolam ſecundi generis, ad quam $ax^2 = y^3$, ſeu ſumto $a = 1$, $x^2 = y^3$.*

Quoniam $x^2 = y^3$

erit $2xdx = 3y^2dy$

$$4x^2dx^2 = 9y^4dy^2$$

$$dx^2 = 9y^4dy^2 : 4x^2 = 9y^4dy^2 : 4y^3 = \tfrac{9}{4}ydy^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(\tfrac{9}{4}ydy^2 + dy^2)} =$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(9ydy^2 + 4dy^2)} = \tfrac{1}{2}dy\sqrt{(9y + 4)}.$$

Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(9y + 4)} = v$$

erit $9y + 4 = v^2$

$$9dy = 2vdv$$

$$\tfrac{1}{2}dy\sqrt{(9y + 4)} = [illegible]$$

$$\int\tfrac{1}{2}dy\sqrt{(9y + [illegible]} \; [illegible] \tfrac{[illegible]}{27}v [illegible]$$

$$= [illegible] 4)\sqrt{(9y + 4)}.$$

U[illegible]

Ut vero summa exprimat longitudinem arcus, fiat $y = 0$; erit residuum $= \frac{4}{27}\sqrt{4} = \frac{8}{27}$: adeoque arcus $\frac{1}{27}(9y + 4)\sqrt{(9y+4)} - \frac{8}{27}$ (§. 109).

COROLLARIUM.

151. Sit parameter Parabolæ *Apollonianæ* 1, $AP = 1$, $PQ = \frac{9}{4}y$, erit $AQ = \frac{9}{4}y + 1$, & ob parametrum 1, $QN^2 = \frac{9}{4}y + 1 = (9y + 4) : 4$ (§. 388 *part.* 1.), consequenter $QN = \frac{1}{2}\sqrt{(9y + 4)}$. Est adeo elementum $QNnq$ spatii parabolici $PMNQ = \frac{1}{2}dy\sqrt{(9y + 4)}$; quod divisum per 1, sive parametrum, dat elementum arcus Parabolæ secundi generis, ad quam $ax^2 = y^3$. Pendet adeo hujus rectificatio a quadratura Parabolæ *Apollonianæ*; quæ cum dari possit (§. 103), mirum non est, illam quoque rectificabilem esse.

PROBLEMA L.

152. *Infinitas Parabolas rectificare.*

Si parameter $= 1$, pro infinitis parabolis (§. 519 *part.* 1)

$$y^m = x$$
$$my^{m-1}\,dy = dx$$
$$m^2y^{2m-2}\,dy^2 = dx^2$$

h. e. si brevitatis gratia fiat $2m - 2 = r$

$$m^2y^r\,dy^2 = dx^2$$
$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(m^2y^r dy^2 + dy^2)} = dy\sqrt{(m^2y^r + 1)}.$$

Ut elementum integrabile reddatur, ex $m^2y^r + 1$ extrahenda est radix per Theorema generale (§. 99 *part.* 1); in quo erit

$$m = 1,\ n = 2,\ P = 1,\ Q = m^2y^r$$
$$P^{n:m} = 1 = A$$
$$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2}m^2y^r = B$$
$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{1}{4}.\ \frac{1}{2}m^2y^r.\ m^2y^r = -\frac{1}{2.4}m^4y^{2r} = C$$
$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{3}{6}.\ -\frac{1}{2.4}m^4y^{2r}.\ m^2y^r = +\frac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r} = D.$$
$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{5}{8}.\frac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r}.\ m^2y^r = -\frac{1.3.5.}{2.4.6.8}m^8y^{4r} = E$$
$$\frac{m-4n}{5n}EQ = -\frac{7}{10}.\ -\frac{1.3.5}{2.4.6.8}m^8y^{4r}.m^2y^r = +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}m^{10}y^{5r}$$

&c. in infinitum.

Habemus itaque $dy\ \sqrt{(1 + m^2y^r)}$

$$dy + \frac{1}{2}m^2y^r dy - \frac{1}{2.4}m^4y^{2r}dy + \frac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r}dy - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}m^8y^{4r}dy + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}m^{10}y^{5r}dy$$

&c. in infinit. cujus integrale

$$y + \frac{1}{2(r+1)}m^2y^{r+1} - \frac{1}{2.4(2r+1)}m^4y^{2r+1} + \frac{1.3}{2.4.6(3r+1)}m^6y^{3r+1} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8(4r+1)}m^8y^{4r+1} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10(5r+1)}m^{10}y^{5r+1}.$$

&c. in infinitum, indefinite exprimit arcum parabolicum cujuscunque generis.

Quodsi pro r substituatur valor ipsius $2m - 2$; prodibit idem arcus

$$= y + \frac{1}{2(2m-1)}m^2y^{2m-1} - \frac{1}{2.4(4m-3)}m^4y^{4m-3} + \frac{1.3}{2.4.6(6m-5)}m^6y^{6m-5} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8(8m-7)}m^8y^{8m-7} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.10(10m-9)}m^{10}y^{10m-9}$$

&c. in infinitum.

PROBLEMA LI.

153. *Dato sinu* PQ *arcus* AP; *invenire arcum* AP.

Sit radius $AI = 1$, $PQ = y$, $AQ = x$; erit (§. 377 *part.* 1)

2x-

Tab.I. Fig.7.

$$2x - xx = yy$$
$$2dx - 2xdx = 2ydy$$
$$dx = ydy : (1-x)$$
$$dx^2 = y^2dy^2 : (1-2x+xx) = y^2dy^2 : (1-y^2)$$
$$dx^2 + dy^2 = \frac{y^2dy^2}{1-y^2} + dy^2$$
$$= (y^2dy^2 + dy^2 - y^2dy^2) : (1-y^2) = dy^2 : (1-y^2)$$
$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dy : \sqrt{(1-y^2)} = dy(1-y^2)^{-1:2}.$$

Resolvatur hoc elementum in seriem infinitam per extractionem radicis, vi Theorematis generalis (§. 99 *part.* 1), in quo erit

$m = -1$, $n = 2$, $P = 1$, $Q = -y^2$

$P^{m:n} = 1 = A$

$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2}.1. - y^2 = \frac{1}{2}y^2 = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{3}{4}.\frac{1}{2}y^2. - y^2 = \frac{1.3}{2.4}y^4 = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{6}.\frac{1.3}{2.4}y^4. - y^2 = \frac{1.3.5}{2.4.6}y^6 = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{7}{8}.\frac{1.3.5}{2.4.6}y^6. - y^2 = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^8$ &c. in infinit.

Est adeo $dy : \sqrt{(1-y^2)} = dy + \frac{1}{2}y^2dy + \frac{1.3}{2.4}y^4dy + \frac{1.3.5}{2.4.6}y^6dy + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^8dy$ &c. in infinitum, cujus integrale $y + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1.3}{2.4.5}y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9$ &c. est arcus AP, cujus sinus $PQ = y$, sinu toto existente 1. Si terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, quartus D &c. & secundus multiplicetur per $\frac{1}{1}$, tertius per $\frac{3}{3}$, quartus per $\frac{3.5}{3.5}$, quintus per $\frac{3.5.7}{3.5.7}$ &c. cum sit

$A = y$

$B = \frac{1}{2.3}y^3 = \frac{1.1}{2.3}Ay^2$

$C = \frac{1.3}{2.4.5}y^5 = \frac{1.3.3}{2.3.4.5}y^5 = \frac{3.3}{4.5}By^2$

$D = \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 = \frac{1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}y^7 = \frac{5.5}{6.7}Cy^2$

$E = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9 = \frac{1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}y^9 = \frac{7.7}{8.9}Dy^2$

series inventa in hanc degenerat: $y + \frac{1.1}{2.3}Ay^2 + \frac{3.3}{4.5}By^2 + \frac{5.5}{6.7}Cy^2 + \frac{7.7}{8.9}Dy^2$ &c.

Si cosinus $QI = x$, erit (§. 417 *Geom.*) $PQ = \sqrt{(1-xx)}$. Sit pq ipsi PQ infinite propinqua, & PO ad pq perpendicularis: cum anguli Q & q sint recti, *per hyp.* $PO = Qq = dx$ & $\triangle\triangle\, pOP$ atque PQI rectangula. Quare cum OPQ sit rectus (§. 230 *Geom.*) & pPI itidem rectus (§ 38); erit etiam $pPO = IPQ$ (§. 91 *Arithm.*), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$PQ : PI = PO : Pp$$
$$\sqrt{(1-xx)} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$$

Cum adeo hoc elementum coincidat cum anteriore, evidens est, si in serie anteriore pro y substituatur x, prodire seriem pro arcu, qui est illius complementum ad 90°.

COROLLARIUM I.

154. Quoniam elementum arcus $Mm = dy : \sqrt{(1-y^2)}$, si $MC = 1$, $PM = y$ (§. 153), erit sector elementaris $MCm = dy : 2\sqrt{(1-y^2)}$ (§. 435 *Geom.*); consequenter sector $BCM = \frac{1}{2}\int dy : \sqrt{(1-y^2)}$ [illegible] $y^3 + \frac{3}{4.4.5}y^5 + \frac{3.5}{4.4.6.7}y^7$ [illegible] $\frac{\ldots}{4.4.6.8.9}y^9$ &c. in [illegible]

Tab.II. Fig. [illegible]

COROLLARIUM II.

Tab.II. Fig.20. 155. Quodsi MC $=1$, PC $=y$, erit denuo $Mm = dy : \sqrt{(1-y^2)}$ (§.153); consequenter & $MCm = dy : 2\sqrt{(1-y^2)}$: Summa vero exhibet sectorem MCO.

COROLLARIUM III.

156. Si fiat $y=1$, sector BCM vel MCO degenerat in quadrantem, qui adeo erit $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4.3} + \frac{3}{4.4.5} + \frac{3.5}{4.4.6.7} + \frac{3.5.7}{4.4.6.8.9}$ &c. sive $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{3}{80} + \frac{5}{224} + \frac{35}{2304}$ &c. in infinit. Eadem series integrum Circulum exprimit, si fuerit diameter $=1$.

PROBLEMA LII.

Tab.I. Fig.7. 157. *Dato sinu verso* AQ; *invenire arcum* AP.

Sit AQ $=x$, diameter AB $=1$, erit QP $= \sqrt{(x - xx)}$ (§.377 *part.* I) & *vi Probl.præc.* $Pp = dx : 2\sqrt{(x - xx)} = \frac{1}{2}dx\,(x - xx)^{-1:2}$. Cum adeo sit, in Theoremate generali (§.99 *part.* I), $m = -1$, $n = 2$, $P = x$, $Q = -x$; erit

$$P^{m:n} = x^{-1:2} = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = -\tfrac{1}{2}.x^{-1:2}.-x = \tfrac{1}{2}x^{1:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}.x^{1:2}.-x = \tfrac{1.3}{2.4}x^{3:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{5}{6}.\tfrac{1.3}{2.4}x^{3:2}.-x = \tfrac{1.3.5}{2.4.6}x^{5:2} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{7}{8}.\tfrac{1.3.5}{2.4.6}x^{5:2}.-x = \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{7:2}$$

&c. in infinitum.

Hinc $\frac{1}{2}dx : \sqrt{(x - xx)} = \frac{1}{2}x^{-1:2}dx + \frac{1}{4}x^{1:2}dx + \frac{1.3}{4.4}x^{3:2}dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}x^{5:2}dx + \frac{1.3.5.7}{[illegible]}$ [illegible] &c. in infinitum, cujus integrale [illegible] $+ \frac{1}{2.3}x^{3:2}$ $+ \frac{1.3}{2.4.5}x^{5:2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^{7:2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^{9:2}$ &c. in infinitum, seu $\sqrt{x}\,(1 + \frac{1}{2.3}x + \frac{1.3}{2.4.5}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^4$ &c. in infinitum) exprimit arcum AP, quia $x^{1:2} = \sqrt{x}$.

PROBLEMA LIII.

158. *Data tangente* BK; *invenire arcum* BM. Tab. Fig.

Sit tangens BK $=x$, radius BC $=1$, erit $Mm = dx : (1 + x^2) = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c. in infinitum (§.124). Hujus seriei summa $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. in infinitum, dat arcum BM.

Cum tangens 45° sit radio æqualis (§. 32 *Trigon.*), si pro x ponatur 1; prodibit arcus 45° seu dimidius quadrans $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinitum, quæ eadem series quadranti satisfacit, si diameter $=1$.

PROBLEMA LIV.

160. *Dato arcu* BM; *invenire sinum* PM.

Sit sinus PM $=y$, radius BC $=1$, arcus BM $=v$; erit $v = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5$ &c. in infinitum (§.153). Valor ipsius y invenietur extrahendo radicem ex $y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5$ &c. in infinitum. Est nimirum in Theoremate generali (§.366 *part.* I) $a=1$, $c=\frac{1}{6}$, $e=\frac{3}{40}$ &c. adeoque

$$v : a = v$$

$$-acv^3 : a^5 = -\tfrac{1}{6}v^3$$

$$+(3a^2c^2 - a^3e)v^5 : a^9 = (\tfrac{3}{36} - \tfrac{3}{40})v^5$$

$$= (\tfrac{1}{12} - \tfrac{3}{40})v^5$$

$$= \tfrac{40-36}{12.40}v^5$$

$$= \tfrac{4}{12.40}v^5 = \tfrac{1}{120}v^5$$

Hinc

Hinc $y = v - \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{120}v^5$ &c. in infinitum $= \frac{1}{1}v - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5$ &c. in infinitum: unde lex progressionis manifesta est. Nimirum $y = v - \frac{1}{1.2.3}v^3$

$$+ \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}v^7$$

$$+ \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}v^9 \text{ \&c.}$$

Quodsi Theorema generale supponere non libet, reperietur valor ipsius y eodem modo, quo (§. 366 *part.* 1.) Theorema generale investigavimus. Sit nempe

$$y = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 + \text{\&c.}$$

erit (§. 95 *part.* 1.)

$$y^3 = a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 + \text{\&c.}$$
$$+ 3a^2cv^7 + \text{\&c.}$$
$$y^5 = a^5v^5 + 5a^4bv^7 + \text{\&c.}$$
$$y^7 = a^7v^7 + \text{\&c.}$$

Habemus itaque

$$y = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \text{ \&c.}$$
$$\tfrac{1}{6}y^3 = + \tfrac{1}{6}a^3v^3 + \tfrac{1}{2}a^2bv^5 + \tfrac{1}{2}ab^2v^7 \text{ \&c.}$$
$$+ \tfrac{1}{2}a^2cv^7$$
$$\tfrac{3}{40}y^5 = + \tfrac{3}{40}a^5v^5 + \tfrac{3}{8}a^4bv^7 \text{ \&c.}$$
$$\tfrac{5}{112}y^7 = + \tfrac{5}{112}a^7v^7 \text{ \&c.}$$
$$-v = -v$$

$$a - 1 = 0 \qquad b + \tfrac{1}{6}a^3 = 0$$
$$a = 1 \qquad b = -\tfrac{1}{6}$$

$$c + \tfrac{1}{2}a^2b + \tfrac{3}{40}a^5 = 0$$

h.e. $c - \frac{1}{12} + \frac{3}{40} = 0$

$$c = \frac{1}{12} - \frac{3}{40} = \frac{40 - 36}{12.\ 40} = \frac{1}{120}$$

$$d + \tfrac{1}{2}ab^2 + \tfrac{1}{2}a^2c + \tfrac{3}{8}a^4b + \tfrac{5}{112}a^7 = 0$$

h.e. $d + \frac{1}{72} + \frac{1}{240} - \frac{1}{16} + \frac{5}{112} = 0$

seu $d + \frac{1}{5040} = 0$

$$d = -\frac{1}{5040}$$

Nimirum $\frac{1}{72} + \frac{1}{240} = \frac{13}{720}$, $\frac{13}{720} - \frac{1}{16} = -\frac{2}{45}$ tandem $\frac{5}{112} - \frac{2}{45} = \frac{1}{5040}$.

Habemus itaque ut ante $y = v - \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{120}v^5 - \frac{1}{5040}v^7$ &c. in infin.

PROBLEMA LV.

161. *Dato arcu* BM; *invenire tangentem* BK. Tab. II. Fig. 20.

Sit tangens $= x$, radius $= 1$, arcus $= v$; erit (§. 158) $v = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. Unde eodem modo, quo in Problemate præcedente, reperitur $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5$ &c. (§. 366 *part.* 1).

Est nimirum, vi Theorematis generalis,

$$x = \frac{v}{a} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}v^3 +$$
$$\frac{14b^4 + 6a^2bd - 21ab^2c + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}v^5 \text{ \&c.}$$

Jam vero $a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{1}{3}$, $d = 0$, $e = \frac{1}{5}$, per legem comparationis, adeoque

$$-\frac{ac}{a^5} = -c = -\tfrac{1}{3}$$

$$\frac{3a^2c^2 - a^3e}{a^9} = 3c^2 - e = \tfrac{3}{9} - \tfrac{1}{5}$$

$$= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} = \frac{5 - 3}{3.5} = \tfrac{2}{15}$$

Quare $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5$ &c.

Potest etiam valor ipsius x eodem modo inveniri, quo in Problemate præcedente.

Ponamus nempe $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. $= 0$; erit (§. 95 *part.* 1)

$$x^3 = a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 \text{ \&c.}$$
$$+ 3a^2cv^7 \text{ \&c.}$$
$$x^5 = + a^5v^5 + 5a^4bv^7 \text{ \&c.}$$
$$x^7 = + a^7v^7 \text{ \&c.}$$

Habemus adeo, ob [illegible]

$$x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 [illegible] \tfrac{1}{7}x^7 \text{ \&c.} = [illegible]$$

 $- v$

$$-v = -v$$
$$x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \text{ \&c.}$$
$$-\tfrac{1}{3}x^3 = -\tfrac{1}{3}a^3v^3 - a^2bv^5 - ab^2v^7 \text{ \&c.}$$
$$-a^2cv^7$$
$$+\tfrac{1}{5}x^5 = +\tfrac{1}{5}a^5v^5 + a^4bv^7 \text{ \&c.}$$
$$-\tfrac{1}{7}x^7 = -\tfrac{1}{7}a^7v^7 \text{ \&c.}$$

Quamobrem

$$a-1=0 \qquad b-\tfrac{1}{3}a^3=0 \qquad c-a^2b+\tfrac{1}{5}a^5=0$$
$$a=1 \qquad b=\tfrac{1}{3} \qquad c=b-\tfrac{1}{5}=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}$$
$$=\frac{5-3}{15}=\frac{1}{15}$$
$$d-ab^2-a^2c+a^4b-\tfrac{1}{7}a^7=0$$
$$d-\tfrac{1}{9}-\tfrac{2}{15}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{7}=0$$
$$d=\tfrac{2}{15}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{2}{9}=\frac{126+135-210}{945}$$
$$=\frac{51}{945}=\frac{17}{315}$$

His ergo valoribus coëfficientium a, b, c, d &c. in æquatione assumtitia $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. substitutis, prodit $x = v + \tfrac{1}{3}v^3 + \tfrac{2}{15}v^5 + \tfrac{17}{315}v^7$ &c.

SCHOLION.

162. *Me non monente apparet, si plures termini desiderentur, assumtitiam quoque ex pluribus constandam esse.*

PROBLEMA LVI.

Tab.I. Fig. 7. 163. *Dato arcu* AP; *invenire sinum versum* AQ.

Quodsi formulam desideres, quam NEWTONUS dedit (a); radius supponi debet 1. In formula superiori, quam pro arcu ex sinu verso eruimus (§. 157), diameter est 1. Quamobrem hæc prius eadem, qua supra usi sumus, methodo eruenda. Sit igitur $AI = 1$, $AQ = x$, erit $AB = 2$, $PQ = \sqrt{(2x - x^2)}$ & per demonstrata (§. 153)

$$PQ : PI = PO : Pp$$
$$\ldots = dx : Pp$$

consequenter $Pp = dx : \sqrt{(2x - x^2)} = dx\,(2x - x^2)^{-1:2}$ cumque sit (§. 99 part. I.)

$m = -1$, $n = 2$, $P = 2x$, $Q = -x^2 : 2x = -\tfrac{1}{2}x$; erit

$$P^{m:n} = (2x)^{-1:2} = \frac{x^{-1:2}}{\sqrt{2}} = A,$$
$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}.\frac{x^{-1:2}}{\sqrt{2}}.-\tfrac{1}{2}x = +\frac{x^{1:2}}{4\sqrt{2}} = B$$
$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.\frac{x^{1:2}}{4\sqrt{2}}.-\tfrac{1}{2}x = +\frac{3x^{3:2}}{32\sqrt{2}} = C$$
$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}.\frac{3x^{3:2}}{32\sqrt{2}}.-\tfrac{1}{2}x = +\frac{5x^{5:2}}{128\sqrt{2}}$$

&c.

Est itaque $Pp = \dfrac{x^{-1:2}dx}{\sqrt{2}} + \dfrac{x^{1:2}dx}{4\sqrt{2}} + \dfrac{3x^{3:2}dx}{32\sqrt{2}} + \dfrac{5x^{5:2}dx}{128\sqrt{2}}$ &c.

adeoque arcus $AP = \dfrac{2x^{1:2}}{\sqrt{2}} + \dfrac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}} + \dfrac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}} + \dfrac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}}$ &c.

$$\text{Nam } \frac{x^{3:2}}{4\sqrt{2}.\frac{3}{2}} = \frac{2x^{3:2}}{3.4\sqrt{2}} = \frac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}}$$
$$\frac{3x^{5:2}}{32\sqrt{2}.\frac{5}{2}} = \frac{2.3x^{5:2}}{5.32\sqrt{2}} = \frac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}}$$
$$\frac{5x^{7:2}}{128\sqrt{2}.\frac{7}{2}} = \frac{2.5x^{7:2}}{128.7\sqrt{2}} = \frac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}}$$

Sit jam $AP = v$,

$$\text{erit } v = \frac{2x^{1:2}}{\sqrt{2}} + \frac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}} + \frac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}} + \frac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}} \text{ \&c.}$$

adeoque

$$v^2 = \frac{4x}{2} + \frac{4x^2}{2.6} + \frac{x^3}{2.36} \text{ \&c.} + \frac{4.3x^3}{2.80}$$

hoc est, $v^2 = 2x + \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{72}x^3 + \tfrac{3}{40}x^3$

Ponatur

(a) In *Epistola ad* LEIBN... quæ legitur apud WALLISIUM Vol. III. Oper. ...

Ponatur

$$x = av^2 + bv^4 + cv^6 \text{ \&c.}$$

erit $x^2 = \qquad a^2v^4 + 2abv^6$

$x^3 = \qquad + a^3v^6$

adeoque

$$2x = 2av^2 + 2bv^4 + 2cv^6 \text{ \&c.}$$
$$+\tfrac{1}{3}x^2 = \quad +\tfrac{1}{3}a^2v^4 + \tfrac{2}{3}abv^6$$
$$+\tfrac{1}{72}x^3 = \quad +\tfrac{1}{72}a^3v^6$$
$$+\tfrac{3}{40}x^3 = \quad +\tfrac{3}{40}a^3v^6$$
$$-v^2 = -v^2$$

Quamobrem

$$2a - 1 = 0 \qquad 2b + \tfrac{1}{3}a^2 = 0$$
$$2a = 1 \qquad 2b = -\tfrac{1}{3}a^2$$
$$a = \tfrac{1}{2} \qquad b = -\tfrac{1}{6}a^2 = -\tfrac{1}{6.4} = -\tfrac{1}{24}$$
$$2c + \tfrac{2}{3}ab + \tfrac{1}{72}a^3 + \tfrac{3}{40}a^3 = 0$$
$$c = -\tfrac{1}{3}ab - \tfrac{1}{144}a^3 - \tfrac{3}{80}a^3$$
$$-\tfrac{1}{3}ab = +\tfrac{1}{144} = +\frac{8}{144.8}$$
$$-\tfrac{1}{144}a^3 = -\frac{1}{144.8}$$
$$-\tfrac{1}{3}ab - \tfrac{1}{144}a^3 = \frac{7}{144.8} = \tfrac{7}{1152}$$
$$-\frac{3a^3}{80} = -\frac{3}{80.8} = -\tfrac{3}{640}$$
$$c = \frac{4480 - 3456}{1152.640} = \frac{1024}{1252.640}$$
$$= \frac{16}{1152.10} = \frac{1}{720}$$

Est igitur $x = \tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{24}v^4 + \tfrac{1}{720}v^6$ &c. Enimvero $2 = 1.2$, $24 = 1.2.3.4$, $720 = 1.2.3.4.5.6$. Quare $x = \frac{1}{1.2}v^2 - \frac{1}{1.2.3.4}v^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6}v^6$ &c. Quodsi jam terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C &c. erit $x = \frac{1}{1.2}v^2 - \frac{1}{3.4}Av^2 + \frac{1}{5.6}Bv^2 - \frac{1}{7.8}Cv^2$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM I.

164. Quoniam radius $= 1$, erit sinus complementi, seu cosinus arcus $v = 1 - \frac{1}{1.2}v^2 + \frac{1}{1.2.3.4}v^4 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6}v^6 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}v^8$ &c.

COROLLARIUM II.

165. Si $1 - \frac{1}{1.2}v^2 + \frac{1}{1.2.3.4}v^4$, sive $1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{24}v^4$ praxi satisfacit pro sinu complementi arcus, & cosinus iste dicatur c; erit $c = 1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{24}v^4$, consequenter $v = \sqrt{(6 + \sqrt{(24c + 12)})}$ (§. 143 *part.* 1).

PROBLEMA LVII.

166. *Dato arcu* BM; *invenire secantem* KC. Tab. II. Fig. 20.

Sit BC $= 1$, arcus $= v$, erit KB $= v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5 +$ &c. (§. 161); adeoque $BC^2 = 1$, $KB^2 = v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{1}{9}v^6 + \frac{4}{15}v^6$ &c. consequenter (§. 417 *Geom.*) ob $\frac{1}{9}v^6 + \frac{4}{15}v^6 = \frac{17}{45}v^6$, $KC^2 = 1 + v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{17}{45}v^6$ &c. Quodsi inde radix vulgari modo extrahatur, prodit KC $= 1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{24}v^4 + \frac{61}{720}v^6$ &c. quemadmodum typus exempli ostendit.

$$1 + v^2 + \tfrac{2}{3}v^4 + \tfrac{17}{45}v^6 \text{ \&c.} \left(1 + \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{5}{24}v^4 + \text{\&c.}\right.$$
$$1$$
$$+v^2 + \tfrac{2}{3}v^4 + \tfrac{17}{45}v^6 \text{ \&c.}$$
$$(2)$$
$$+v^2 + \tfrac{1}{4}v^4$$
$$+\tfrac{5}{12}v^4 + \tfrac{17}{45}v^6 \text{ \&c.}$$
$$(2 + v^2)$$
$$+\tfrac{5}{12}v^4 + \tfrac{5}{24}v^6 \text{ \&c.}$$
$$+\tfrac{61}{360}v^6 \text{ \&c.}$$
$$(2 + v^4 + \tfrac{5}{12}v^4)$$
$$+\tfrac{61}{360}v^6 \text{ \&c.}$$
$$\text{\&c. \&c.}$$

SCHOLION.

167. *Seriem pro sinu & sinu verso ex arcu, atque pro arcu ex iisdem determinando invenit* NEWTONUS (l); *seriem pro tangente & secante ex arcu, atque arcu ex tangente determinando,* Jacobus GREGORIUS (m). *Existimavit autem* LEIBNITIUS *series istas Trigonometriam canonicam ad quantamcunque exactitudinem in numeris a Tabularum necessitate liberare.*

PROBLEMA LVIII.

Tab.I. Fig.7. 168. *Rectificare Cycloidem.*

Sit $AQ = x$, $AB = 1$, erit $Qq = MS = dx$, $PQ = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 *part.* 1) & hinc $AP = \sqrt{x} = x^{1:2}$ (§. 417 *Geom.*), consequenter ob △△ APQ & MmS similitudinem supra demonstratam (§. 131)

$$AQ : AP = MS : Mm$$
$$x : x^{1:2} = dx : x^{-1:2}\,dx$$

Est ergo Mm differentiale arcus cycloidici $AM = x^{-1:2}dx$. Unde $\int x^{-1:2}dx = 2x^{1:2} = 2AP$ est arcus AM, seu arcus Cycloidis AM est chordæ arcus circuli genitoris ipsi respondentis AP duplus.

PROBLEMA LIX.

Tab. IV. Fig.). 169. *Data chorda arcus* AP; *invenire arcum cognominem, quem subtendit.*

Sit $AB = 1$, $AP = x$: cum angulus APB sit rectus (§. 317 *Geom.*) erit $PB = \sqrt{(1 - x^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Sit porro Ap ipsi AP infinite propinqua. Quoniam angulus AQB = APB + PAp (§. 239 *Geom.*) & PAp, cujus mensura est $\frac{1}{2}$ Pp (§. 314 *Geom.*) infinite parvus; erit AQB = APB (§. 4), consequenter rectus (§. 145 *Geom.*) Est igitur & PQp = AQB (§ 156 *Geom.*) rectus (§. 145 *Geom.*) itidemque AQP rectus (§. 65 *Geom.*) adeoque ipsi APQ æqualis (§. 145 *Geom.*) & hinc AP = AQ (§. 253, 89 *Geom.*); consequenter Qp differentiale chordæ AP (§. 6) = dx. Porro anguli PAB mensura est arcus dimidius PB & anguli QPp mensura $\frac{1}{2}p$B (§. 314 *Geom.*): quare cum arcus PB & pB, ob infinite parvum Pp, sint æquales (§. 4), erit angulus PAB = QPp (§. 141 *Geom.*). Habemus itaque (§. 267 *Geom.*)

$$PB : AB = pQ : Pp$$
$$\sqrt{(1 - x^2)} : 1 = dx : Pp$$

adeoque $Pp = dx : \sqrt{(1 - x^2)}$, & hinc porro arcus $AP = \int (dx : \sqrt{(1 - x^2)})$. Eadem igitur formula satisfacit arcui AP ex chorda cognomine determinando, quam supra invenimus pro eodem ex sinu PM determinando (§. 153), nimirum arcus $AP = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^9$ &c. in infinitum.

Quodsi $PB = x$, erit $PQ = dx$ & $AP = (\sqrt{1 - x^2})$, atque eodem prorsus modo reperitur arcus $PB = \int (dx : \sqrt{(1 - x^2)})$, ut adeo eadem series satisfaciat utrique arcui AP & PB inveniendo.

PROBLEMA LX.

170. *Data chorda arcus* AP; *invenire segmentum circuli cognomine.*

Sit diameter circuli $AB = 1$, chorda $AP = x$, erit, per demonstrata in Problemate præcedente, $PB = \sqrt{(1 - x^2)}$ & $pQ = dx$, nec non △ APB ∽ △PQp: erit etiam (§. 267 *Geom.*)

$$PB : AP = pQ : PQ$$
$$\sqrt{(1 - x^2)} : x = dx : PQ$$

adeo-

(l) Vide Commercium [Epistolicum] D. Joh. COLLINS p. 40. 52.
(m) Ibidem p. 45.

Tab. IV. Fig. 49. adeoque $PQ = xdx : \sqrt{(1-x^2)}$, consequenter cum PQ haberi possit pro arcu infinite parvo ex centro A radio AP descripto (§. 38), adeoque APQ pro sectore circulari, erit $APQ = x^2dx : 2\sqrt{(1-x^2)}$ (§. 435 *Geom.*) $= \frac{1}{2}x^2dx (1-x^2)^{-1:2}$.

Est vero $(1-x^2)^{-1:2}$ seu $1 : \sqrt{(1-x^2)}$ $= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8$ &c. (§. 153), adeoque

$APQ = \frac{1}{2}x^2dx(1-x^2)^{-1:2} = \frac{1}{2}x^2dx + \frac{1}{4}x^4dx + \frac{1.3}{4.4}x^6dx + \frac{1.3.5}{4.4.6.}x^8dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}x^{10}dx$ &c. in infinit.

Ergo segmentum circuli $AP = \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{4.5}x^5 + \frac{1.3}{4.4.7}x^7 + \frac{1.3.5}{4.4.6.9}x^9 + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8.11}x^{11}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA LXI.

171. *Dato arcu* AP; *invenire chordam cognominem.*

Sit diameter circuli $AB = 1$, $AP = x$, erit arcus $AP = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7$ &c. (§. 169). Dicatur idem arcus v, erit $v = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7$ &c. adeoque $AP = x = v - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}v^7 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}v^9$ &c. in infinitum, ut supra (§. 160).

Quodsi diameter dicatur d, non 1, reperietur arcus $AP = x + \frac{1}{2.3d^2}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5d^4}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7d^6}x^7$ &c. & vicissim chorda $AP = v - \frac{1}{1.2.3d^2}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5d^4}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7d^6}v^7 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9d^8}v^9$ &c. id quod calculos superiores repetenti apparet. Tab. IV. Fig. 49.

PROBLEMA LXII.

172. *Rectificare arcum Ellipsis* GM. Tab. I. Fig. 50.
Sit $CG = c$, $AC = a$, $PC = x$, $PM = y$, erit (§. 432 *part.* 1)

$$a^2y^2 = a^2c^2 - c^2x^2$$
$$2a^2ydy = -2c^2xdx$$
$$a^4y^2dy^2 = c^4x^2dx^2$$
$$dy^2 = \frac{c^4x^2dx^2}{a^4y^2} = \frac{c^4x^2dx^2}{a^4c^2 - a^2c^2x^2} = \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 - a^2x^2}$$
$$dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 - a^2x^2} = \frac{a^4dx^2 - a^2x^2dx^2 + c^2x^2dx^2}{a^4 - a^2x^2}$$
$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{\sqrt{(a^4 - a^2x^2)}} = \frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Ut elementum hoc integrabile reddatur, tam numerator $\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}$, quam denominator $a\sqrt{(a^2 - x^2)}$ resolvendus est in seriem & series prior per posteriorem dividenda eo modo, quem mox subjiciemus. Est itaque (§. 99 *part.* 1.) [illegible] primo, $m = 1$, $n = 2$, $P = [illegible]$, $Q = -(a^2-c^2)x^2 : a^4$

Fiat

Fiat $a^2 - c^2 = b^2$ ob commoditatem calculi, erit $Q = -b^2x^2 : a^4$.

Unde porro obtinetur

$$P^{m:n} = a^2 = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = \tfrac{1}{2}.\,a^2.-\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{b^2x^2}{2a^2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{1}{4}.-\frac{b^2x^2}{2a^2}.-\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{b^4x^4}{8a^6} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{3}{6}.-\frac{b^4x^4}{8a^6}.-\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{b^6x^6}{16a^{10}} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{5}{8}.-\frac{b^6x^6}{16a^{10}}.-\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{5b^8x^8}{128a^{14}} \text{ \&c.}$$

Est itaque $\sqrt{(a^4 - b^2x^2)} = \sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)} = a^2 - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$ &c. in infinitum $= K$

Enimvero $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. in infin. (§.126). Quare $a\sqrt{(a^2 - x^2)} = a^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{8a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{128a^6}$ &c. in infin. $= L$.

Seriem adeo primam K per alteram L divisurus probe observare debes omnes terminos in divisione emergentes, in quibus x ad eandem dimensionem assurgit, haberi pro uno, cum pro coefficientibus omnibus simul sumtis substitui possit unus, qualis etiam in casu singulari revera prodiret, ubi a & b in numeris dantur, si fractiones ad eandem denominationem reductæ in unam summam colligerentur. Quamobrem terminus unusquisque dividendæ dividitur per a^2, quotcunque partibus fuerit auctus in ipso divisionis actu, & integra series dividens ducitur in quotum atque a dividenda subtrahitur, quemadmodum in communi divisione fieri solet: id quod ex typo exempli subjecti attento lectori obvium.

$$K = a^2 - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$

$$L = a^2 - \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{8a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{128a^6}$$

$$\text{Resid. I.} -\frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{10}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{8a^2} + \frac{x^6}{16a^4} + \frac{5x^8}{128a^6}$$

$$L.B = -\frac{b^2x^2}{[illegible]a^2} + \frac{b^2x^4}{4a^4} + \frac{b^2x^6}{16a^6} + \frac{b^2x^8}{32a^8}$$

$$+ \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{[illegible]}{4a^2} - \frac{x^6}{[illegible]a^4} - \frac{x^8}{32a^6}$$

A.	B.	C.	D.	E.
1	$-\frac{b^2x^2}{2a^4}$	$-\frac{b^4x^4}{8a^8}$	$-\frac{b^6x^6}{16a^{12}}$	$-\frac{5b^8x^8}{128a^{16}}$
	$+\frac{x^2}{2a^2}$	$-\frac{b^2x^4}{4a^6}$	$-\frac{b^4x^6}{16a^{10}}$	$-\frac{b^6x^8}{32a^{14}}$
		$+\frac{3x^4}{8a^4}$	$-\frac{3b^2x^6}{16a^8}$	$-\frac{3b^4x^8}{64a^{12}}$
			$+\frac{5x^6}{16a^6}$	$-\frac{5b^2x^8}{32a^{10}}$
				$+\frac{35x^8}{128a^8}$

Resid.

Resid. II.

$$-\frac{b^4x^4}{8a^6}-\frac{b^6x^6}{16a^{10}}-\frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$
$$-\frac{b^2x^4}{4a^4}-\frac{b^2x^6}{16a^6}-\frac{b^2x^8}{32a^8}$$
$$+\frac{3x^4}{8a^2}+\frac{x^6}{8a^4}+\frac{9x^8}{128a^6}$$

L. C =

$$-\frac{b^4x^4}{8a^6}+\frac{b^4x^4}{16a^8}+\frac{b^4x^8}{64a^{10}}$$
$$-\frac{b^2x^4}{4a^4}+\frac{b^2x^6}{8a^6}+\frac{b^2x^8}{32a^8}$$
$$+\frac{3x^4}{8a^2}-\frac{3x^6}{16a^4}-\frac{3x^8}{64a^6}$$

Resid. III. =

$$-\frac{b^6x^6}{16a^{10}}-\frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$
$$-\frac{b^4x^6}{16a^8}-\frac{b^4x^8}{64a^{10}}$$
$$-\frac{3b^2x^6}{16a^6}-\frac{b^2x^8}{16a^8}$$
$$+\frac{5x^6}{16a^4}+\frac{15x^8}{128a^6}$$

L. D =

$$-\frac{b^6x^6}{16a^{10}}+\frac{b^6x^8}{32a^{12}}$$
$$-\frac{b^4x^6}{16a^8}+\frac{b^4x^8}{32a^{10}}$$
$$-\frac{3b^2x^6}{16a^6}+\frac{3b^2x^8}{32a^8}$$
$$+\frac{5x^6}{16a^4}+\frac{5x^8}{32a^6}$$

$$-\frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$
$$-\frac{b^6x^8}{32a^{12}}$$
$$-\frac{3b^4x^8}{64a^{10}}$$
$$-\frac{5b^2x^8}{32a^8}$$
$$+\frac{35x^8}{128a^6}$$

&c. &c.

 Substi-

Substituatur jam valor ipsius b. Quoniam

$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^4 = a^4 - 2a^2c^2 + c^4$$
$$b^6 = a^6 - 3a^4c^2 + 3a^2c^4 - c^6$$
$$b^8 = a^8 - 4a^6c^2 + 6a^4c^4 - 4a^2c^6 + c^8$$

erit

1.

$$-\frac{b^2x^2}{2a^4} = -\frac{x^2}{2a^2} + \frac{c^2x^2}{2a^4}$$
$$+\frac{x^2}{2a^2} = +\frac{x^2}{2a^2}$$
$$B = +\frac{c^2x^2}{2a^4}$$

2.

$$-\frac{b^4x^4}{8a^8} = -\frac{x^4}{8a^4} + \frac{c^2x^4}{4a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$
$$-\frac{b^2x^4}{4a^6} = -\frac{x^4}{4a^4} + \frac{c^2x^4}{4a^6}$$
$$+\frac{3x^4}{8a^4} = +\frac{3x^4}{8a^4}$$
$$C = +\frac{c^2x^4}{2a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$

3.

$$-\frac{b^6x^6}{16a^{12}} = -\frac{x^6}{16a^6} + \frac{3c^2x^6}{16a^8} - \frac{3c^4x^6}{16a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$
$$-\frac{b^4x^6}{16a^{10}} = -\frac{x^6}{16a^6} + \frac{c^2x^6}{8a^8} - \frac{c^4x^6}{16a^{10}}$$
$$-\frac{3b^2x^6}{16a^8} = -\frac{3x^6}{16a^6} + \frac{3c^2x^6}{16a^8}$$
$$+\frac{5x^6}{16a^6} = +\frac{5x^6}{16a^6}$$
$$D = +\frac{c^2x^6}{2a^8} - \frac{4c^4x^6}{16a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$

4.

$$-\frac{5b^8x^8}{1[illegible]} = -\frac{5x^8}{128a^8} + \frac{5c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{30c^4x^8}{128a^{12}} + \frac{5c^6x^8}{[illegible]a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$
$$-\frac{b^6x^8}{32a^{14}} = -\frac{x^8}{32a^8} + \frac{3c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{32a^{12}} + \frac{c^6x^8}{32a^{14}}$$
$$-\frac{3b^4x^8}{64a^{12}} = -\frac{3x^8}{64a^8} + \frac{3c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{64a^{12}}$$
$$-\frac{5b^2x^8}{32a^{10}} = -\frac{5x^8}{32a^8} - \frac{5c^2x^8}{32a^{10}}$$
$$+\frac{35x^8}{128a^8} = +\frac{35x^8}{128a^8}$$
$$E = \frac{c^2x^8}{2a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Habemus itaque

$$A = 1$$
$$B = \frac{c^2x^2}{2a^4}$$
$$C = \frac{c^2x^4}{2a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$
$$D = \frac{c^2x^6}{2a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$
$$E = \frac{c^2x^8}{2a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Quamobrem prolixo satis calculo, quem tamen distincte hic explicari consultum fuit, ut sit exemplar in casibus similibus, tandem reperitur

$$\frac{\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} =$$
$$1 + \frac{c^2x^2}{2a^4} + \frac{c^2x^4}{2a^6} + \frac{c^2x^6}{2a^8} + \frac{c^2x^8}{2a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{c^4x^4}{8a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6}{16a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Est

Tab. I. Fig. 10. Eſt igitur elementum arcus

$$\frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} =$$

$$dx + \frac{c^2x^2dx}{2a^4} + \frac{c^2x^4dx}{2a^6} + \frac{c^2x^6dx}{2a^8} + \frac{c^2x^8dx}{2a^{10}}$$
$$- \frac{c^4x^4dx}{8a^8} - \frac{c^4x^6dx}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8dx}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6dx}{16a^{12}} + \frac{3c^6x^8dx}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8dx}{128a^{16}}$$

&c. in infinitum.

Tandem adeo arcus GM =

$$x + \frac{c^2x^3}{6a^4} + \frac{c^2x^5}{10a^6} + \frac{c^2x^7}{14a^8} + \frac{c^2x^9}{18a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{c^4x^5}{40a^8} - \frac{c^4x^7}{28a^{10}} - \frac{c^4x^9}{24a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^7}{112a^{12}} + \frac{c^6x^9}{48a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^9}{1152a^{16}}$$

Quodſi terminorum homogeneorum coëfficientes reducas ad eandem denominationem; erit $GM = x + \frac{c^2x^3}{6a^4}$ $+ \frac{4a^2c^2 - c^4}{40a^8}x^5 + \frac{8a^4c^2 - 4a^2c^4 + c^6}{112a^{12}}x^7$ $+ \frac{64a^6c^2 - 48a^4c^4 + 24a^2c^6 - 5c^8}{1152a^{16}}x^9$

COROLLARIUM I.

173. Quodſi ponamus eſſe $GC : AC = 1 : m$ adeoque $AC = mc$; erit $GM = x + \frac{1}{6m^2c^2}x^3 + \frac{4m^2 - 1}{40m^8c^4}x^5 + \frac{8m^4 - 4m^2 + 1}{112m^{12}c^6}x^7$ $+ \frac{64m^6 - 48m^4 + 24m^2 - 5}{1152m^{16}c^8}x^9$ &c.

Quare ſi ſpecies Ellipſis in caſu dato determinetur, hoc eſt, m per numerum determinatum explicetur; prodibit ſeries multo ſimplicior. Sit enim $m = 2$, erit GM = Tab. I. Fig. 10. $x + \frac{1}{96c^2}x^3 + \frac{3}{2048c^4}x^5 + \frac{113}{458752c^6}x^7$ $+ \frac{3419}{75497472c^8}x^9$ &c.

COROLLARIUM II.

174. Quodſi $c = a$, Ellipſis degenerat in Circulum & ſeries pro Circulo evadit $x + \frac{x}{6a^2} + \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{5x^7}{112a^6} + \frac{35x^9}{1152a^8}$ &c. hoc eſt, ſi $a = 1$, ſeries $= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5$ $+ \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9$ &c. prorſus ut ſupra (§. 153).

PROBLEMA LXIII.

175. *Rectificare arcum Hyperbolæ* AM. Tab. II. Fig. 24.

Sit $BC = AC = c$, $CQ = PM = x$, dimidius axis conjugatus $= a$, $CP = y$, erit $BP = y + c$, $AP = y - c$

$AP.\ PB = y^2 - c^2$

Quare (§. 469 *part.* I)

$$a^2 : c^2 = x^2 : y^2 - c^2$$
$$a^2y^2 - a^2c^2 = c^2x^2$$
$$a^2y^2 = a^2c^2 + c^2x^2$$
$$2a^2ydy = 2c^2xdx$$
$$a^4y^2dy^2 = c^4x^2dx^2$$

h.e. $a^4c^2dy^2 + a^2c^2x^2dy^2 = c^4x^2dx^2$

$$a^4dy^2 + a^2x^2dy^2 = c^2x^2dx^2$$
$$dy^2 = \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$
$$dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$
$$= \frac{a^4dx^2 + a^2x^2dx^2 + c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$
$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{d\ldots}{a\sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

Tab.II. *Fig.*24. Elementum hoc nonnisi signis differt ab elemento Ellipsis (§.172). Quamobrem, eodem prorsus modo quo in Problemate præcedente, reperitur elementum arcus M*m* =

$$dx + \frac{c^2x^2dx}{2a^4} - \frac{c^2x^4dx}{2a^6} + \frac{c^2x^6dx}{2a^8} - \frac{c^2x^8dx}{2a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{c^4x^4dx}{8a^8} + \frac{c^4x^6dx}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8dx}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6dx}{16a^{12}} - \frac{3c^6x^8dx}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8dx}{128a^{16}}$$

Quare arcus AM =

$$x + \frac{c^2x^3}{6a^4} - \frac{c^2x^5}{10a^6} + \frac{c^2x^7}{14a^8} - \frac{c^2x^9}{18a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{c^4x^5}{40a^8} + \frac{c^4x^7}{28a^{10}} - \frac{c^4x^9}{24a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^7}{112a^{12}} - \frac{c^6x^9}{48a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^9}{1152a^{16}}$$

hoc est, reductione coëfficientium in eodem termino ad eandem denominationem facta, $x + \frac{c^2x^3}{6a^4} - \frac{4a^2c^2 + c^4}{40a^8}x^5 + \frac{8a^4c^2 + 4a^2c^4 + c^6}{112a^{12}}x^7 - \frac{64a^6c^2 + 48a^4c^4 + 24a^2c^6 + 5c^8}{1152a^{16}}x^9$ &c.

Quodsi denuo Hyperbolæ axes ponantur inter se ut 1 ad m, hoc est, si sit $a = mc$, reperietur arcus AM $= x + \frac{1}{6m^4c^2}x^3 - \frac{4m^2+1}{40m^8c^4}x^5 + \frac{8m^4+4m^2+1}{112m^{12}c^6}x^7 - \frac{64m^6+48m^4+24m^2+5}{1152m^{16}c^8}x^9$ &c.

Et si species Hyperbolæ determine- [illegible] explicando [illegible] per numerum determinatum 2, erit AM $= x + \frac{1}{96c^2}x^3 - \frac{17}{1024c^4}x^5 + \frac{145}{458752c^6}x^7 - \frac{4965}{75497472c^8}x^9$ &c.

Series adeo pro arcu hyperbolico à serie pro arcu elliptico non differt nisi signis, in formula generali.

COROLLARIUM.

176. Si Hyperbola fuerit æquilatera erit $c = a$, & series pro arcu AM multo simplicior evadit. Est nempe $= x + \frac{x^3}{6a^2} - \frac{5x^5}{40a^4} + \frac{13x^7}{112a^6} - \frac{141x^9}{1152a^8}$ &c.

PROBLEMA LXVI.

177. *Rectificare Logarithmicam.* Tab. Fig.

Sit curvæ subtangens $= a$, PM $= y$, P$p = dx$, erit (§. 54)

$$\frac{ydx}{dy} = a$$
$$ydx = ady$$
$$dx = \frac{ady}{y}$$
$$dx^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2}$$
$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2} + dy^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy\sqrt{(\frac{a^2}{y^2} + 1)}$$

Ut elementum hoc *m*M integrabile reddatur, ex $a^2 : y^2 + 1$ extrahenda est radix. Erit itaque, in Theoremate generali (§.99 *part.*1)

$m = 1$

Tab.I. Fig.8.

$m=1, n=2, P=\frac{a^2}{y^2}, Q=1:\frac{a^2}{y^2}=\frac{y^2}{a^2}$

$P^{m:n}=\frac{a}{y}=A$

$\frac{m}{n}AQ=\frac{1}{2}.\frac{a}{y}.\frac{y^2}{a^2}=\frac{y}{2a}=B$

$\frac{m-n}{2n}BQ=-\frac{1}{4}.\frac{y}{2a}.\frac{y^2}{a^2}=-\frac{y^3}{8a^3}=C$

$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\frac{3}{6}.-\frac{y^3}{8a^3}.\frac{y^2}{a^2}=+\frac{y^5}{16a^5}=D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\frac{5}{8}.\frac{y^5}{16a^5}.\frac{y^2}{a^2}=-\frac{5y^7}{128a^7}$ &c.

Est itaque $\sqrt{(\frac{a^2}{y^2}+1)}=\frac{a}{y}+\frac{y}{2a}-\frac{y^3}{8a^3}+\frac{y^5}{16a^5}-\frac{5y^7}{128a^7}$ &c. in infinitum.

Eadem series prodit, si ex $\sqrt{(a^2+y^2)}$ extrahatur radix (§. *cit.*) &, quæ provenit, $a+\frac{y^2}{2a}-\frac{y^4}{8a^3}+\frac{y^6}{16a^5}-\frac{5y^8}{128a^7}$ porro dividatur per y. Habemus itaque elementum Mm arcus interminati MI $=\frac{a}{y}dy+\frac{y}{2a}dy-\frac{y^3}{8a^3}dy+\frac{y^5}{16a^5}dy-\frac{5y^7}{128a^7}dy$ &c.

Quare arcus $MI=\int\frac{ady}{y}+\frac{y^2}{4a}-\frac{y^4}{32a^3}+\frac{y^6}{96a^5}-\frac{5y^8}{1024a^7}$ &c.

Ponatur $SQ=z$, erit arcus interminatus $SI=\int\frac{adz}{z}+\frac{z^2}{4a}-\frac{z^4}{32a^3}+\frac{z^6}{96a^5}-\frac{5z^8}{1024a^7}$ &c.

Est igitur arcus $MS=\int\frac{ady}{y}-\int\frac{adz}{z}+\frac{y^2-z^2}{4a}-\frac{y^4-z^4}{32a^3}+\frac{y^6-z^6}{96a^5}-\frac{5y^8-5z^8}{1024a^7}$ &c.

$\int\frac{ady}{y}-\int\frac{adz}{z}$ est spatium hyperbolicum asymptoticum inter duas $a^2:y$ & $a^2:z$ comprehensum, & per a divisum (§. 118).

Est autem a latus potentiæ Hyperbolæ, y & z sunt abscissæ in asymptoto sumtæ (§. 488 *part.* 1). Pendet adeo rectificatio curvæ Logarithmicæ a quadratura Hyperbolæ, quæ per series infinitas in superioribus data (§. 120).

Potest etiam alia adhuc ratione extrahi radix. Nimirum poni potest $P=1$, $Q=\frac{a^2}{y^2}=a^2y^{-2}$. Quare cum sit ut ante $m=1$, $n=2$; erit

$P^{m:n}=1=A$

$\frac{m}{n}AQ=\frac{1}{2}.1.a^2y^{-2}=\frac{1}{2}a^2y^{-2}=B$

$\frac{m-n}{2n}BQ=-\frac{1}{4}.\frac{1}{2}a^2y^{-2}.a^2y^{-2}=-\frac{1}{8}a^4y^{-4}=C$

$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\frac{3}{6}.-\frac{1}{8}a^4y^{-4}.a^2y^{-2}=+\frac{1}{16}a^6y^{-6}=D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\frac{5}{8}.\frac{1}{16}a^6y^{-6}.a^2y^{-2}=-\frac{5}{128}a^8y^{-8}$ &c.

Est igitur elementum curvæ $dy+\frac{1}{2}a^2y^{-2}dy-\frac{1}{8}a^4y^{-4}dy+\frac{1}{16}a^6y^{-6}dy-\frac{5}{128}a^8y^{-8}dy$ &c. in infinitum.

Quare longitudo curvæ $=y-\frac{1}{2}a^2y^{-1}+\frac{1}{24}a^4y^{-3}-\frac{1}{80}a^6y^{-5}+\frac{5}{896}a^8y^{-7}$ &c. $=y-\frac{a^2}{2y}+\frac{a^4}{24y^3}-\frac{a^6}{80y^3}+\frac{5a^8}{896y^7}$ &c.

Sit jam alia semiordinata $SQ=z$, erit longitudo curvæ $=z-\frac{a^2}{2z}+\frac{a^4}{24z^3}-\frac{a^6}{80z^5}+\frac{5a^8}{8[illegible]}$ &c.

Ergo arcus inter semiordinatas y & z interceptus MS $= y - z - \frac{a^2}{2y} + \frac{a^2}{2z} + \frac{a^4}{24y^3} - \frac{a^4}{24z^3} - \frac{a^6}{80y^5} + \frac{a^6}{80z^5} + \frac{5a^8}{896y^7} - \frac{5a^8}{896z^7}$ &c.

COROLLARIUM.

178. Quoniam series istæ satisfaciunt quæsito, quatenus convergunt, & termini continuo minores fiunt (§. 53 *part.* 1), in Logarithmica autem y continuo fit minor, ita ut tandem infra subtangentem a decrescat; serie prima utendum est, si $a > y$; posteriori autem si $y > a$.

PROBLEMA LXV.

179. *Rectificare Hyperbolam ex æquatione ad Hyperbolam intra asymptotos.*

Quoniam $xy = a^2$ (§. 488 *part.* 1), erit

$$y = a^2 : x = a^2x^{-1}$$
$$dy = -a^2x^{-2}dx$$
$$dy^2 = a^4x^{-4}dx^2$$
$$dy^2 + dx^2 = dx^2 + a^4x^{-4}dx^2$$
$$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx\sqrt{(1 + a^4x^{-4})}$$

Elementum hoc arcus Hyperbolici non multum differt ab elemento arcus Logarithmicæ (§. 177).

Vi Theorematis generalis (§. 99 *part.* 1)

$m = 1$, $n = 2$, $P = 1$, $Q = a^4x^{-4}$

$P^{m:n} = 1 = A$

$$\frac{m}{n}AQ = \tfrac{1}{2}.1.\,a^4x^{-4} = \tfrac{1}{2}a^4x^{-4} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{2}a^4x^{-4}.\,a^4x^{-4} = -\frac{1}{2.4}a^8x^{-8} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{3}{6}.-\frac{1}{2.4}a^8x^{-8}.\,a^4x^{-4} = +\frac{1.3}{2.4.6}a^{12}x^{-12} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{5}{8}.\frac{1.3}{2.4.6}a^{12}x^{-12}.\,a^4x^{-4} = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{16}x^{-16} \text{ \&c.}$$

Est igitur elementum curvæ $dx + \frac{1}{2}a^4x^{-4}dx - \frac{1}{2.4}a^8x^{-8}dx + \frac{1.3}{2.4.6}a^{12}x^{-12}dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{16}x^{-16}dx$, &c. consequenter longitudo curvæ $= x - \frac{1}{2.3}a^4x^{-3} + \frac{1}{2.4.7}a^8x^{-7} - \frac{1.3}{2.4.6.11}a^{12}x^{-11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15}a^{16}x^{-15}$ &c. $= x - \frac{a^4}{2.3x^3} + \frac{a^8}{2.4.7x^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11x^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15x^{15}}$ &c. in infinitum.

Quodsi alia abscissa sit z; erit longitudo curvæ $z - \frac{a^4}{2.3z^3} + \frac{a^8}{2.4.7z^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15z^{15}}$ &c.

Arcus igitur inter semiordinatas abscissis x & z respondentes interceptus $= x - z - \frac{a^4}{2.3x^3} + \frac{a^4}{2.3z^3} + \frac{a^8}{2.4.7x^7} - \frac{a^8}{2.4.7z^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11x^{11}} + \frac{1.3.a^{12}}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15x^{15}} - \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15z^{15}}$ &c. in infinitum.

Eadem prorsus series prodit, si in elemento curvæ generali $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituatur valor ipsius dx^2, ut elementum curvæ speciale evadat $dy\sqrt{(1 + a^4y^{-4})}$. Enimvero cum y continuo decrescat, nec unquam sit major latere potentiæ a; series hæc altera parum convergit.

Quod-

Quodſi a dicatur 1, erit ſeries pro arcu intercepto $x - z - \frac{1}{2.3\,x^3} + \frac{1}{2.3\,z^3} + \frac{1}{2.4.7\,x^7} - \frac{1}{2.4.7\,z^7} - \frac{1.3.}{2.4.6.11\,x^{11}} + \frac{1.3}{2.4.6.11\,z^{11}} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15\,x^{15}} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15\,z^{15}}$ &c. in infinitum $= x - z - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{56x^7} - \frac{1}{56z^7} - \frac{1}{176x^{11}} + \frac{1}{176z^{11}} + \frac{5}{1920\,x^{15}} - \frac{5}{1920\,z^{15}}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA LXVI.

180. *Data area Hyperbolæ intra aſymptotos; invenire abſciſſam eidem reſpondentem.*

Sit area Hyperbolæ $= t$, abſciſſa a fine lateris potentiæ Hyperbolæ computata $= x$, erit (§. 120)

$$t = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \text{ \&c.}$$

Fiat $x = at + bt^2 + ct^3 + dt^4$ &c.

erit $x^2 = + a^2t^2 + 2abt^3 + b^2t^4 + 2act^4$

$x^3 = + a^3t^3 + 3a^2bt^4$

$x^4 = + a^4t^4$

adeoque

$$x = at + bt^2 + ct^3 + dt^4 \text{ \&c.}$$

$$-\tfrac{1}{2}x^2 = -\tfrac{1}{2}a^2t^2 - abt^3 - \tfrac{1}{2}b^2t^4 - act^4$$

$$+\tfrac{1}{3}x^3 = +\tfrac{1}{3}a^3t^3 + a^2bt^4$$

$$-\tfrac{1}{4}x^4 = -\tfrac{1}{4}a^4t^4$$

$$-t = -t$$

Habemus itaque

$a - 1 = 0$ $\qquad b - \frac{1}{2}a^2 = 0$

$a = 1$ $\qquad b = \frac{1}{2}$

$$c - ab + \tfrac{1}{3}a^3 = 0$$

h. e. $c - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0$

$$c = \tfrac{3}{6} - \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{6}$$

$$d - \tfrac{1}{2}b^2 - ac + a^2b - \tfrac{1}{4}a^4 = 0$$

h. e. $d - \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$

$$d = \tfrac{14}{48} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{24} - \tfrac{6}{24} = \tfrac{1}{24}$$

Eſt igitur $x = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4$ &c. $= \frac{1}{1}t + \frac{1}{1.2}t^2 + \frac{1}{1.2.3}t^3 + \frac{1}{1.2.3.4}t^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5}t^5$ &c. in infinitum. Quodſi terminus primus dicatur A, ſecundus B. tertius C, quartus D &c. erit $x = t + \frac{1}{2}At + \frac{1}{3}Bt + \frac{1}{4}Ct + \frac{1}{5}Dt$ &c. in infinitum.

SCHOLION.

181. *Eodem prorſus modo in aliis caſibus inveniri poteſt baſis, ſi figuræ area datur per ſeriem infinitam, ut pluribus exemplis non ſit opus.*

PROBLEMA LXVII.

182. *Quadrare Cycloidem, ex ſuppoſita arcus Circuli rectificatione vi ſinus verſi.*

In Cycloide eſt arcus AP = PM (§. 575 *part.* 1). Jam ſi AQ $= x$, arcus AP, (§. 157) conſequenter Tab. I Fig. 7.

$$PM = x^{1:2} + \tfrac{1}{6}x^{3:2} + \tfrac{3}{40}x^{5:2} + \tfrac{5}{112}x^{7:2} \text{ \&c.}$$

$$PQ = x^{1:2} - \tfrac{1}{2}x^{3:2} - \tfrac{1}{8}x^{5:2} - \tfrac{1}{16}x^{7:2} \text{ (§. 12[illegible])}$$

$$QM = 2x^{1:2} - \tfrac{1}{3}x^{3:2} - \tfrac{1}{20}x^{5:2} - [illegible]\,x^{7:2}$$

Quare elementum QMmq $= 2x^{1:2}dx - \frac{1}{3}x^{3:2}dx - [illegible]\,x^{5:2}dx$ [illegible] &c. prorſus [illegible] ſupra (§. 131).

SCHO-

SCHOLION.

183. *Methodo hac quadrandi Cycloidem usus est* NEWTONUS (*a*): *quam ideo superiori addidimus, ut appareat, quomodo subinde quadraturæ curvarum ex aliarum rectificationibus de[illegible]cantur. Etenim pro Circulo substitui possunt curvæ aliæ, quarum arcui* AP *æqualis est* PM. *[illegible]ari etiam possunt exempla, in quibus arcus [illegible]tur non per abscissam, ut in exemplo præsente, sed per semiordinatam, veluti si* AP *sit Parabola* (§. 146).

PROBLEMA LXVIII.

184. *Data chorda arcus cujuscunque invenire chordam arcus alterius, qui sit ad illum in ratione data.*

Sit diameter circuli $= d$
chorda arcus dati $= a$
ratio arcuum $= 1 : n$
chorda arcus quæsiti $= x$
erit (§. 169).

arcus datus $= a + \frac{1}{2.3d^2}a^3 + \frac{1.3a^5}{2.4.5d^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7d^6}a^7$ &c $= a + \frac{1}{2.3d^2}a^3 + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}a^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6}a^7$ &c.

arcus quæsitus $= x + \frac{1}{2.3d^2}x^3 + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}x^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6}x^7$ &c.

Quoniam arcus datus ad quæsitum ut 1 ad n; erit (§. 297 *Arithm.*)

$$na + \frac{n}{2.3d^2}a^3 + \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4}a^5 + \frac{3.3.5.5n}{2.3.4.5.6.7d^6}a^7 \text{ \&c.} = x + \frac{1}{2.3d^2}x^3 + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}x^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6}x^7 \text{ \&c.}$$

consequenter si prima series sit $=$ A altera B, erit B — A $= 0$.

Fiat

$$x = ha + ia^3 + ka^5 + la^7 \text{ \&c.}$$
$$x^3 = \quad + h^3a^3 + 3h^2ia^5 + 3h^2ka^7 + 3hi^2a^7$$
$$x^5 = \quad + h^5a^5 + 5h^4ia^7$$
$$x^7 = \quad + h^7a^7$$

adeoque

$$x = ha + ia^3 + ka^5 + la^7 \text{ \&c.}$$
$$+\frac{1}{2.3d^2}x^3 = +\frac{1}{2.3d^2}h^3a^3 + \frac{1}{2d^2}h^2ia^5 + \frac{1}{2d^2}h^2ka^7 \text{ \&c.} + \frac{1}{2d^2}hi^2a^7 \text{ \&c.}$$
$$+\frac{3.3}{2.3.4.5d^4}x^5 = +\frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5a^5 + \frac{3.3}{2.3.4d^4}h^4ia^7 \text{ \&c.}$$
$$+\frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6}x^7 = +\frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6}h^7a^7 \text{ \&c.}$$

&c &c &c

$$— \text{A} = -na - \frac{n}{2.3d^2}a^3 - \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4}a^5 - \frac{3.3.5.5n}{2.3.4.5.6.7d^6}a^7 \text{ \&c.}$$

(*a*) I[illegible]*ysi per æquationes numero terminorum infinitas*, p. 18.

Habemus

Habemus itaque

$$h - n = 0$$

$$h = n$$

$$i + \frac{1}{2.3d^2}h^3 - \frac{n}{2.3d^2} = 0$$

$$i = \frac{n-n^3}{2.3d^2} = \frac{n.(1-n^2)}{2.3d^2}$$

$$k + \frac{1}{2d^2}h^2 i + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5 - \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} = 0$$

$$k = \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} - \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5 - \frac{1}{2d^2}h^2 i$$

Est vero

$$h^5 = n^5 \qquad h^2 = n^2$$

$$\frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5 = \frac{9n^5}{2.3.4.5d^4} \qquad i = \frac{n-n^3}{2.3d^2}$$

$$h^2 i = \frac{n^3-n^5}{2.3d^2}$$

$$\frac{1h^2 i}{2d^2} = \frac{n^3-n^5}{3.4d^4}$$

$$= \frac{10n^3 - 10n^5}{2.3.4.5d^4}$$

Quamobrem

$$k = \frac{9n - 9n^5 - 10n^3 + 10n^5}{2.3.4.5d^4}$$

$$= \frac{9n - 10n^3 + n^5}{2.3.4.5d^4}$$

$$= \frac{n.(1-n^2).(9-n^2)}{2.3.4.5d^4}$$

Eodem modo reperitur $l = \frac{n.(1-n^2).(9-n^2).(25-n^2)}{2.3.4.5.6.7d^6}$

Est igitur chorda arcus quaesiti $= na + \frac{n.(1-n^2)a^3}{1.2.3d^2} + \frac{n.(1-n^2).(9-n^2)}{1.2.3.4.5d^4}a^5 + \frac{n.(1-n^2).(9-n^2).(25-n^2)}{1.2.3.4.5.6.7d^6}a^7$ &c. in infinitum.

S C H O L I O N.

185. *Cum sinus sit arcus dupli subtensa dimidia* (§. 2 Trigon.); *formula praesens sinibus computandis inservit.*

P R O B L E M A LXIX.

186. *Quadrare sectorem Ellips.* DCM.

Ducatur C*m* ex centro C ipsi CM infinite propinqua, & ex eodem centro C radio CM describatur arcus MN, erit angulus ad N rectus (§. 38), & sector infinite parvus CMN = MN. $\frac{1}{2}$ CM (§. 435 *Geom.*). Est vero $Mm^2 - Nm^2 = MN^2$ (§. 417 *Geom.*) Tab. IV. *Fig.* 50.

Sit jam $AC = a$, parameter $= b$, $PC = x$, $PM = y$

erit $AP = a - x$

$PB = a + x$

$AP.\ PB = a^2 - x^2$

consequenter (§. 420 *part.* 1)

$b : AB = PM^2 : AP.\ PB$

$b : 2a = y^2 : a^2 - x^2$

$$y^2 = \frac{a^2b - bx^2}{2a} = \frac{2a^3b - 2abx^2}{4a^2}$$

Porro $CP^2 = x^2$

$$PM^2 = \frac{2a^3b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$CM^2 = x^2 + \frac{2a^3b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$= \frac{4a^2x^2 + 2a^3b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$CM = \frac{1}{2a}\surd(4a^2x^2 + 2a^3b - [illegible])$$

$$= \frac{1}{2a}(4a^2x^2 + 2a^3b - [illegible]$$

Tab. IV. Fig. 50.

$$Nm = \frac{2axdx - bxdx}{\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}}$$

$$Nm^2 = \frac{(4a^2x^2 - 4abx^2 + b^2x^2)\,dx^2}{4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b}$$

Jam $Mm^2 = \frac{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)\,dx^2}{a^4 - a^2x^2}$ (§. 172)

Est vero $c = \frac{1}{2}ab$ (§. 423 *part.* 1)

Ergo $Mm^2 = \frac{(a^4 - a^2x^2 + \frac{1}{2}abx^2)\,dx^2}{a^4 - a^2x^2}$

$$= \frac{(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)\,dx^2}{2a^3b - 2abx^2}$$

Habemus itaque

$$NM^2 = \frac{(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)\,dx^2}{2a^3b - 2abx^2} + \frac{-(4a^2x^2 - 4abx^2 + b^2x^2)\,dx^2}{4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b}$$

Quodsi jam partes has ipsius NM^2 reducas ad eandem denominationem, prodibit $(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b) = 8a^5bx^2 - 8a^3bx^4 + 8a^2b^2x^4 - 8a^4b^2x^2 - 2ab^3x^4 + 4a^6b^2 + 2a^3b^3x^2$ & $(-4a^2x^2 + 4abx^2 - b^2x^2)(2a^3b - 2abx^2) = -8a^5bx^2 + 8a^4b^2x^2 - 2a^3b^3x^2 + 8a^3bx^4 - 8a^2b^2x^4 + 2ab^3x^4$.

Quare $NM^2 = \frac{4a^6b^2\,dx^2}{(2a^3b - 2abx^2)(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}$

adeoque $NM = \frac{2a^3b\,dx}{\sqrt{(2a^3b - 2abx^2)}\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}}$

Jam cum sit $\frac{1}{2}$ CM $= \frac{1}{4a}\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}$; erit tandem elementum sectoris CMN $= \frac{a^2bdx}{2\sqrt{(2a^3b - 2abx^2)}}$

$= \frac{[illegible]\,bdx}{4\sqrt{2ab}.\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ [illegible] $\frac{adx\sqrt{2ab}}{[illegible]\sqrt{(a^2 - x^2)}}$.

Est vero $\sqrt{2ab} = 2c$. Ergo CMN $= \frac{2acdx}{4\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{acdx}{2\sqrt{(a^2 - x^2)}}$; consequenter sector BCM $= \frac{1}{2}c\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$

Enimvero $\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ est elementum arcus circuli LE radio CA descripti, cujus sinus est PC (§. 153). Quare cum in superioribus hunc arcum quadrare docuimus, non alia re opus est, quam ut is ducatur in $\frac{1}{2}c$, sive quartam partem axis minoris CD, ut prodeat sector ellipticus DCM.

COROLLARIUM.

187. Quodsi fiat $c = a$, hoc est CD = CE, Ellipsis degenerat in circulum, & formula pro sectore DCM degenerat in $\frac{1}{2}a\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{1}{2}$ CE. LE, adeoque sector ellipticus DCM in sectorem circuli ECL (§. 435 *Geom.*). Est itaque

DCM : ECL $= \frac{1}{2}c\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} : \frac{1}{2}a\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$

$= c : a$ (§. 124 *part.* 1)

$=$ CD : EL

hoc est, sector ellipticus DCM est ad sectorem circuli circa axem majorem descripti, sinu arcuum PC utrobique existente eodem, ut axis minor ad majorem.

SCHOLION.

188. *Pendet adeo quadratura sectoris elliptici à quadratura sectoris circuli.*

PROBLEMA LXX.

189. *Quadrare sectorem hyperbolicum* CAM, *radio* CM *ex centro* C *ducto.*

Intelligatur radius Cm ipsi CM infinite propinquus, & radio CM describatur

Tab. IV. Fig. 51. batur arcus Circuli MN, erit ad N angulus rectus (§. 38), $MN^2 = Mm^2 - Nm^2$ (§. 417 *Geom.*) & $\frac{1}{2}$ CM. MN sector infinite parvus CMN (§. 435 *Geom.*), seu elementum sectoris hyperbolici quadrandi CAM.

Sit jam $PC = x$

$AC = CB = a$ erit $AP = x - a$

Parameter $= b$ $PB = x + a$

$AP. PB = x^2 - a^2$

adeoque (§. 459 *part.* 1)

$AB : b = AP. PB : PM^2$

$2a : b = x^2 - a^2 : PM^2$

Quare

$$PM^2 = \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$CP^2 = x^2$$

$$CM^2 = x^2 + \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$= \frac{2ax^2 + bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$= \frac{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}{4a^2}$$

$$CM = \frac{1}{2a}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$= \frac{1}{2a}(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)^{1:2}$$

$$Nm = \frac{2axdx + bxdx}{\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}}$$

$$Nm^2 = \frac{dx^2(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

Jam $y^2 = \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$

$$2ydy = \frac{2bxdx}{2a}$$

$$y^2dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{4a^2}$$

$$dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{4a^2y^2}$$

$$= \frac{b^2x^2dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

Tab. IV. Fig. 51.

$$dx^2 + dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{2abx^2 - 2a^3b} + dx^2$$

h. e. $Mm^2 = \frac{(b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$

$$Nm^2 = \frac{(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

$$NM^2 = \frac{(b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)dx^2}{2abx^2 - 2a^3b} + \frac{-(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

Si fiat reductio ad eandem denominationem (§. 235 *Arithm.*), reperitur

$$b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b$$
$$4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b$$

$- 2a^3b^3x^2 - 4a^4b^2x^2 + 4a^6b^2$
$+ 2ab^3x^4 + 4a^2b^2x^4 - 4a^4b^2x^2$
$+ 4a^2b^2x^4 + 8a^3bx^4 - 8a^5bx^2$

&

$- 4a^2x^2 - 4abx^2 - b^2x^2$
$2abx^2 - 2a^3b$

$+ 8a^5bx^2 + 8a^4b^2x^2 + 2a^3b^3x^2$
$- 8a^3bx^4 - 8a^2b^2x^4 - 2ab^3x^4$

consequenter productis hisce in unam summam collectis,

$$NM^2 = \frac{4a^6b^2dx^6}{(2abx^2 - 2a^3b)(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$NM = \frac{2a^3bdx}{\sqrt{(2abx^2 - 2a^3b)}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}}$$

Jam $\frac{1}{2}CM = \frac{1}{4a}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$

O o o 2 $\frac{1}{2}$ CM.

Tab. IV. *Fig.* 51. $\frac{1}{2}$ CM. NM. $= \frac{2a^2bdx}{4\sqrt{(2abx^2 - 2a^3b)}}$

$$= \frac{adx\sqrt{2ab}}{4\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

Est vero $\sqrt{2ab}$ axis conjugatus (§. 561 *part.* 1) qui si dicatur $2c$; erit sectoris hyperbolici elementum

$$= \frac{acdx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

Jam in Hyperbola æquilatera $a = c$ (§. 505 *part.* 1). Ergo elementum sectoris $= \frac{a^2dx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}}$.

Resolvatur $1 : \sqrt{(x^2 - a^2)} = (x^2 - a^2)^{-1:2}$ in seriem (§. 99 *part.* 1) erit

$$m = -1, n = 2, P = x^2, Q = -\frac{a^2}{x^2} = -a^2x^{-2}$$

$$P^{m:n} = x^{-1} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}x^{-1}. -a^2x^{-2} = +\tfrac{1}{2}a^2x^{-3} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}a^2x^{-3}. - a^2x^{-2} = + \frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}.\frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5}. - a^2x^{-2} = + \frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = \tfrac{7}{8}.\frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7}. - a^2x^{-2} = + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}a^8x^{-9}$$

Habemus itaque

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = x^{-1}dx + \tfrac{1}{2}a^2x^{-3}dx + \frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5}dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7}dx + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}a^8x^{-9}dx \text{ \&c. in infinitum.}$$

Quare $\frac{acdx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}} = \tfrac{1}{2}acx^{-1}dx + \tfrac{1}{2}a^3cx^{-3}dx + \frac{1.3}{4.4}a^5cx^{-5}dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}a^7cx^{-7}dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}a^9cx^{-9}dx$ &c.

Habemus itaque sectorem CAM

$$= \tfrac{1}{2}a\int cx^{-1}dx - \frac{1}{2.4}a^3cx^{-2} - \frac{1.3}{4.4.4}a^5cx^{-4} - \frac{1.3.5}{4.4.6.6}a^7cx^{-6} - \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8.8}a^9cx^{-8}$$

$$\text{\&c.} = \tfrac{1}{2}ac\int x^{-1}dx - \frac{a^3c}{2.4x^2} - \frac{1.3}{4.4.4x^4}a^5c - \frac{1.3.5a^7c}{4.4.6.6x^6} - \frac{1.3.5.7a^9c}{4.4.6.8.8x^8} \text{ \&c. in inf.}$$

Quoniam $\frac{1}{2}ac\int x^{-1}dx$ pendet a quadratura Hyperbolæ intra asymptotos (§. 120); evidens est quadraturam sectoris hyperbolici in hoc casu supponere quadraturam Hyperbolæ intra asymptotos.

Quodsi Hyperbola ad axem secundum referenda, fiat dimidius axis secundus $CD = c$, $CA = CB = a$, $CQ = PM = x$, $CP = QM = y$, erit $PM^2 = x^2$, $AP. PB = y^2 - a^2$ & (§. 469 *part.* 1).

$$AC^2 : CD^2 = AP. PB : PM^2$$

$$a^2 : c^2 = y^2 - a^2 : x^2$$

$$\frac{c^2y^2}{a^2} - c^2 = x^2$$

$$\frac{c^2y^2}{a^2} = x^2 + c^2$$

Quoniam linea, quæ est tertia proportionalis ad axem secundum 2CD & primarium AB dicitur parameter respectu axis secundi, quemadmodum parameter

Tab. IV. Fig. 51. rameter respectu axis primarii AB est tertia proportionalis ad AB & 2CD (§. 461 *part.* 1); si parameter respectu axis 2CD dicatur p, erit $c : a = 2a : p$, adeoque $2a^2 : c = p$, consequenter $2a^2 : c^2 = p : c$, & $c^2 : a^2 = 2c : p$. Hoc valore ipsius $c^2 : a^2$ in æquatione substituto, prodit

$$\frac{2cy^2}{p} = x^2 + c^2$$

$$y^2 = \frac{px^2 + pc^2}{2c}$$

Jam $PM^2 = x^2$

$$\text{Ergo } CM^2 = x^2 + \frac{px^2 + pc^2}{2c}$$

$$= \frac{2cx^2 + px^2 + pc^2}{2c}$$

$$= \frac{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3}{4c^2}$$

$$CM = \frac{1}{2c}\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$Nm = \frac{2cxdx + pxdx}{\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}}$$

$$\text{Porro } y^2 = \frac{px^2 + pc^2}{2c}$$

$$\text{adeoque } 2ydy = \frac{2pxdx}{2c}$$

$$dy^2 = \frac{p^2x^2dx^2}{4c^2y^2}$$

$$= \frac{p^2x^2dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3}$$

$$Mm^2 = \frac{p^2x^2dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3} + dx^2$$

$$= \frac{p^2x^2dx^2 + 2pcx^2dx^2 + 2pc^3dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3}$$

$$Nm^2 = \frac{(4c^2x^2 + 4pcx^2 + p^2x^2)dx^2}{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3}$$

Tab. IV. Fig. 51.

$$NM^2 = \frac{(p^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3}$$

$$+ \frac{-(4c^2x^2 + 4pcx^2 + p^2x^2)dx^2}{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3} =$$

$$\frac{4p^2c^6dx^2}{(2pcx^2 + 2pc^3)(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$NM = \frac{2pc^3dx}{\sqrt{(2pcx^2 + 2pc^3)}.\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}}$$

$$\tfrac{1}{2}CM = \frac{1}{4c}\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$CMN = \frac{2pc^2dx}{4\sqrt{2pc}.\sqrt{(x^2 + c^2)}} = \frac{cdx\sqrt{2pc}}{4\sqrt{(c^2 + x^2)}}$$

$$= \frac{acdx}{2\sqrt{(c^2 + x^2)}} \text{ ob } \sqrt{2pc} = 2a$$

$$= \tfrac{1}{2}acdx\,(c^2 + x^2)^{-1:2}$$

Resolvatur $1 : \sqrt{(c^2 + x^2)}$ in seriem: erit in Theoremate generali (§. 99 *part.* 1.)

$$m = -1,\ n = 2,\ P = c^2,\ Q = \frac{x^2}{c^2}$$

$$P^{m:n} = c^{-1} = \frac{1}{c} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}.\frac{1}{c}.\frac{x^2}{c^2} = -\frac{x^2}{2c^3} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.-\frac{x^2}{2c^3}.\frac{x^2}{c^2} = +\frac{1.3x^4}{2.4c^5} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}.\frac{1.3x^4}{2.4c^5}.\frac{x^2}{c^2} = -\frac{1.3.5x^6}{2.4.6c^7} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{7}{8}.-\frac{1.3.5x^6}{2.4.6c^7}.\frac{x^2}{c^2} =$$

$$\frac{1.3.5.7x^8}{2.4.6.8c^9} \text{ \&c.}$$

Tab. IV. Fig. 51. Est itaque $\frac{acdx}{2\sqrt{(c^2+x^2)}} = \frac{1}{2}adx - \frac{ax^2dx}{4c^2} + \frac{1.3ax^4dx}{4.4c^4} - \frac{1.3.5ax^6dx}{4.4.6c^6} + \frac{1.3.5.7ax^8dx}{4.4.6.8c^8}$ &c. consequenter CMA $= \frac{1}{2}ax - \frac{ax^3}{3.4c^2} + \frac{1.3ax^5}{4.4.5c^4} - \frac{1.3.5ax^7}{4.4.6.7c^6} + \frac{1.3.5.7ax^9}{4.4.6.8.9c^8}$ &c.

Patet igitur, quadraturam sectoris hyperbolici CAM hoc in casu non pendere a quadratura Hyperbolæ intra asymptotos. Quoniam tamen x ultra a in infinitum excrescit; ubi procul a vertice discesseris, series posterior minus convergit priori; sed quandiu $x < a$, eadem magis convergit.

COROLLARIUM I.

190. Quoniam in Hyperbola $y^2 = (bx^2 + bc^2) : 2c$; erit $2c : b = x^2 + c^2 : y^2$, hoc est, axis secundus seu conjugatus est ad ipsius parametrum ut quadratum semiordinatæ PM & dimidii axis conjugati CD ad quadratum distantiæ semiordinatæ a centro CP.

COROLLARIUM II.

191. Cum in Hyperbola æquilatera sit $c = a$, sector hyperbolicus est $\int (a^2\,dx : 2\sqrt{(a^2+x^2)}) = \frac{1}{2}ax - \frac{x^3}{3.4a} + \frac{1.3x^5}{4.4.5a^3} - \frac{1.3.5x^7}{4.4.6.7a^5} + \frac{1.3.5.7x^9}{4.4.6.8.9a^7}$ &c.

PROBLEMA LXXI.

Tab. IV. Fig. 5. 192. *Data tangente* AE *arcus elliptici* AM; *invenire sectorem* AMC.

Quoniam tangens AE axi conjugato DC est parallela (§. 448, 444 *part.* I), DC vero ad AB perpendicularis; erit etiam EA perpendicularis ad AB (§. 230 *Geom.*), adeoque angulus ad A rectus (§. 78 *Geom.*). Sit jam AC $= a$, CD $= 1$, AE $= x$, PM $= y$. Ducatur Ce ipsi CE infinite propinqua, & ex centro C radio CE arcus EN, atque radio CM arcus MO. Erit $\triangle$ EeN $\sim \triangle$ AEC, quemadmodum supra in casu simili (§. 124) demonstratum est, Ee $= dx$, & ob EC^2 = AE^2 + AC^2 (§. 417 *Geom.*) EC $= \sqrt{(x^2+a^2)}$. Jam cum sit (§. 267 *Geom.*)

$$EC : AC = Ee : EN$$
$$\sqrt{(x^2+a^2)} : a = dx : EN$$

erit $EN = \frac{adx}{\sqrt{(x^2+a^2)}}$

Porro, ob parallelismum rectarum AE & PM (§. 256 *Geom.*), erit (§. 268 *Geom.*)

$$EA : AC = PM : PC$$
$$x : a = y : PC$$

adeoque $PC = \frac{ay}{x}$

$$PC^2 = \frac{a^2y^2}{x^2}$$

Porro (§. 432 *part.* I)

$$CD^2 : AC^2 = PM^2 : AC^2 - PC^2$$
$$1 : a^2 = y^2 : a^2 - \frac{a^2y^2}{x^2}$$

Quare (§. 297 *Arithm.*)

$$a^2y^2 = \frac{a^2x^2 - a^2y^2}{x^2}$$

$$x^2y^2 = x^2 - y^2$$

$$x^2y^2 + y^2 = x^2$$

$$PM^2 = y^2 = \frac{x^2}{x^2+1}$$

PC^2

Tab. IV. Fig. 52.

$$PC^2 = \frac{a^2y^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2+1}$$

$$CM^2 = \frac{x^2+a^2}{x^2+1}$$

$$CM = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)}}{\sqrt{(x^2+1)}}$$

Denique ob sectores similes CEN & CMO (§. 137, 412 *Geom.*)

$$CE : EN = CM : OM$$

$$\sqrt{(x^2+a^2)} : \frac{adx}{\sqrt{(x^2+a^2)}} = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)}}{\sqrt{(x^2+1)}} : OM$$

adeoque $OM = \frac{adx}{\sqrt{(x^2+a^2)}\sqrt{(x^2+1)}}$

Jam $\frac{1}{2} CM = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)}}{2\sqrt{(x^2+1)}}$

Ergo $CMO = \frac{\frac{1}{2}adx}{1+x^2}$

Est igitur elementum sectoris elliptici ACE idem cum sectore circuli (§. 124), si $CD = 1$.

Quare sector $AMC = \frac{1}{2}a(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$ &c. in infinit.).

PROBLEMA LXXII.

Tab. IV. Fig. 52. 193. *Dato sectore* KFB, *recta* KF *ex foco Ellipsis ducta; invenire semiordinatam* KQ.

Sit $AC = CB = a$, $QK = y$, $FB = b$, sector $KFB = \frac{1}{2}v$, $CD = c$; erit differentiale ejus $\frac{1}{2}dv$ & ob $QB . QA = BC^2 - QC^2$ (§. 431 *part.* 1) ex natura Ellipsis (§. 430 *part.* 1)

$$CD^2 : CB^2 = QK^2 : CB^2 - QC^2$$

adeoque $CD^2 : QK^2 = CB^2 : CB^2 - QC^2$ (§. 124 *part.* 1.)

$$CD^2 : CD^2 - QK^2 = CB^2 : QC^2$$

$$c^2 : c^2 - y^2 = a^2 :$$

consequenter $CQ^2 = a^2(c^2 - y^2) : c^2$

$$CQ = a\sqrt{(c^2-y^2)} : c$$
$$CB = a$$

$$QB = a - a\sqrt{(c^2-y^2)} : c$$
$$FB = b$$

$$FQ = b - a + a\sqrt{(c^2-y^2)} : c$$

Differentiale ipsius $FQ = \frac{aydy}{c\sqrt{(c^2-y^2)}}$

$$KQ = y$$

Elementum segmenti $KQB = \frac{ay^2dy}{c\sqrt{(c^2-y^2)}}$

Porro

$$FQ = b - a + a\sqrt{(c^2-y^2)} : c$$
$$\tfrac{1}{2} QK = \tfrac{1}{2}y$$

$$\triangle FQK = \tfrac{1}{2}by - \tfrac{1}{2}ay + ay\sqrt{(c^2-y^2)} : 2c$$

differentiale $\triangle FQK = \frac{1}{2}bdy - \frac{1}{2}ady - \frac{ay^2dy}{2c\sqrt{(c^2-y^2)}} + ady\sqrt{(c^2-y^2)} : 2c$

hoc est, reductione ad eandem denominationem facta.

$$d\triangle FQK = \frac{(bc-ac)\sqrt{(c^2-y^2)}dy + (ac^2-2ay^2)dy}{2c\sqrt{(c^2-y^2)}}$$

$$dKQB = \frac{2ay^2dy}{2c\sqrt{(c^2-y^2)}}$$

$$dFKB = \frac{(bc-ac)\sqrt{(c^2-y^2)}dy + ac^2dy}{2c\sqrt{(c^2-y^2)}}$$

$$= \frac{ac + (b-a)\sqrt{(c^2-y^2)}}{2\sqrt{(c^2-y^2)}}dy$$

Habemus itaque

$$\frac{ac + (b-a)\sqrt{(c^2-y^2)}}{2\sqrt{(c^2-y^2)}}dy = \tfrac{1}{2}dv$$

$$(ac + (b-a)\sqrt{c^2-y^2})dy = dv\sqrt{(c^2-y^2)}$$

$$\frac{dy}{dv}(ac + (b-a)\sqrt{(c^2-y^2)}) = \sqrt{(c^2-y^2)}$$

dy

$\frac{dy}{dv}(ac+(b-a)\sqrt{(c^2-y^2)})-\sqrt{(c^2-y^2)}=0$

Jam ut valor ipſius y per v exprimatur, quod eſt quod quæritur, fiat

$y=hv+iv^3+lv^5+mv^7$ &c.

Erit $dy=hdv+3iv^2dv+5lv^4dv+7mv^6dv$ &c.

$\frac{dy}{dv}=h+3iv^2+5lv^4+7mv^6$, &c.

$y^2=h^2v^2+2hiv^4+i^2v^6$
$+2hlv^6$ &c.

$y^4=h^4v^4+4h^3iv^6$ &c.

$y^6=h^6v^6$ &c.

Porro (§. 99 *part.* I)

$$\sqrt{(c^2-y^2)}=c-\frac{y^2}{2c}-\frac{y^4}{8c^3}-\frac{y^6}{16c^5}\text{ \&c.}$$
$$=c-\frac{h^2v^2}{2c}-\frac{2hiv^4}{2c}-\frac{i^2v^6}{2c}\text{ \&c.}$$
$$-\frac{2hlv^6}{2c}\text{ \&c.}$$
$$-\frac{h^4v^4}{8c^3}-\frac{4h^3iv^6}{8c^3}\text{ \&c.}$$
$$-\frac{h^6v^6}{16c^5}\text{ \&c.}$$

$$\frac{bdy}{dv}=bh+3biv^2+5blv^4+7bmv^6\text{ \&c.}$$

$$\frac{bdy}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)}=bch+3bciv^2+5bclv^4+7bcmv^6$$
$$-\frac{bh^3}{2c}v^2-\frac{2bh^2i}{2c}v^4-\frac{bhi^2}{2c}v^6$$
$$-\frac{2bh^2l}{2c}v^6$$
$$-\frac{bh^5}{8c^3}v^4-\frac{4bh^4i}{8c^3}v^6$$
$$-\frac{3bh^2i}{2c}v^4-\frac{bh^7}{16c^5}v^6$$
$$-\frac{6bhi^2}{2c}v^6$$
$$-\frac{5bh^2l}{2c}v^6$$
$$-\frac{3bh^4i}{8c^3}v^6$$

Quodſi pro b ſubſtituatur a, prodibit valor ipſius $\frac{ady}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)}$.

Quamobrem, ſi hi valores in æquatione $\frac{dy}{dv}(ac+(b-a)\sqrt{(c^2-y^2)})-\sqrt{(c^2-y^2)}=0$ ſubſtituantur, prodibit

$\frac{acdy}{dv}$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{acdy}{dv} & = & ach + 3aciv^2 + 5aclv^4 + 7acmv^6 \text{ \&c.} \\
\frac{bdy}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)} & = & bch + 3bciv^2 + 5bclv^4 + 7bcmv^6 \text{ \&c.} \\
 & & \quad - \frac{bh^3}{2c}v^2 - \frac{5bh^2i}{2c}v^4 - \frac{bhi^2}{2c}v^6 \\
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{7bh^2l}{2c}v^6 \\
 & & \qquad\qquad - \frac{bh^5}{8c^3}v^4 - \frac{7bh^4i}{8c^3}v^6 \\
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{bh^7}{16c^5}v^6 \\
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{6bhi^2}{2c}v^6 \\
-\frac{ady}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)} & = & -ach - 3aciv^2 - 5aclv^4 - 7acmv^6 \text{ \&c.} \\
 & & \quad + \frac{ah^3}{2c}v^2 + \frac{5ah^2i}{2c}v^4 + \frac{ahi^2}{2c}v^6 \\
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{7ah^2l}{2c}v^6 \\
 & & \qquad\qquad - \frac{ah^5}{8c^3}v^4 + \frac{7ah^4i}{8c^3}v^6 \\
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{ah^7}{16c^5}v^6 \\
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{6ahi^2}{2c}v^6 \\
-\sqrt{(c^2-y^2)} & = & -c + \frac{h^2}{2c}v^2 + \frac{2hi}{2c}v^4 + \frac{i^2}{2c}v^6 \text{ \&c.} \\
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{2hl}{2c}v^6 \\
 & & \qquad\qquad + \frac{h^4}{8c^3}v^4 + \frac{4h^3i}{8c^3}v^6 \\
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{h^6}{16c^5}v^6 = 0
\end{array}$$

Habemus itaque

$$ach + bch - ach - c = 0$$
$$bch - c = 0$$
$$bh - 1 = 0$$
$$bh = 1$$
$$h = 1 : b$$
$$3aci + 3bci - \frac{bh^3}{2c} - 3aci + \frac{ah^3}{2c} + \frac{h^2}{2c} = 0$$

$$3bci - \frac{bh^3}{2c} + \frac{ah^3}{2c} + \frac{h^2}{2c} = 0$$
$$6bc^2i - bh^3 + ah^3 + h^2 = 0$$
$$6bc^2i = bh^3 - ah^3 - h^2$$
$$= \frac{1}{b^2} - \frac{a}{b^3} - \frac{1}{b^2}$$
$$= -\frac{a}{b^3}$$
$$i = -\frac{a}{6b^4c^2}$$

5acl

$$5acl + 5bcl - \frac{5bh^2i}{2c} - \frac{bh^5}{8c^3} - 5acl$$
$$+ \frac{5ah^2i}{2c} + \frac{ah^5}{8c^3} + \frac{2hi}{2c} + \frac{h^4}{8c^3} = 0$$

hoc est, $5bcl - \frac{5bh^2i}{2c} - \frac{bh^5}{8c^3} + \frac{5ah^2i}{2c}$
$$+ \frac{ah^5}{8c^3} + \frac{2hi}{2c} + \frac{h^4}{8c^3} = 0$$

$$40bc^4l - 20bc^2h^2i - bh^5 + 20ac^2h^2i$$
$$+ ah^5 + 8c^2hi + h^4 = 0$$

$$40bc^4l = 20bc^2h^2i + bh^5 - 20ac^2h^2i - ah^5$$
$$- 8c^2hi - h^4$$

$$h^2 = \frac{1}{b^2} \qquad bh^5 = \frac{1}{b^4}$$

$$i = -\frac{a}{6b^4c^2} \qquad -ah^5 = -\frac{a}{b^5}$$

$$h^2i = -\frac{a}{6b^6c^2} \qquad hi = -\frac{a}{6b^5c^2}$$

$$20bc^2h^2i = -\frac{10a}{3b^5} \qquad -8c^2hi = +\frac{4a}{3b^5}$$

$$-20ac^2h^2i = +\frac{10a^2}{3b^6}$$

Ergo $40bc^4l =$

$$-\frac{10a}{3b^5} + \frac{1}{b^4} + \frac{10a^2}{3b^6} - \frac{3a}{3b^5} + \frac{4a}{3b^5} - \frac{1}{b^4}$$
$$= \frac{10a^2}{3b^6} - \frac{9a}{3b^5} = \frac{10a^2 - 9ab}{3b^6}$$

$$l = \frac{10a^2 - 9ab}{120b^7c^4}$$

Reperitur eodem modo $m = -\frac{280a^3 + 504a^2b - 225ab^2}{5040b^{10}c^6}$, adeoque tandem $y = \frac{1}{b}v - \frac{a}{6b^4c^2}v^3 + \frac{10a^2 - 9ab}{120b^7c^4}v^5 - \frac{280a^3 + 504a^2b - 225ab^2}{5040b^{10}c^6}v^7$, &c.

PROBLEMA LXXIII.

194. *Quadrare sectorem hyperbolicum* CAM, *data tangente ad verticem* AE.

Calculus prorsus idem, qui supra pro Ellipsi in casu simili (§. 192). Si enim $AC = CB = a$ $PM = y$
$AE = x$ $CD = 1$
erit $Ee = dx$ $EC = \sqrt{(x^2 + a^2)}$
&, ob △△ AEC & EeN similitudinem, $EN = adx : \sqrt{(x^2 + a^2)}$; ob similitudinem vero △△CPM & CAE, ut in Ellipsi, $PC = ay : x$, atque, ob analogiam $CD^2 : AC^2 = PM^2 : PC^2 - AC^2$ ex natura hyperbolæ (§. 469 *part.* 1) $a^2y^2 = (a^2y^2 - a^2x^2) : x^2$. Hinc ut supra reperitur $CM = \sqrt{(a^2 + x^2)} : \sqrt{(1 - x^2)}$, & ob $CE : EN = CM : OM$, porro $OM = adx : \sqrt{(a^2 + x^2)}\sqrt{(1 - x^2)}$, tandemque elementum MOC sectoris CMA $= \frac{\frac{1}{2}adx}{1 - x^2}$: quod idem prorsus est, quod pro Ellipsi & Circulo reperimus, (§. 124, 192) nisi quod illic sit $+ x^2$, hic $- x^2$. Unde prodit, ut supra, sector CMA, $\frac{1}{2}a\,(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$, &c. in infin.).

Ta IV Fi 5

COROLLARIUM.

195. Eadem ergo series sectoribus circuli, ellipsis, atque hyperbolæ ex data tangente inveniendis inservit, nisi quod pro hyperbola signa omnia sint positiva.

CAPUT

CAPUT IV.

De usu Calculi integralis in cubandis Solidis & dimetiendis superficiebus eorundem.

DEFINITIO VIII.

196. Solidum *cubare* idem est ac spatium solido comprehensum dimetiri.

PROBLEMA LXXIV.

Tab.II. Fig.19. 197. *Cubare solidum ex rotatione figuræ planæ* ANQ *circa rectam* AQ *tanquam axem facta genitum.*

RESOLUTIO.

Sit semiordinata pm alteri PM infinite propinqua: parallelogrammulum PMRp haud differet a trapeziolo PMmp (§. 99). Cylindrulus ergo, quem in rotatione figuræ ANQ circa axem AQ describit parallelogrammulum PMRp (§. 465 *Geom.*) est elementum solidi per illam rotationem producti: cujus adeo summa dat integrum solidum, quia ex innumeris cylindrulis eodem modo formatis constare concipitur.

Sit jam AP $=x$, PM $=y$, erit P$p=dx$. Sit porro ratio radii ad peripheriam $=r:p$, erit peripheria circuli radio PM descripti $=py:r$; consequenter area $py^2:2r$ (§. 429 *Geom.*), quæ ducta in Pp, sive dx, dat soliditatem cylindruli seu elementi solidi $=py^2dx:2r$ (§. 541 *Geom.*).

Quodsi jam ex æquatione ad curvam speciali substituatur valor ipsius y^2; habebitur, si elementum integrari possit, soliditas segmenti, cujus altitudo AP, radius basis PM, hoc est revolutione ipsius AMP circa AP geniti.

PROBLEMA LXXV.

198. *Cubare Conum.* Tab.II. Fig.17.

Conus describitur, si triangulum ADC circa axem DC rotatur (§. 467 *Geom.*). Sit DC $=a$, AC $=r$, PM $=y$, DP $=x$; erit (§. 268 *Geom.*).

$$DP : PM = DC : CA$$
$$x : y = a : r$$

Hinc $rx : a = y$

& $r^2x^2 : a^2 = y^2$

$py^2\,dx : 2r = pr^2x^2dx : 2a^2r = prx^2dx : 2a^2$ (§. 197).

$\int py^2\,dx : 2r = prx^3 : 6a^2$.

Quodsi pro x substituatur a; habebitur soliditas totius Coni, $pra^3 : 6a^2 = \frac{1}{6}apr = \frac{1}{2}pr.\frac{1}{3}a$. Basis nempe $\frac{1}{2}pr$ ducenda est in tertiam altitudinis partem $\frac{1}{3}a$, ut ex Elementis Geometriæ constat (§. 548 *Geom.*).

PROBLEMA LXXVI.

199. *Cubare Sphæram.*

Sphæra cum describatur per rotationem semicirculi circa diametrum ejus (§. 470 *Geom.*); erit, si diameter sit $2r$,

$yy = 2rx - x^2$ (§. 377 *part.* 1).

Unde $py^2dx : 2r = pxdx - px^2dx : 2r$

$\int py^2dx : 2r = \frac{1}{2}px^2 - px^3$ [illegible]

Habemus adeo indefinitam cubationem segmenti sphærici, cujus diameter $2r$, altitudo x.

 Quod-

Quodsi ergo pro x substituatur diameter $2r$; prodibit soliditas sphæræ integræ $2pr^2 - 8pr^3 : 6r = 2pr^2 - \frac{4}{3}pr^2 = \frac{2}{3}pr^2 = 2rp . \frac{1}{3}r$. Nimirum rectangulum ex diametro $2r$ in peripheriam p multiplicandum est per tertiam radii, aut sextam diametri partem $\frac{1}{3}r$. Denique si diameter $2r$ sit 1; erit soliditas sphæræ $\frac{1}{6}p$.

COROLLARIUM I.

200. Sphæra igitur æquatur pyramidi quadrangulari, cujus basis est rectangulum ex diametro sphæræ $2r$ in peripheriam eadem descriptam, altitudo semidiameter sphæræ (§. 548 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

201. Cylindri sphæræ circumscripti soliditas est pr^2 (§. 541 *Geom.*). Est itaque ad sphæram ut pr^2 ad $\frac{2}{3}pr^2$, hoc est, ut 1 ad $\frac{2}{3}$, seu ut 3 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA LXXVII.

202. *Cubare Conoides parabolicum, ex rotatione parabolæ cujuscunque generis circa axem suum genitum.*

Sit parameter $= 1$, erit æquatio ad infinita parabolarum genera (§. 519 *part.* 1)

$$y^m = x$$
$$y = x^{1:m}$$
$$y^2 = x^{2:m}$$
$$py^2dx : 2r = px^{2:m}\, dx : 2r$$
$$\int py^2dx : 2r = mpx^{2:m+1} : (4 + 2m)r$$
$$= mpy^2x : (4 + 2m)r$$

Sit altitudo totius conoidis $= a$, diameter baseos $2r$: erit a pro x, & r pro y substituto, soliditas totius conoidis

$$mpr^2 a : (4 + 2m)r = \frac{m}{4+2m}apr$$
$$= \frac{1}{2}pr . \frac{m}{2+m}a.$$

Ex. gr. Si parabola genitrix fuerit *Apolloniana*, erit $m = 2$, adeoque $m : (2 + m) = 2 : (2 + 2) = \frac{1}{2}$. Basis ergo ducenda est in dimidiam altitudinem: consequenter conoides cylindri super eadem basi & ejusdem altitudinis subduplum (§. 541 *Geom.*).

PROBLEMA LXXVIII.

203. *Cubare sphæroides ellipticum ex rotatione Ellipsis* Apollonianæ *circa axem genitum.*

Quoniam ad Ellipsin *Apollonianam* (§. 420 *part.* 1).

$$y^2 = bx - bx^2 : a$$

erit $py^2dx : 2r = pbxdx : 2r - pbx^2dx : 2ar$

$$\int py^2\, dx : 2r = pbx^2 : 4r - pbx^3 : 6ar$$

Quodsi pro abscissa x substituatur axis a, prodibit soliditas integri sphæroidis $pba^2 : 4r - pba^3 : 6ar = pba^2 : 4r - pba^2 : 6r = (6pba^2 - 4pba^2) : 24r = pba^2 : 12r$.

COROLLARIUM I.

204. Quodsi $2r$ ponatur axi conjugato æqualis; erit $4r^2 = ab$ (§. 423 *part.* 1). Unde soliditas sphæroidis habetur $4par^2 : 12r = \frac{1}{3}par$; hoc est, sphæroides ellipticum æquatur cono, cujus altitudo axi majori a æqualis, basis vero dupla circuli circa axem minorem descripti (§. 548 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

205. Quoniam cylindri circumscripti altitudo $= a$, diameter $= 2r$, adeoque soliditas $= \frac{1}{2}apr$ (§. 541 *Geom.*); erit sphæroides ellipticum ad cylindrum circumscriptum ut $\frac{1}{3}apr$ ad $\frac{1}{2}apr$, hoc est, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, seu ut 2 ad 3 (§. 124 *part.* 1).

COROLLARIUM III.

206. Si diameter sphæræ $= a$, erit peripheria circuli maximi (posita ratione radii ad peripheriam $= r:p$) $= ap:2r$; consequenter sphæra $= a^3p : 12r$. Est adeo sphæroides ellipticum ad sphæram axe majore a descriptam ut $\frac{1}{3}apr$ ad $a^3p : 12r$, hoc est, (dividendo per $\frac{1}{3}ap$)

$\frac{1}{3}ap$) ut r ad $a^2 : 4r$, seu ut $4r^2$ ad a^2, nempe ut quadratum axis minoris ad quadratum majoris.

COROLLARIUM IV.

207. Si diameter sphæræ $= 2r$, erit soliditas $= \frac{2}{3} pr^2$ (§.199). Est itaque sphæroides ellipticum ad sphæram axe minore $2r$ descriptam, ut $\frac{1}{3} par$ ad $\frac{2}{3} pr^2$, hoc est, ut a ad $2r$ (§.124 *part.* 1.), seu ut axis major ad minorem.

PROBLEMA LXXIX.

208. *Cubare Conoides hyperbolicum ex rotatione hyperbolæ* Apollonianæ *circa axem genitum.*

Quoniam ad Hyperbolam scalenam (§. 459 *part.* 1)

$$y^2 = bx + bx^2 : a$$

erit $py^2dx : 2r = pbxdx : 2r + pbx^2dx : 2ar$

& $\int py^2dx : 2r = pbx^2 : 4r + pbx^3 : 6ar$.

Et quia ad Hyperbolam æquilateram (§.507 *part.* 1.)

$$y^2 = ax + x^2$$

erit $py^2dx : 2r = (apxdx + px^2dx) : 2r$

& $\int py^2dx : 2r = apx^2 : 4r + px^3 : 6r$

COROLLARIUM.

209. Si altitudo conoidis fuerit axi transverso æqualis, hoc est, si $x = a$; erit soliditas conoidis in casu priore $pba^2 : 4r + pba^3 : 6ar = (6pba^2 + 4pba^2) : 24r = 10pba^2 : 24r = 5pba^2 : 12r$.

PROBLEMA LXXX.

Tab.II. Fig.22. 210. *Cubare solidum ex rotatione Cissoidis circa axem* AB *genitum.*

Sit AB $= 1$, AP $= x$, PM $= y$; erit (§. 548 *part.* 1.)

$$y^2 = x^3 : (1 - x)$$

$$py^2dx : 2r = px^3dx : 2r(1 - x)$$

hoc est, quia $2r = \text{AB} = 1$,

$$py^2dx : 2r = px^3dx : (1 - x).$$

Est vero $x^3 : (1 - x) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$ &c. in infinitum (§. 45 *part.* 1). Ergo $py^2dx : 2r = px^3dx + px^4dx + px^5dx + px^6dx + px^7dx + px^8dx$ &c. in infinitum.

Et hinc $\int py^2dx : 2r = \frac{1}{4}px^4 + \frac{1}{5}px^5 + \frac{1}{6}px^6 + \frac{1}{7}px^7 + \frac{1}{8}px^8 + \frac{1}{9}px^9$, &c. definit solidum portione APM descriptum. Fig. 22. Quod si pro x substituatur AB $= 1$; prodit solidum integrum $\frac{1}{4}p + \frac{1}{5}p + \frac{1}{6}p + \frac{1}{7}p + \frac{1}{8}p + \frac{1}{9}p$ &c. seu $p(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$ &c. in infinitum.)

PROBLEMA LXXXI.

211. *Cubare solidum ex rotatione Logisticæ circa asymptotum* AH *genitum.* Tab. I. Fig. 8.

In Logistica, cujus subtangens $= a$, est (§. 54).

$$ydx = ady$$

$$dx = ady : y$$

$$py^2dx : 2r = paydy : 2r$$

$$\int py^2dx : 2r = pay^2 : 4r$$

Quod si pro y substituatur AB $= r$, erit integrum solidum $par^2 : 4r = \frac{1}{4}apr$.

COROLLARIUM.

212. Cylindrus, cujus altitudo $= a$, radius basis $= r$, est $\frac{1}{2}apr$ (§. 541 *Geom.*); adeoque ad solidum logisticum ut $\frac{1}{2}apr$ ad $\frac{1}{4}apr$, hoc est, ut 2 ad 1 (§. 124 *part.* 1).

SCHOLION.

213. *Facile hinc apparet, quod inventis methodo hactenus exposita expressionibus solidorum, ea inter se facile comparentur, unumque in alterum transformetur.*

PROBLEMA LXXXII.

214. *Cubare solidum ex rotatione Parabolæ circa semiordinatam* QN *genitum.* Tab.II. Fig.25.

Ex resolutione Problematis 74 (§. 197) manifestum est, elementum solidi esse circulum radio MR descriptum in differentiale Rr ipsius NR ductum.

 Sit

Tab.II. Fig.25. Sit itaque ratio radii ad peripheriam $= r : p$, AQ$= r$, AP$= x$, QN$= b$, PM$= y$, erit R$r = dy$, MR $=$ PQ $=$ AQ—AP$= r — x$, peripheria radio MR descripta $= p — px : r$; consequenter area circuli $\frac{1}{2} pr — px + px^2 : 2r$ (§. 429 *Geom.*) & hinc elementum solidi $\frac{1}{2} prdy — pxdy + px^2 dy : 2r$.

Si jam parameter parabolæ 1; erit $y^2 = x$ (§. 388 *part.* 1) & $y^4 = x^2$; quibus valoribus in expressione elementi generali substitutis, erit id $\frac{1}{2} prdy — py^2 dy + py^4 dy : 2r$. Hujus integrale $\frac{1}{2} pry — \frac{1}{3} py^3 + py^5 : 10r$ indefinite exprimit solidum ex rotatione portionis MNR circa NR genitum.

Quodsi pro y^2 ponatur x; habebimus pro eodem solido $\frac{1}{2} pry — \frac{1}{3} pxy + px^2 y : 10r = p (\frac{1}{2} ry — \frac{1}{3} xy + x^2 y : 10r)$.

Denique si pro y substituatur b, pro x vero r; prodibit solidum integrum $p (\frac{1}{2} br — \frac{1}{3} br + \frac{1}{10} br) = (30 — 20 + 6)$ $pbr : 60 = \frac{8}{30} pbr = \frac{1}{2} pr . \frac{8}{15} b$, hoc est, basis seu circulus radio AQ descriptus ducitur in $\frac{8}{15}$ altitudinis QN.

COROLLARIUM.

215. Cylindrus super eadem basi & ejusdem altitudinis est $\frac{1}{2} pbr$ (§. 541 *Geom.*); adeoque ad solidum hoc parabolicum ut $\frac{1}{2} pbr$ ad $\frac{1}{2} pbr . \frac{8}{15}$, hoc est, ut 1 ad $\frac{8}{15}$, seu ut 15 ad 8 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA LXXXIII.

Tab.II. Fig.26. 216. *Cubare solidum ex rotatione spatii interminati hyperbolici juxta asymptotum* CD *tanquam axem genitum.*

Sit AB$= a$, AC$= b$, CP$= x$, PM$= y$; erit P$p = dx$, & posita peripheria radio AC descripta $= p$, peripheria radio PC descripta $px : b$, quæ ducta in PM $= y$, dat superficiem cylindri parallelogrammo CPMR descripti $= pxy : b$ (§. 541 *Geom.*). Hæc vero si ulterius ducatur in P$p = dx$, prodibit cylindrulus cavus, parallelogrammulo Pp QM descriptus, seu elementum solidi $= pxydx : b$.

Est vero ex natura hyperbolæ intra asymptotos

$$xy = ab \text{ (§. 502 } part. \text{ 1).}$$

Quare $pxydx : b = pabdx : b = padx$

$$\int pxydx : b = pax.$$

Quodsi pro x substituatur b; prodibit solidum integrum pab.

COROLLARIUM.

217. Cylindrus ex rotatione parallelogrammi ACSB circa axem CS geniti est $\frac{1}{2} pba$ (§. 541 *Geom.*), adeoque ad solidum hyperbolicum ut $\frac{1}{2} pba$ ad pba, hoc est ut $\frac{1}{2}$ ad 1, seu ut 1 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

SCHOLION.

218. *Possunt etiam figuræ planæ rotari circa tangentes, vel alias lineas quascunque; Sed cum nihil in his difficultatis sit, plura non addimus.*

PROBLEMA LXXXIV.

219. *Metiri superficiem corporis rotatione figuræ* ANQ *circa axem* AQ *geniti.*

RESOLUTIO.

Sit ratio radii ad peripheriam$= r : p$, AP$= x$, PM$= y$, erit Pp=MR$= dx$, mR$= dy$; M$m = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, peripheria radio PM descripta$= py : r$, quæ ducta in Mm dat elementum superficiei solidi ex rotatione circa axem AQ geniti $py \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r$.

Quodsi jam ex natura figuræ ANQ valor ipsius dx^2 substituatur, & elementum integrabile fiat; superficies desiderata per summationem habetur.

PRO-

PROBLEMA LXXXV.

Tab.II. Fig.17. 220. *Invenire superficiem Coni.*

Cum Conus gignatur ex rotatione trianguli ACD circa axem DC; ex æquatione ad triangulum in expressione generali ante (§. 198) inventa substituendus est valor ipsius dx^2. Sit nempe $CD = a$, $AC = r$, $DP = x$, $PM = y$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$x : y = a : r$$

$$x = ay : r$$

$$dx = ady : r$$

$$dx^2 = a^2dy^2 : r^2$$

$$py \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r$$
$$= py \sqrt{(a^2dy^2 + r^2 dy^2)} : r^2$$
$$= pydy \sqrt{(a^2 + r^2)} : r^2$$

$$\int py \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r = py^2 \sqrt{(a^2 + r^2)} : 2r^2$$

Quodsi pro y ponatur r, prodibit superficies coni integri $= \frac{1}{2} p \sqrt{(a^2 + r^2)} = \frac{1}{2} p.$ AD; est nempe æqualis facto ex semiperipheria basis coni in latus AD, prorsus ut in Elementis Geometriæ demonstratum (§. 548 *Geom.*).

PROBLEMA LXXXVI.

Tab. I. Fig. 3. 221. *Invenire superficiem Sphæræ.*

Sit diameter circuli genitoris $= 1$, $AP = x$, erit elementum arcus Mm (§. 157) $= dx : 2\sqrt{(x - xx)}$, quod ductum in peripheriam radio PM descriptam $= 2p\sqrt{(x - xx)}$ producit elementum superficiei sphæricæ (§. 219) pdx. Hujus integrale px indefinite metitur superficiem segmenti sphærici, cujus altitudo x.

Quodsi pro x substituatur diameter 1; erit superficies sphæræ integræ $= p.\ 1$; seu, si $1 = a$, pa.

COROLLARIUM.

222. Est ergo quodlibet segmentum superficiei sphæricæ ad superficiem sphæræ integram ut px ad $p.1$, seu ut x ad 1 (§. 124 *part.* 1), hoc est ut altitudo segmenti ad diametrum sphæræ.

PROBLEMA LXXXVII.

223. *Invenire superficiem Conoidis parabolici.*

Ad parabolam est $adx = 2ydy$ (§. 21).

$$dx^2 = 4y^2 dy^2 : a^2$$

$$py \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r$$
$$= py \sqrt{(4y^2dy^2 + a^2dy^2)} : ar$$
$$= pydy \sqrt{(4y^2 + a^2)} : ar$$

Fiat $\sqrt{(4y^2 + a^2)} = v$

erit $4y^2 + a^2 = v^2$

$$8ydy = 2vdv$$

$$ydy = \tfrac{1}{4} vdv$$

$$pydy \sqrt{(4y^2 + a^2)} : ar = pv^2dv : 4ar$$

$$\int pydy \sqrt{(4y^2 + a^2)} : ar = pv^3 : 12ar$$
$$= p\,(4y^2 + a^2) \sqrt{(4y^2 + a^2)} : 12ar.$$

Fiat $y = 0$, relinquetur $pa^2 \sqrt{a^2} : 12ar = pa^2 : 12r$. Unde superficies segmenti conoidis parabolici $=$

$p(4y^2 + a^2)\sqrt{(4y^2 + a^2)} : 12ar - pa^2 : 12r$

CAPUT

CAPUT V.

De usu Calculi integralis in Methodo tangentium inversa.

DEFINITIO IX.

224. *Methodus Tangentium inversa* est, qua ex data tangente, aut linea quacunque alia cujus determinatio a tangente pendet, invenitur æquatio ad curvam aut constructio curvæ.

COROLLARIUM.

225. Cum expressiones differentiales tangentis, subtangentis, subnormalis, normalis & arcus, itemque areæ curvæ superius traditæ fuerint (§. 20, 34, 35, 44, 98, 144); si valor datus expressioni differentiali æquetur, & æquatio differentialis vel summetur, vel, si id fieri nequeat, construatur; curva desiderata innotescit.

PROBLEMA LXXXVIII.

226. *Invenire lineam curvam, cujus subtangens* $= 2yy : a$.

Quoniam subtangens lineæ algebraicæ $= ydx : dy$ (§. 20); erit

$$ydx : dy = 2yy : a$$

$$aydx = 2y^2dy$$

$$adx = 2ydy$$

$$ax = y^2$$

Est adeo curva quæsita parabola (§. 388 *part.* I), cujus constructio ex superioribus manifesta (§. 393 *part.* I).

PROBLEMA LXXXIX.

227. *Curvam invenire, cujus subnormalis est constans, ex. gr.* $= a$.

Quoniam subnormalis lineæ algebraicæ (§. 35) $= ydy : dx$; erit

$$ydy = adx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = ax$$

$$y^2 = 2ax$$

Est adeo curva quæsita parabola, cujus parameter $= 2a$.

PROBLEMA XC.

228. *Invenire curvam, cujus subnormalis* $= r - x$.

Quoniam $ydy : dx = r - x$ (§. 35); erit

$$ydy = rdx - xdx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = rx - \tfrac{1}{2}xx$$

$$y^2 = 2rx - xx$$

Est adeo curva quæsita circulus, cujus radius r seu diameter $2r$ (§. 377 *part.* I).

PROBLEMA XCI.

229. *Invenire curvam, cujus subtangens est tertia proportionalis ad* $r - x$ & y.

Quoniam (§. 20)

$$r - x : y = y : \frac{ydx}{dy}$$

erit $r - x : y = dy : dx$ (§ 124 *part.* I)

$$rdx - xdx = ydy$$

$$rx - \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2$$

$$2rx - xx = y^2$$

Est adeo curva quæsita denuo circulus, cujus diameter $2r$.

PROBLEMA XCII.

230. *Invenire curvam, cujus subtangens est tertia proportionalis ad* $r + x$ & y.

Quoniam (§. 20)

$$r + x : y = y : \frac{ydx}{dy}$$

erit

erit $r + x : y = dy : dx$ (§. 124 *part*. 1)

$$rdx + xdx = ydy$$

$$rx + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2$$

$$2rx + x^2 = y^2$$

Est adeo curva quæsita Hyperbola æquilatera, cujus axes conjugati & parameter $= 2r$ (§. 507 *part*. 1).

PROBLEMA XCIII.

231. *Invenire curvam in qua subtangens multiplo abscissæ æqualis.*

Quoniam (§. 20)

$$mx = ydx : dy$$

erit $mxdy = ydx$

$$mxdy - ydx = 0$$

Ut hæc æquatio integrari possit, multiplicetur per $y^{m-1} : x^2$ (§. 95).

erit $(my^{m-1}xdy - y^m dx) : x^2 = 0$

$$y^m : x = a^{m-1}$$

$$y^m = a^{m-1}x$$

Satisfaciunt ergo proposito infinita Parabolarum genera.

PROBLEMA XCIV.

232. *Invenire lineam, in qua subtangens semiordinatæ æqualis.*

Quoniam (§. 20)

$$ydx : dy = y$$

$$ydx = ydy.$$

$$dx = dy$$

$$x = y$$

Patet adeo, lineam quæsitam esse rectam ad cathetum trianguli rectanguli æquicruri tanquam axem relatam, seu hypothenusam trianguli rectanguli æquicruri (§. 89 *Geom.*). Quodsi vero x sumatur pro arcu circuli; erit linea quæsita Cyclois (§. 572 *part*. 1, & §. 52 *part*. 2).

PROBLEMA XCV.

233. *Invenire curvam, cujus subnormalis* $= \sqrt{ax}$.

Quoniam $ydy : dx = \sqrt{ax}$ (§. 35)

erit $ydy = a^{1:2}x^{1:2}dx$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2}$$

$$y^2 = \frac{4}{3}\sqrt{ax^3} = \frac{2}{3}\sqrt{4ax^3}$$

Patet adeo, quadrata semiordinatarum hujus curvæ exprimere spatia Parabolæ, cujus parameter $4a$ (§. 103). Sunt igitur semiordinatæ ipsæ mediæ proportionales inter abscissas & $\frac{2}{3}$ semiordinatarum Parabolæ circa communem axem descriptæ (§. *cit.*).

SCHOLION.

234. *Curva hæc dici potest Quadratrix* Tab. II. *Parabolæ. Solent enim Geometræ* Quadratricem *alicujus curvæ appellare curvam circa eundem axem descriptam, cujus semiordinatis datis datur quadratura partium respondentium in altera curva. Ex. gr. si fuerit ut in nostro casu* APMA = PN², *vel* APMA = AP. PN, *vel* APMA = PN. *a, &c. erit* AND Quadratrix *ipsius* AMC. Fig. 27.

PROBLEMA XCVI.

235. *Invenire curvam, cujus normalis constans est.*

Sit constans linea $= a$, abscissa $= x$, semiordinata $= y$; erit (§. 44)

$$y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} : dx = a$$

$$y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = adx$$

$$y^2dy^2 + y^2dx^2 = a^2dx^2$$

$$y^2dy^2 = a^2dx^2 - y^2dx^2$$

$$ydy = dx\sqrt{(a^2 - y^2)}$$

$$-\frac{ydy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = -dx$$

$$\sqrt{(a^2 - y^2)} = a - x \quad (§. 95).$$

Eſt itaque curva quæſita circulus.

PROBLEMA XCVII.

236. *Invenire curvam, cujus area indefinite exprimitur per* $a\sqrt{ax}$.

Quoniam differentiale areæ $= ydx$ (§. 98);

erit $\frac{1}{2}a^{3:2}x^{-1:2}dx = ydx$

$\frac{1}{2}a^{3:2}x^{-1:2} = y$

$\frac{1}{4}a^3x^{-1} = \frac{1}{4}a^3 : x = y^2$

$\frac{1}{4}a^3 = xy^2$

Eſt adeo curva Hyperbola ſecundi generis intra aſymptotos.

COROLLARIUM.

237. Cum $\sqrt{ax}$ ſit ſemiordinata Parabolæ, cujus parameter $= a$; evidens eſt Parabolam *Apollonianam* eſſe quadratricem Hyperbolæ intra aſymptotos, ad quam $\frac{1}{4}a^3 = xy^2$.

PROBLEMA XCVIII.

238. *Invenire curvam, cujus quadratura indefinita* $= x^3 : a$.

Quoniam $x^3 : a = \int ydx$

erit $3x^2dx : a = ydx$

$x^2 = \frac{1}{3}ay$

Tab.II. Fig.28. Eſt adeo curva quæſita Parabola exterior, cujus parameter $\frac{1}{3}a$. Sit enim $AQ = PM = x$, $PQ = AM = y$, erit $\frac{1}{3}ay = x^2$ (§. 388 *part.* 1).

PROBLEMA XCIX.

239. *Invenire curvam, cujus area* $= a\sqrt{(aa + xx)}$.

Quoniam $axdx : \sqrt{(aa + xx)} = ydx$

$ax : \sqrt{(aa + xx)} = y$

$a^2x^2 : (aa + xx) = y^2$

hoc eſt, $y^2 : x^2 = a^2 : aa + xx$

Quæ analogia naturam curvæ definit, cujus quadratrix eſt Hyperbola æquilatera, axibus conjugatis & parametro exiſtentibus a (§. 507 *part.* 1, & §. 234 *part.* 2).

PROBLEMA C.

240. *Invenire curvam, cujus area* $= x\sqrt{(aa + xx)}$.

Quon. $\frac{x^2dx}{\sqrt{(aa+xx)}} + dx\sqrt{(aa + xx)} = ydx$

erit $\frac{2x^2 + aa}{\sqrt{(aa + xx)}} = y$

$(2x^2 + aa)^2 = y^2 (aa + xx)$

$y^2 : aa + 2xx = aa + 2xx : aa + xx$

Quæ analogia definit itidem naturam curvæ, cujus quadratrix eſt Hyperbola æquilatera.

SCHOLION.

241. *Ex Problematibus his apparet, quod data quadratrice ſemper inveniatur quadranda facili negotio. Et hac quidem methodo inveniri poſſunt curvæ innumeræ quadrabiles, conſtruique curvarum quadrabilium, ſeu, quod perinde eſt, formularum ſummabilium canones.*

PROBLEMA CI.

242. *Invenire curvam, cujus ſubtangens eſt linea conſtans a.*

Quoniam $ydx : dy = a$ (§. 20)

erit $dx = ay^{-1}dy$

$\int dx = x = \int ay^{-1}dy$

Quodſi $ay^{-1}dy$ multiplicetur per a; erit $a^2y^{-1}dy$ elementum Hyperbolæ intra aſymptotos (§. 118) & quidem æquilateræ, in qua aſymptoti junguntur ad angulos rectos (§. 510 *part.* 1). Quodſi ergo y ſumatur pro abſciſſa, erit reſpondens ſemiordinata $x = a\int y^{-1}dy$ æqualis ſpatio hyperbolico aſymptotico per conſtantem a, quæ latus eſt potentiæ in Hyperbola æquilatera (§. 477 *part.* 1), diviſo. Unde conſtructio curvæ

curvæ quæsitæ a quadratura Hyperbolæ pendet.

COROLLARIUM I.

243. Quoniam linea, ad quam $x = \int ay^{-1}dy$, est logarithmica ad asymptotum relata (§.54) atque x in asymptoto sumta logarithmus semiordinatæ ipsi respondentis (§.553 *part.* 1); erit quoque $\int ay^{-1}dy$ logarithmus ejusdem semiordinatæ y, consequenter $\int ay^{-1}dy = a\int dy:y = ly$; ($ly$ denotat logarithmum ipsius y in logistica sumtum, cujus subtangens $= a$). Unde liquet, quomodo differentiale logarithmi aut quantitatis, quam logarithmus ingreditur, sit inveniendum. Quoniam enim $ady:y = dly$ erit etiam $d(ly)^n = n(ly)^{n-1}\, ady:y$ ubi a notat subtangentem logisticæ.

COROLLARIUM II.

244. Et quia $a\int\frac{dy}{y}$ est spatium hyperbolicum per latus potentiæ Hyperbolæ divisum; spatia hyperbolica per idem latus divisa exprimunt logarithmos, quorum numeri sunt ut semiordinatæ ad asymtotum relatæ.

PROBLEMA CII.

245. *Invenire curvam, in qua est ut a ad y ita* $\surd(aa - yy)$ *ad subtangentem.*

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$a:y = \surd(aa - yy) : \frac{ydx}{dy}$$

hoc est, $a:1 = dy\surd(aa - yy):dx$

erit $dy\surd(aa - yy) : a = dx$

$\int dy\surd(aa - yy) : a = x$

Tab.I. Fig.3. Quoniam $\int dy\surd(aa - yy)$ est portio circuli CDPM, cujus radius AC $= a$, abscissa PC $= y$ (§.124): constructio curvæ a quadratura circuli pendet, hoc est, circulus est quadratrix curvæ quæsitæ (§.234). Retentis nempe abscissis PC, semiordinatæ x erunt æquales spatio PMDC per constantem a diviso.

PROBLEMA CIII.

246. *Invenire curvam, in qua est ut a ad y ita* $\surd(aa + yy)$ *ad subtangentem.*

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$a:y = \surd(aa + yy) : \frac{ydx}{dy}$$

hoc est, $a:1 = dy\surd(aa + yy):dx$

erit $dy\surd(aa + yy) : a = dx$

$\int dy\surd(aa + yy) : a = x$

Quoniam $\int dy\surd(aa + yy) : a$ est arcus Parabolæ AM, cujus parameter $2a$ (§. 146); si semiordinata Parabolæ PM sumatur pro abscissa curvæ quæsitæ, erit semiordinata ejusdem arcui parabolico AM æqualis. Tab.II. Fig.19.

SCHOLION.

247. *Apparet adeo, interdum constructionem pendere a rectificatione curvarum. Præstat autem eam ad curvarum potius rectificationem, quam quadraturam reducere; quia in priori casu praxis est facilior, ubi arcum filo metiri datur. In posteriori autem spatiorum quadratura ope serierum infinitarum definienda est in numeris prope veris, & inde similiter in istiusmodi numeris semiordinatæ curvarum quæsitarum sunt computandæ.*

PROBLEMA CIV.

248. *Invenire curvam, in qua est subtangens ad y ut quantitas constans r ad* $\surd(r^2 - y^2)$.

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$\frac{ydx}{dy} : y = r : \surd(r^2 - y^2)$$

hoc est, $dx:dy = r:\surd(r^2 - y^2)$

erit $dx = rdy:\surd(r^2 - y^2)$

$x = \int(rdy:\surd(r^2 - y^2))$.

Quia $\int(rdy:\surd(r^2 - y^2))$ est [arcus] circuli AM, cujus radius AC $= r$, PM $= y$ (§.153); constructio curvæ pendet a rectificatione peripheriæ circuli. Tab.I. Fig.3.

 Nempe

Tab.I. Fig.3. Nempe si semiordinatæ in circulo PM sumantur pro abscissis curvæ quæsitæ; erunt ejusdem semiordinatæ arcubus AM æquales.

PROBLEMA CV.

249. *Invenire curvam, in qua subtangens est ad y ut r^2 ad r^2+y^2.*

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$\frac{ydx}{dy} : y = r^2 : r^2 + y^2$$

hoc est, $dx : dy = r^2 : r^2 + y^2$

erit $dx = r^2 \, dy : (r^2 + y^2)$

Quoniam $\int (r^2 \, dy : (r^2 + y^2))$ aut, si $r = 1$, $\int (dy : (1 + y^2))$ est elementum Tab.II. Fig.20. arcus BM, cujus tangens BK $= y$ (§. 158); evidens est, constructionem curvæ quæsitæ denuo pendere a rectificatione arcuum circuli indefinita. Sumtis nempe tangentibus arcuum BK pro abscissis curvæ quæsitæ; semiordinatæ ejusdem erunt arcubus BM æquales, radio circuli existente r.

PROBLEMA CVI.

250. *Invenire curvam, in qua tangens est constans.*

Sit constans illa $= a$, abscissa $= x$, semiordinata y: erit (§. 34)

$$y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy = a$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{ady}{y}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2 dy^2}{y^2}$$

$$dx^2 = \frac{a^2 dy^2 - y^2 dy^2}{y^2}$$

$$x = \int \left(\frac{dy}{y} \sqrt{(a^2 - y^2)}\right).$$

Tab.I. Fig. Curva, in qua tangens constans est, describitur puncto M, si alterum extremum rectæ TM in recta AR incedit, diciturque *Tractoria*. Ad ejus adeo Tab. Fig. descriptionem non opus est, nisi bacillo, in cujus utroque extremo cuspis infixa, ita ut cuspis in M prematur in planum elatere, vel pondere. Est itaque æquatio inventa ad Tractoriam.

Eadem æquatio sic eruitur. Quoniam TM $= a$, PM $= y$; erit PT $= \sqrt{(a^2 - y^2)}$. Sed PT $= ydx : dy$ (§. 20. Ergo $ydx : dy = \sqrt{(a^2 - y^2)}$; consequenter $dx = dy \sqrt{(a^2 - y^2)} : y$; aut, quia semiordinatæ continuo decrescentis differentiale negativum, $dx = - dy \sqrt{(a^2 - y^2)} : y$.

COROLLARIUM I.

251. Si fuerit $x = 0$, erit etiam $dx = 0$, adeoque

$$- dy \sqrt{(a^2 - y^2)} : y = 0$$

$$\sqrt{(a^2 - y^2)} = 0$$

$$a^2 - y^2 = 0$$

$$a = y$$

Est igitur in A, ubi origo indeterminatæ x, AB $= a$; id quod etiam ex descriptione liquet.

COROLLARIUM II.

252. Quoniam $dx = dy \sqrt{(a^2 - y^2)} : y$, erit $ydx = dy \sqrt{(a^2 - y^2)}$; adeoque spatium indeterminatum RPMI $= \int dy \sqrt{(a^2 - y^2)}$. Quadratura igitur tractoriæ pendet a quadratura circuli (§. 124), cujus radius est a, abscissæ a centro computatæ sunt y.

COROLLARIUM III.

253. Similiter quia $dx^2 = \frac{a^2 dy^2 - y^2 dy^2}{y^2}$ erit

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2 dy^2 - y^2 dy^2}{y^2} + dy^2$$

$$= a^2 dy^2 : y^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{ady}{y}$$

$$\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int \frac{ady}{y}$$

Quare

Quare cum $\int \frac{ady}{y}$ fit logarithmus ipfius y; arcus tractoriæ funt ut logarithmi, femiordinatæ ut numeri.

Et quia $\int(ady:y)$ eft abfciffa logarithmicæ, cujus fubtangens $= a$; arcus tractoriæ rectificantur per abfciffas logarithmicæ.

COROLLARIUM IV.

254. Si BO$= v$, erit OA $=$ PM$= a - v$, adeoque $a - v = y$, & $- dv = dy$; confequenter $dx = - dy \sqrt{(a^2 - y^2)}: y = dv\sqrt{(2av - v^2)}: (a - v)$. Habemus adeo æquationem, quæ Tractoriam definit refpectu axis BA.

CAPUT VI.

De ufu Calculi integralis in Logarithmorum doctrina.

PROBLEMA CVII.

255. *Dato numero, invenire logarithmum.*

Tab. III. Fig. 30. Sit Logarithmicæ MBN ordinata AB $= 1$, eademque fubtangenti, quæ conftans eft (§. 54) æqualis, erit PM numerus unitate major, QN numerus unitate minor, AP logarithmus numeri unitate majoris, AQ logarithmus numeri unitate minoris.

Quodfi jam differentia inter AB & PM fit y; erit PM$= 1 + y$; confequenter AP, feu logarithmus unitate majoris numeri, $\int(dy:(1+y))$ (§. 243). Eft vero $1:(1+y) = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4$ &c. in infinitum (§. 45 *part.* 1). Ergo $dy:(1+y) = dy - ydy + y^2\,dy - y^3dy + y^4dy$ &c. in infinitum; confequenter $\int(dy:(1+y))$, feu logarithmus numeri $1+y$ unitate majoris, $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum.

Quodfi differentia inter AB & QN fit y, erit QN $= 1 - y$; confequenter AQ, feu logarithmus numeri unitate minoris, $= \int(-dy:(1-y))$. Eft vero $-1:(1-y) = -1 - y - y^2 - y^3 - y^4 -$ &c. in infinitum (§. 45 *part.* 1). Ergo $-dy:(1-y) = -dy - ydy - y^2dy - y^3dy - y^4dy$, &c. in infinitum; confequenter $\int(-dy:(1-y))$, feu logarithmus numeri unitate minoris, $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM I.

256. Si latus potentiæ Hyperbolæ AB, vel BC, fuerit 1, BP$= y$; erit AP$= 1 + y$, & fpatium hyperbolicum afymptoticum $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 120). Tab. II. Fig. 29. Et ubi BQ$= y$, erit AQ$= 1 - y$, adeoque (fi QN$= v$) ob $1 = v - vy$ (§. 490 *part.* 1), elementum fpatii hyperbolici afymptotici $- 1ydy:(1 - y)$; confequenter fpatium $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 120). Poffunt ergo etiam logarithmi per hyperbolam exhiberi: nimirum fi latus potentiæ AB $= 1$, abfciffa AP eft numerus unitate major, fpatium afymptoticum BCMP logarithmus numeri unitate majoris; fimiliter abfciffa AQ eft numerus unitate minor & fpatium hyperbolicum afymptoticum QNCB logarithmus numeri unitate minoris.

COROLLARIUM II.

257. Quodfi $y = 1$, erit $1 + y = 2$; adeoque logarithmus hyperbolicus binarii $= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM III.

258. Quoniam logarithmus ipfius $1:(1 + x)$ & numeri integri $1 + x$ idem eft (§. 351 *Arithm.*), fractio vero $1:(1 + x)$

numerus unitate minor; pro $1-y$ ponatur $1:(1+x)$, formula poſterior inveniendis logarithmis tam numerorum unitate majorum, quam minorum ſatisfacit. Nempe cum ſit ex hypotheſi

$$1-y = 1:(1+x)$$

erit

$$1 - 1:(1+x) = y$$

hoc eſt, $\frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} = y$

adeoque in formula $y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. pro y ſubſtitui debet $x:(1+x)$, ſi numeri unitate majoris logarithmus deſideretur.

SCHOLION.

259. *Formula poſterior ſi in caſu quoque priore, ubi numerus cujus logarithmus quæritur unitate major, adhibetur, inventio logarithmi faciliori opera abſolvitur; quia ſeries citius convergit, quam ſi priori formula utamur. Enimvero probe notandum, logarithmos hyperbolicos coincidere cum* Neperianis, *adeoque diverſos eſſe a* Briggianis, *quibus communiter utimur. Cum autem hyperbolici ſint ad* Briggianos *ut logarithmus denarii hyperbolicus ad logarithmum denarii* Briggianum, *ſitque logarithmus binarii hyperbolicus* 2. 302585092994 &c. Briggianus 1. 000000000000; *hyperbolici ad* Briggianos, *quibus vulgo utimur, facile reducuntur.*

PROBLEMA CVIII.

260. *Dato logarithmo invenire numerum.*

Sit logarithmus l, numerus $1+y$ erit $l = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. Quare cum $y = l + bl^2 + (2b^2 - c)\,l^3 + (5bc - 5b^3 - d)\,l^4 + (14b^4 + 6bd - 21b^2c + 3c^2 - e)\,l^5$ &c. (§. 366 *part.* 1) ob $a=1$, & $b = -\frac{1}{2}$, $c = +\frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{4}$, $e = +\frac{1}{5}$ &c. erit

$$2b^2 - c = \frac{2}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$5bc - 5b^3 - d = -\frac{5}{6} + \frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{-40+30+12}{48} = \frac{2}{48} = +\frac{1}{24}$$

$$14b^4 + 6bd - 21b^2c + 3c^2 - e$$
$$= \frac{14}{16} + \frac{6}{8} - \frac{21}{12} + \frac{3}{9} - \frac{1}{5}$$
$$= \frac{7}{8} + \frac{6}{8} - \frac{14}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$
$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{40-15-24}{120} = +\frac{1}{120}$$

adeoque

$$y = l + \frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{6}l^3 + \frac{1}{24}l^4 + \frac{1}{120}l^5 \text{ \&c.}$$

in infinit. $= \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1.2} + \frac{l^3}{1.2.3} + \frac{l^4}{1.2.3.4} + \frac{l^5}{1.2.3.4.5}$ &c. in infinit.

Quodſi terminus primus dicatur A, ſecundus B, tertius C, quartus D &c. erit $y = l + \frac{1}{2}Al + \frac{1}{3}Bl + \frac{1}{4}Cl + \frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

Quoniam vero l eſt logarithmus numeri $1+y$; erit numerus $1+y = 1 + l + \frac{1}{2}Al + \frac{1}{3}Bl + \frac{1}{4}Cl + \frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

Si l fuerit logarithmus numeri unitate minoris $1-y$; erit $l = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. & eodem ut ante modo reperietur $y = l - \frac{1}{1.2}l^2 + \frac{1}{1.2.3}l^3 - \frac{1}{1.2.3.4}l^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5}l^5$, &c. in infinitum, conſequenter $1 - y = 1 - \frac{l}{1} + \frac{1}{1.2}l^2 - \frac{1}{1.2.3}l^3 + \frac{1}{1.2.3.4}l^4 - \frac{1}{1.2.3.4.5}l^5$ &c. in infinitum.

Quodſi terminus primus dicatur A, ſecundus B, tertius C, &c. erit $y = l - \frac{1}{2}Al + \frac{1}{3}Bl - \frac{1}{4}Cl + \frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum; conſequenter $1 - y = 1 - l + \frac{1}{2}Al - \frac{1}{3}Bl + \frac{1}{4}Cl - \frac{1}{5}Dl$, &c. in infinitum.

PRO-

PROBLEMA CIX.

261. *Dato sinu, invenire logarithmum.*

Sit radius $=1$, cosinus $=x$, erit sinus $=\sqrt{(1-xx)}$ (§. 377 *part.* 1) $=\sqrt{((1+x)(1-x))}$.

ed $l(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6$

$l(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6$

rgo $l(1-xx)=-\frac{2}{2}x^2-\frac{2}{4}x^4-\frac{2}{6}x^6$ (§. 337 *Arith.*)

$l\sqrt{(1-xx)}=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^6$ &c. (§. 338 *Ar.*).

PROBLEMA CX.

262. *Data tangente, invenire logarithmum.*

Sit radius, seu sinus totus, hoc est, tangens 45° (§. 32 *Trigon.*) $=1$; tangens arcus 45° majoris $=1+x$; tangens arcus 45° minoris $=1-x$; erit logarithmus tangentis in casu posteriore $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum; in casu posteriore $-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum (§. 255.)

SECTIO TERTIA.

DE CALCULO EXPONENTIALI.

CAPUT I.

De natura Calculi exponentialis.

DEFINITIO X.

263. *Calculus exponentialis* est methodus differentiandi quantitates exponentiales & differentialia exponentialium summandi.

DEFINITIO XI.

264. *Quantitas exponentialis* est dignitas, cujus exponens variabilis, ex. gr. x^x, a^x.

PROBLEMA CXI.

265. *Quantitatem exponentialem differentiare.*

RESOLUTIO.

Non alia re opus est, quam ut quantitates exponentiales ad logarithmicas revocentur: quo facto, differentiatio succedit per §. 243.

E. gr. Quæritur differentiale quantitatis exponentialis x^y. Fiat

$$x^y=z$$

erit $\quad ylx=lz$ (§. 341 *Arithm.*)

$$lxdy+ydx:x=dz:z \text{ (§. 243)}$$

$$zlxdy+zydx:x=dz$$

hoc est, $x^y\,lxdy+yx^{y-1}\,dx=dz$

Sit quantitas exponentialis differentianda secundi gradus v^{x^y}. Fiat, ut ante,

$$v^{x^y}=z$$

erit $\quad x^y lv=lz$ (§. 341 *Arithm.*)

$$(x^y lxdy+yx^{y-1}\,dx)\,lv+x^y\,dv:v=dz:z \text{ (§. 243)}$$

$$z(x^y\,lxdy+yx^{y-1}dx)\,lv+zx^y\,dv:v=dz$$

hoc est,

$$v^{x^y}(x^y\,lxdy+yx^{y-1}\,dx)\,lv+v^{x^y}v^{-1}\,x^y\,dv=dz$$

seu

$$v^{x^y}\,x^y\,lxlvdy+v^{x^y}\,yx^{y-1}lvdx+v^{x^y}v^{-1}x^y dv=dz$$

Eadem

Eadem ratione inveniri potest differentiale quantitatis exponentialis cujuscunque alterius.

PROBLEMA CXII.

266. *Differentiale logarithmicum integrare.*

Sit differentiale integrandum $xlxdx$. Fiat

$$x = 1 + y$$

erit $lx = l(1+y)$

& $dx = dy$

$$xlxdx = l(1+y)(1+y)dy.$$

Est vero $l(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§.255). Ergo $l(1+y)(1+y)dy = (1+y)dy(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum) = [multiplicatione actu facta]

$ydy - \frac{1}{2}y^2dy + \frac{1}{3}y^3dy - \frac{1}{4}y^4dy + \frac{1}{5}y^5dy$ &c.

$+ y^2dy - \frac{1}{2}y^3dy + \frac{1}{3}y^4dy - \frac{1}{4}y^5dy$ &c.

h.e. $ydy + \frac{1}{2}y^2dy - \frac{1}{6}y^3dy + \frac{1}{12}y^4dy - \frac{1}{20}y^5dy$ &c.

Unde tandem habetur $\int xlxdx = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{60}y^5 - \frac{1}{120}y^6$ &c. $= \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{1}{1.2.3}y^3 - \frac{1}{2.3.4}y^4 + \frac{1}{3.4.5}y^5 - \frac{1}{4.5.6}y^6$ &c. in infinitum: in qua serie $y = x - 1$.

PROBLEMA CXIII.

267. *Differentiale exponentialem quantitatem involvens integrare.*

Sit differentiale integrandum $x^x dx$. Fiat $x = 1 + y$, erit $x^x = (1+y)^{1+y}$, & $dx = dy$, adeoque $x^x dx = (1+y)^{1+y}dy$.

Fiat $(1+y)^{1+y} = 1 + v$

erit $(1+y)l(1+y) = l(1+v)$

hoc est, $(1+y)(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum) $= v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$ &c. in infinitum (§.255); seu per calculum praecedentem, $y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{20}y^5$ &c. in infinitum $= v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$ &c. in infinitum (§.266).

Fiat porro

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \text{ \&c.}$$

erit $v^2 = + y^2 + 2yk^3 + k^2y^4 + 2kmy^5 + 2my^4 + 2ny^5$

$v^3 = + y^3 + 3ky^4 + 3k^2y^5 + 3my^5$

$v^4 = + y^4 + 4ky^5$

$v^5 = + y^5$

(§.95 *part.* 1). Unde

$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5$ &c.

$-\frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}y^2 - ky^3 - \frac{1}{2}k^2y^4 - kmy^5$ &c. $- my^4 - ny^5$

$+\frac{1}{3}v^3 = + \frac{1}{3}y^3 + ky^4 + k^2y^5$ &c. $+ my^5$

$-\frac{1}{4}v^4 = - \frac{1}{4}y^4 - ky^5$ &c.

$+\frac{1}{5}v^5 = + \frac{1}{5}y^5$ &c.

$- y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{12}y^4 + \frac{1}{20}y^5 = 0$

Habemus ergo

$1 - 1 = 0$, $1 = 1$; $k - \frac{2}{2} = 0$, $k = 1$; $m - k + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0$, $m = 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$n - \frac{1}{2}k^2 - m + k - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = 0$$

$$n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$p - km - n + k^2 + m - k + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = 0$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{5}{20} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

Consequenter

$(1+y)^{1+y} = 1 + v = 1 + y + y^2 + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{12}y^5$ &c. in infinitum.

Quare differentiale ad integrandum propositum $(1+y)^{1+y}dy = dy + ydy + y^2dy + \frac{1}{2}y^3dy + \frac{1}{3}y^4dy + \frac{1}{12}y^5dy$ &c. in infinitum, adeoque $\int(1+y)^{1+y}dy = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{15}y^5 + \frac{1}{72}y^6$ &c.

PRO-

PROBLEMA CXIV.

268. *Quantitatem exponentialem, consequenter curvam exponentialem, cujus æquatio datur, construere.*

RESOLUTIO.

Quantitates exponentiales reducendæ sunt ad logarithmicas, quæ per absciſſas Logarithmicæ exhiberi poſſunt.

Ex. gr. Sit conſtruenda curva exponentialis, ad quam $x^x = y$, erit (*§.341 Arithm.*) $xlx = ly$. Supponamus Logarithmicam MBN deſcriptam, & in ea ſemiordinatam AB = 1. Sit PM = x; erit AP = lx. Eſt vero 1 : lx = x : ly (*§.299 Arithm.*). Ergo ly reperiri poteſt (§.271 *Geom.*): cui ſi æqualis in axe Logiſticæ ſumatur AH, erit HI = y (§. 553 *part.* 1). Quodlibet adeo curvæ exponentialis punctum G reperitur ſequentem in modum:

Tab. III. Fig. 30.

Fiat AC = x, & ducatur MC ipſi AP parallela, quæ Logiſticam in M ſecabit; erit MC = AP = lx. Fiat CD = AB = 1, & DE = AC, ducaturque LE ipſi MC parallela; erit LE = ly. Ducatur LH ipſi EA parallela; erit HI = y. Quodſi ergo AC ſumatur pro axe curvæ exponentialis, fiatque CG = HI; erit G punctum in curva quæſita.

Porro cum x = 0, erit ly = 0. Sed 0 eſt logarithmus unitatis. Ergo y eſt unitas, conſequenter = AB. Quare ſi fiat AF = AB; erit F punctum curvæ exponentialis.

Similiter quando AB = 1 = x, erit lx = 0, adeoque ad AB applicata y eſt 1, ſeu ipſi AB æqualis. Quamobrem ſi fiat BK = BA; erit K punctum curvæ exponentialis.

CAPUT II.

De uſu Calculi exponentialis in Curvarum exponentialium ſymptomatis inveſtigandis.

DEFINITIO XII.

269. *Curva exponentialis* eſt, quæ definitur per æquationem exponentialem.

DEFINITIO XIII.

270. *Æquatio exponentialis* eſt, quam ingreditur quantitas exponentialis.

PROBLEMA CXV.

271. *Invenire ſubtangentem curvæ, in qua* $a^x = y$.

Quoniam $a^x = y$

erit $xla = ly$

$ladx = dy : y$ (§. 243)

$dx = dy : yla$

Ergo ſubtangens $ydx : dy$ (*§.* 20) $= ydy : ylady = 1 : la$.

Conſtructio. Sit deſcripta Logiſtica quæcunque MBN & in ea AB = 1. Fiat AC = a, ducaturque CM ipſi AP & MP ipſi AC parallela: erit PM = AC = a & AP = la (§.554 *part.* 1). Fiat porro PQ = AB = 1, itemque QT ipſi AB parallela; erit TQ = 1 : la (§. 302 *Arithm.* & *§.* 268 *Geom.*).

Tab. III. Fig. 31.

COROLLARIUM.

272. Quoniam curvæ ſubtangens 1 : la conſtans: æquatio propoſita ad Logarithmicam eſt.

SCHOLION.

273. *Nempe ſi ſubtangens Logiſticæ fuerit* 1 : la; *ea definitur per* $a^x = y$.

PROBLEMA CXVI.

Tab. I. Fig. 8. 274. *Quadrare spatium Logisticum interminatum* HPMI.

Sit Logisticæ subtangens $PT = 1 : la$: $PM = y$, $Pp = dx$; erit

$a^x = y$ (§. 273).

$x l a = l y$

$l a d x = d y : y$ (§. 243)

$d x = d y : y l a$

$y d x = y d y : y l a = d y : l a$

$\int y d x = y : l a = y (1 : l a) = PM . PT$

COROLLARIUM I.

275. Spatium Logisticum interminatum HPMI est trianguli subtangente PT, tangente TM, & semiordinata PM contenti duplum (§.392 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

276. Quoniam Spatium $HPMI = PM.PT$ & $ISQH = SQ. PT$ (§. 274); erit $QPMS = (PM - SQ) PT$, hoc est, spatium inter duas semiordinatas interceptum æquale rectangulo ex subtangente in differentiam semiordinatarum.

PROBLEMA CXVII.

277. *Cubare solidum Logisticum ex rotatione spatii interminati* HPMI *circa asymptotum* PH *geniti*.

Quoniam (§.274)

$d x = d y : y l a$ erit (§. 197)

$p y^2 d x : 2 r = p y^2 d y : 2 r y l a = p y d y : 2 r l a$

$\int p y^2 d x : 2 r = p y^2 : 4 r l a$.

COROLLARIUM I.

278. Quoniam $p y^2 : 2 r$ est circulus radio $PM = y$ descriptus (§.197), $p y^2 : 4 r l a$ est cylindrus, cujus basis eadem est cum basi solidi logistici, altitudo vero $1 : 2 l a$ seu $\frac{1}{2}$PT (§. 541 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

279. Est ergo solidum istud logisticum ad conum, cujus altitudo subtangens $PT = 1 : la$, semidiameter basis $PM = y$, ut $p y^2 : 4 r l a$ ad $p y^2 : 6 r l a$, hoc est, ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{6}$, seu ut 6 ad 4, aut ut 3 ad 2 (§.124 *part.* 1). Tab. Fig.

PROBLEMA CXVIII.

280. *Determinare subnormalem Logisticæ.*

Quoniam $l a d x = d y : y$ (§.274).

erit $d y = y l a d x$

$y d y : d x = y^2 l a d x : d x$ (§. 35).

$= y^2 \, l a = y^2 : \frac{1}{l a}$

Est adeo subnormalis tertia proportionalis ad tangentem $PT = 1 : la$ & semiordinatam $PM = y$.

COROLLARIUM.

281. Quodsi ergo Parabola describatur, cujus parameter subtangenti Logisticæ æqualis; semiordinatæ Parabolæ eædem sunt cum semiordinatis Logisticæ, illius autem abscissis hujus subnormales æquantur.

PROBLEMA CXIX.

282. *Determinare subtangentem curvæ exponentialis, ad quam* $x^x = y$.

Quoniam $x l x = l y$

erit $l x d x + x d x : x = d y : y$

$y l x d x + y d x = d y$

Ergo subtangens $y d x : d y = y d x : (y l x d x + y d x) = 1 : (l x + 1)$.

Est itaque PT tertia proportionalis ad $AB + AP = 1 + l x$ & $AB = 1$ (§.268). T. II Fig.

PROBLEMA CXX.

283. *Determinare subnormalem curvæ, ad quam* $x^x = y$.

Quia $y l x d x + y d x = d y$ (§.282); erit subnormalis (§.35) $y d y : d x = (y^2 l x d x + y^2 d x) : d x = y^2 l x + y^2 = y^2 (l x + 1)$.

Quærenda igitur est ad $AB = 1$, & $PM = y$, tertia proportionalis y^2 & hinc porro ad $AB = 1$, $AB + AP = 1 + l x$, atque

atque lineam inventam y^2 quarta proportionalis.

PROBLEMA CXXI.

Tab. III. Fig. 30. 284. *Determinare minimam applicatam SR in curva exponentiali, ad quam* $x^x = y$.

Quoniam $ylxdx + ydx = dy$ (§. 282); fiat $ylxdx + ydx = 0$ (§. 63).

erit $lx + 1 = 0$

$1 = - lx$

Fiat ergo AT = AB = 1; erit TV = AR = x (§. 554 *part.* 1).

Quodsi pro lx in æquatione curvæ $xlx = ly$ substituatur valor modo inventus $- 1$; prodibit $x = - ly$. Fiat igitur AQ = VT = $- x$: erit NQ = SR = y (§. *cit part.* 1).

PROBLEMA CXXII.

285. *Quadrare curvam exponentialem, ad quam* $x^x = y$.

Quoniam elementum areæ ydx (§. 98), erit area curvæ $= \int x^x dx =$ [si pro x ponatur $1 + y$] $v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{8}v^4 + \frac{1}{15}v^5 + \frac{1}{72}v^6$ &c. in infinitum (§. 267).

PROBLEMA CXXIII.

286. *Invenire æquationem ad curvam, cujus subtangens* $= 1 : (1 + lx)$.

Quoniam $1 : (1 + lx) = ydx : dy$ (§. 20)

erit $dy = y(1 + lx) dx$

$dy : y = dx + lxdx$

$\int (dy : y) = ly, \int (dx + lxdx) = xlx$

$ly = xlx$

$y = x^x$ (§. 341 *Arithm.*)

PROBLEMA CXXIV.

287. *Invenire æquationem ad curvam, cujus subnormalis* $y^2 (lx + 1)$.

Quoniam $y^2 (lx + 1) = ydy : dx$ (§. 35)

erit $y^2 (lx + 1) dx = ydy$

$lxdx + dx = dy : y$

$xlx = ly$ (§. 243)

$x^x = y$ (§. 341 *Arithm.*).

PROBLEMA CXXV.

288. *Invenire æquationem ad curvam, cujus subnormalis* $y^2 la$.

Quoniam $y^2 la = ydy : dx$ (§. 35)

erit $y^2 ladx = ydy$

$ladx = dy : y$

$xla = ly$ (§. 243)

$a^x = y$ (§. 341 *Arithm.*)

Est ergo Curva quæsita Logarithmica vulgaris, seu Logistica (§. 273).

PROBLEMA CXXVI.

289. *Invenire æquationem ad curvam, cujus area* $(2x^2 lx - x^2) : 4la$.

Quoniam (§. 98)

$(4xlxdx + 2xdx - 2xdx) : 4la = ydx$

erit $4xlx = 4yla$

$xlx = yla$

$x^x = a^y$ (§. 341 *Arithm.*)

Curva hæc vi Probl. 114 (§. 268) ita construitur, ope Logarithmicæ vulgaris MBN. Sit nempe AB = 1, quæ in infinitum producatur. Fiat AD = a, & AC = x, ducanturque DL & CM ipsi AP, HL & PM ipsi AC parallelæ; erit DL = AH = la, & CM = AP = lx (§. 268). Fiat AF = AH, & ducatur FE ipsi CG parallela, per A vero & E recta AG ipsi CM continuatæ in G occurrens, erit CG = $xlx : la = y$ (§. 268 *Geom.*); adeoque punctum G in curva quæsita, quæ definitur per $x^x = a^y$. Tab. III. Fig. 32.

COROLLARIUM I.

Tab. 290. Quia $\overline{lxdx + dx = lady}$ (§. 243)

erit $\overline{dx = lady : (lx + 1)}$

Fig. 32. $ydx : dy = yla : (lx + 1)$ (§. 20).

Est ergo subtangens curvæ hujus exponentialis quarta proportionalis ad AB + AP, CG & constantem AH.

COROLLARIUM II.

291. Quia $(lxdx + dx) : la = dy$ (§. 290); erit $ydy : dx = y\,(lx + 1) : la$, adeoque subnormalis curvæ hujus exponentialis est quarta proportionalis ad constantem AH, ad AP + AB & ad CG. Tab. III. Fig. 32.

COROLLARIUM III.

292. Est ergo subtangens ad subnormalem ut $yla : (lx + 1)$ ad $y\,(lx + 1) : la$, hoc est, ut la^2 ad $(lx + 1)^2$ (§. 124 *part.* 1) Quare quadratum compositæ ex constante AB & variabili AP est ad quadratum constantis AH ut subnormalis curvæ exponentialis ad ejus subtangentem.

SECTIO QUARTA.

DE CALCULO DIFFERENTIO-DIFFERENTIALI.

CAPUT I.

De natura Calculi differentio-differentialis.

DEFINITIO XIV.

293. *Calculus differentio-differentialis* est methodus quantitates differentiales denuo differentiandi.

COROLLARIUM.

294. Quoniam signum differentialis est d (§. 8): differentiale ipsius dx erit ddx: differentiale ipsius ddx erix $dddx$, & ita porro.

HYPOTHESIS.

295. *Scribantur* ddx, $dddx$, $ddddx$ &c. *compendiosius* d^2x, d^3x, d^4x &c.

DEFINITIO XV.

296. *Differentiale primi gradus* est infinitesima quantitatis ordinariæ, ut dx. *Differentiale secundi gradus* est infinitesima quantitatis differentialis primi gradus, veluti ddx, $dxdx$ vel dx^2, $dxdy$. *Differentiale tertii gradus* est infinitesima quantitatis differentialis secundi gradus, ut $dddx$, dx^3, $dxdydz$ & ita porro.

PROBLEMA CXXVII.

297. *Invenire regulas differentiandi differentialia quæcunque data.*

RESOLUTIO.

Eodem prorsus modo investigari possunt, quo supra invenire docuimus regulas differentiandi quantitates ordinarias (§ 17, 19): id quod uno alteroque exemplo ostendere libet.

Ex. gr. I. Sit investigandum differentiale ipsius xdx.

Fiat $\overline{xdx = v}$

erit $\overline{dx = v : x}$

$\overline{d^2x = (xdv - vdx) : x^2}$ (§. 19)

$\overline{x^2d^2x = xdv - vdx}$

$\overline{vdx + x^2d^2x = xdv}$

hoc

hoc eſt, ob $v = xdx$

$$xdx^2 + x^2d^2x = xdv$$

$$dx^2 + xd^2x = dv$$

Differentiatur ergo xdx eodem modo, quo duæ quantitates ordinariæ ſe mutuo multiplicantes differentiari ſolent (§.12).

II. Sit differentiale ipſius $x : dx$ inveſtigandum.

Fiat $x : dx = v$

$$x = vdx$$

$$dx = vd^2x + dxdv, \textit{ per caſ. præc.}$$
$$dx - vd^2x = dxdv$$

hoc eſt, ob $v = x : dx$

$$dx - xd^2x : dx = (dx^2 - xd^2x) : dx = dxdv$$

$$(dx^2 - xd^2x) : dx^2 = dv$$

Differentiatur itaque $x : dx$ eodem modo, quo quantitates ordinariæ ſe mutuo dividentes differentiari ſolent (§.19).

III. Sit differentiale ipſius dx^2 inveſtigandum.

Fiat $dx^2 = v$

erit $dx = v : dx$

$$d^2x = (dxdv - vd^2x) : dx^2, \textit{ per caſ. } 2.$$
$$dx^2d^2x = dxdv - vd^2x$$

$$vd^2x + dx^2d^2x = dxdv$$

hoc eſt, ob $v = dx^2$

$$dx^2d^2x + dx^2d^2x = 2dx^2d^2x = dxdv$$

$$2dxd^2x = dv$$

Differentialium igitur potentiæ veluti dx^2, eodem modo differentiantur, quo potentiæ quantitatum ordinariarum differentiari ſolent (§. 13, ſeqq.).

Corollarium I.

298. Cum differentialia compoſita aut ſe mutuo multiplicent, aut ſe mutuo dividant, aut potentiæ, ſive perfectæ, ſive imperfectæ, differentialium primi gradus exiſtant; differentialia eodem modo, quo quantitates ordinariæ, differentiantur.

Corollarium II.

299. Calculus adeo differentio-differentialis non eſt diverſus a calculo differentiali (§. 293).

Problema CXXVIII.

300. *Differentiare differentialia.*

Resolutio.

Differentialia conſiderentur inſtar ordinariarum quantitatum, & ex circumſtantiis caſuum ſpecialium dijudicetur quænam ſint variabiles, quænam conſtantes. Ipſa vero differentiatio abſolvatur per Problemata *Cap.* 1. *Sect.* 1. (vi §. 299).

Ex. gr. Sit differentiale denuo differentiandum $= 1 : dx$, & 1 quantitas conſtans, erit $d(1 : dx) = - d^2x : dx^2$ (§. 19). Similiter reperitur $d(ydy : dx) = (dy^2 + yd^2y) : dx$, ſi dx conſtans; vel $(dxdy^2 - ydyd^2x) : dx^2$, ſi dy conſtans.

CAPUT II.

De usu Calculi differentio-differentialis in inveniendo puncto flexus contrarii curvarum.

DEFINITIO XVI.

Tab. III. Fig. 33. n. 1. 301. Punctum *flexus contrarii* est punctum M, in quo curva flectitur in partes contrarias, ut scilicet axi, aut puncto cuidam fixo convexitatem obvertat, cum antea concavitatem obverteret. Vocatur *Punctum regressus*, si curva AMI in contrarias partes flexa regreditur versus verticem A.

PROBLEMA CXXIX.

302. *Determinare punctum flexus contrarii in curvis, quarum ordinatæ sunt inter se parallelæ.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 33. n. 1. 2. Sint duæ curvæ AMS, quarum una axi concavitatem, altera convexitatem obvertat. Ducatur tangens TM, sintque PM, *pm* & QS infinite propinquæ, & P*p*=*p*Q, hoc est, *dx* sit constans. Demittantur ex punctis curvarum M & *m* perpendiculares MR & *mr*. Quoniam *pm* ipsi QS parallela, *per hypoth.* erit angulus M*m*R=*m*S*r* (§. 233 *Geom.*). Sed MR=P*p* & *mr*=*p*Q *per hypoth.* adeoque MR=*mr* (§. 87 *Arithm.*). Ergo *m*R=*r*S (§. 251 *Geom.*). Est vero S*r*> V*r*, quando curva axi concavitatem obvertit, & S*r*< V*r*, quando convexitas curvæ axem respicit. Quamobrem, in casu priore, differentia semiordinatarum *dy* continuo decrescit, in posteriore autem crescit, sumta abscissæ differentia *dx* pro constante. In puncto itaque flexus contrarii differentia semiordinatarum *dy* est minimum aliquod, quando curva primum ad axem concava, deinde convexa; maximum vero aliquod, quando curva ad axem primum convexa, deinde concava. Invenitur adeo illud punctum, si fiat $ddy=0$, vel $ddy=\infty$, hoc est, si sumpta *dx* pro constante, valor ipsius *dy* denuo differentietur (§ 300) & quæ prodit differentia vel nihilo, vel infinito æqualis ponatur.

COROLLARIUM.

303. Quodsi æquatio ad curvam ignotam detur; inveniri potest, utrum convexitatem, an concavitatem axi obvertat, si ex æquatione differentiali eruatur ratio *m*R & MR. Ex. gr. In Parabola (§. 388 *part.* 1).

$$ax=y^2$$

adeoque $$adx=2ydy$$

$$a:2y=dy:dx$$

hoc est $a:2\sqrt{ax}=dy:dx$

Crescente adeo abscissa *x*, decrescit ratio $a:2\sqrt{ax}$ (§. 205 *Arithm.*). Quare cum *dx* sit constans, *per hypoth. dy* decrescere debet (§. 204 *Arithm.*) Parabola igitur constanter concavitatem axi obvertit, adeoque punctum flexus contrarii habet nullum.

PROBLEMA CXXX.

304. *Determinare punctum flexus contrarii* M *in Cycloide* AMN *ejus naturæ, ut sit* AQB : BN = AQ : QM. Tab. III. Fig.

Sit

Tab. III. Fig. 34 Sit semiperipheria circuli genitoris AQB $= p$, BN $= a$, AB $= 1$, PQ $= v$, AQ $= z$, AP $= x$, PM $= y$. Quoniam *per hypoth.*

$$AQB : BN = AQ : QM$$

$$p : a = z : \frac{az}{p}$$

erit $PM = PQ + QM = v + az : p$

Est adeo æquatio ad curvam

$$y = v + az : p$$

unde $dy = dv + adz : p$.

vel $pdy = pdv + adz$

Sed $dz = dx : 2\sqrt{(x - xx)}$ (§. 157) & ob $v = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 *part.* 1), $dv = (dx - 2xdx) : 2\sqrt{(x - xx)}$.

Ergo $2pdy = (pdx - 2pxdx + adx) : \sqrt{(x - xx)}$.

Quodsi adeo dx sumatur pro constante; erit (§. 300)

$$2pddy = -\frac{2p\sqrt{(x - xx)}\,dx^2}{x - xx}$$

$$\frac{pdx^2 - 4pxdx^2 + adx^2 + 4px^2dx^2 - 2axdx^2}{(x - x^2)\, 2\sqrt{(x - xx)}}$$

$$= \frac{(-4px + 4px^2 - p + 4px - a - 4px^2 + 2ax)\,dx^2}{2(x - xx)\sqrt{(x - xx)}}$$

$$= \frac{(2ax - p - a)\,dx^2}{2(x - xx)\sqrt{(x - xx)}}$$ Quare (§. 302)

$$\frac{(2ax - p - a)\,dx^2}{2(x - xx)\sqrt{(x - xx)}} = 0$$

$$2ax - p - a = 0$$

$$2ax = a + p$$

$$x = \tfrac{1}{2} + p : 2a$$

Ergo $CP = AP - AC = x - \tfrac{1}{2} = p : 2a$. Est adeo $a : p = \tfrac{1}{2} : CP$.

$$BN : AQB = BC : CP.$$

PROBLEMA CXXXI.

305. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam* $axx = (xx + aa)y$.

Quoniam $axx = (xx + aa)\,y$

erit $axx : (xx + aa) = y$

$$\frac{2ax^3dx + 2a^3xdx - 2ax^3dx}{(xx + aa)^2} = dy$$

hoc est, $\dfrac{2a^3xdx}{x^4 + 2a^2x^2 + a^4} = dy$

Quodsi adeo dx sumatur pro constante reperietur (§. 300)

$$\frac{(2a^3x^4 + 4a^5x^2 + 2a^7)dx^2 - (8a^3x^4 + 8a^5x^2)\,dx^2}{(x^2 + a^2)^4}$$

$$= \frac{2a^7 - 6a^3x^4 - 4a^5x^2)\,dx}{(x^2 + a^2)^4} = ddy$$

Quare (§. 302)

$$2a^7 - 6a^3x^4 - 4a^5x^2 = 0 \quad (2a^3$$

$$a^4 - 3x^4 - 2a^2x^2 = 0 \quad (aa + xx$$

$$aa - 3xx = 0$$

$$aa = 3xx$$

$$\tfrac{1}{3}aa = xx$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}aa} = x$$

Quodsi valor ipsius x^2 in æquatione data $axx = (xx + aa)\,y$ substituatur; prodibit

$$\tfrac{1}{3}a^3 = \tfrac{4}{3}aay \quad (\tfrac{4}{3}aa$$

$$\tfrac{1}{4}a = y$$

Quare si $\sqrt{\tfrac{1}{3}aa}$ & $\tfrac{1}{4}a$ jungantur ad angulos rectos, punctum flexus contrarii determinatur, utut curva nondum fuerit descripta.

PROBLEMA CXXXII.

306. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam* $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$

Quoniam $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$

erit $4b^3dx = 4b^2y\,dy - 4y^3dy$

$$\frac{b^3\,dx}{b^2y - y^3} = dy$$

Porro quoniam dx constans, reperietur (§. 300),

ddy

$$ddy = \frac{-b^5 dxdy + 3b^3 y^2 dxdy}{(b^2 y - y^3)^2} = 0$$

$$3b^3 y^2 - b^5 = 0$$

$$3y^2 = b^2$$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{3}b^2}$$

Substituatur hic valor in æquatione ad curvam $4b^3 x = 2b^2 y^2 - y^4$, erit

$$4b^3 x = \tfrac{2}{3} b^4 - \tfrac{1}{9} b^4 = \tfrac{5}{9} b^4$$

$$x = \tfrac{5}{36} b$$

Quodsi sit $x = 0$, erit

$$2b^2 y^2 - y^4 = 0$$

$$2b^2 = y^2$$

$$\sqrt{2b^2} = y$$

Quodsi ponamus $dy = \infty$, erit ob

$$b^3 dx : (b^2 y - y^3) = dy$$

$$b^2 y - y^3 = 0$$

$$b^2 - y^2 = 0$$

$$b^2 = y^2$$

$$b = y$$

in casu maximi (§. 63).

Quodsi denique hic valor substituatur in æquatione ad curvam $4b^3 x = 2b^2 y^2 - y^4$; erit

$$4b^3 x = 2b^4 - b^4 = b^4$$

adeoque $x = \frac{1}{4} b$

Curvæ igitur hujus ductus est prorsus mirabilis.

PROBLEMA CXXXIII.

307. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam* $ay^2 = x^3 - bx^2$.

Quia $ayy = x^3 - bx^2$

erit $2aydy = 3x^2 dx - 2bxdx$

$$dy = \frac{3x^2\, dx - 2bxdx}{2ay}$$

$$ddy = 0 =$$

$$\frac{12axydx^2 - 4abydx^2 - 6ax^2 dxdy + 4abxdxdy}{4a^2 y^2}$$

Hinc

$$(12axy - 4aby)\, dx^2 = (6ax^2 - 4abx)\, dxdy$$

$$\frac{(6x - 2b)\, ydx}{3x^2 - 2bx} = dy = \frac{(3x^2 - 2bx)\, dx}{2ay}$$

$$(12x - 4b)\, ayy = (3x^2 - 2bx)^2$$

$$(12x - 4b)\,(x^3 - bx^2) = (3x^2 - 2bx)^2$$

hoc est,

$$12x^4 - 16bx^3 + 4b^2 x^2 = 9x^4 - 12bx^3 + 4b^2 x^2$$

$$3x^4 - 4bx^3 = 0$$

$$3x - 4b = 0$$

$$3x = 4b$$

$$x = \frac{4}{3} b$$

Substituatur valor ipsius x in æquatione data $ayy = x^3 - bx^2$; reperietur $ayy = \frac{64}{27} b^3 - \frac{16}{9} b^3 = \frac{64}{27} b^3 - \frac{48}{27} b^3 = \frac{16}{27} b^3$

$$y = \tfrac{4}{3} \sqrt{(b^3 : 3a)}$$

PROBLEMA CXXXIV.

308. *Determinare punctum flexus contrarii in curva ad quam* $y - a = (x - a)^{3:5}$

Quoniam $y - a = (x - a)^{3:5}$

erit $dy = \frac{3}{5}(x - a)^{-2:5} dx$

Quodsi ergo dx sumatur pro constante; reperietur

$$ddy = -\tfrac{6}{25}(x - a)^{-7:5} dx^2 = 0$$

$$-\tfrac{6}{25}(x - a)^{-7:5} = 0$$

$$-6 = 0$$

Quoniam nullus valor ipsius x prodit in hypothesi $ddy = 0$; ponatur

— 6 *dx*

$$-\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5}dx^2 = \infty$$

erit $25\ (x-a)^{7:5} = 0$

$$x - a = 0$$

$$x = a$$

PROBLEMA CXXXV.

309. *Determinare punctum flexus contrarii in curvis, quarum semiordinatæ* CM, C*m*, *ex puncto fixo* C *ducuntur.*

Tab. III. Fig. 35. n. 1. 2. Sit C*m* ipsi CM infinite propinqua & CM $= y$. Tangat TM curvam in puncto M, & occurrat ipsi CT ad CM perpendiculari in T. Erigatur etiam C*t* perpendicularis ad C*m*, & ducatur tangens *tm* ad punctum *m*, quæ ipsi C*t* in *t* occurret. Secabit autem tangens TM perpendicularem C*t* in L, eritque C*t* < CL, quando curva puncto C seu polo convexitatem obvertit: ast eadem C*t* > CL, quando curva est versus polum C concava. Igitur in flexus contrarii puncto L*t* $= 0$. Describatur jam ex centro C radio CM arcus MR $= dx$ & radio CT arcus TH; erit ob MCT $= m$ C*t* (§. 145 *Geom.*) MC*m* $=$ HCT (§. 91 *Arithm.*); consequenter arcus TH ∽ MR (§. 141 *Geom.*). Porro TCM est rectus, *per construct.* MR*m* itidem rectus (§. 38), adeoque TCM $=$ MR*m* (§. 145 *Geom.*) Et quia TMC $=$ M*m*C $+$ MC*m* (§. 239 *Geom.*), & MC*m* $= 0$; erit M*m*R $=$ TMC, consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$mR : MR = MC : TC$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Et ob arcus MR & TH similes, *per demonstrata*, erit (§. 413 *Geom.* & §. 171 *Arithm.*)

$$CM : CT = MR : TH$$

$$y : \frac{ydx}{dy} = dx : \frac{dx^2}{dy}$$ Tab. III. Fig. 35.

Denique cum, ob infinite parvum LCT, angulus HLT $=$ LTC (§. 239 *Geom.*), & H rectus (§. 38), MCT itidem rectus, *per construct.* erit (§. 267 *Geom.*)

$$CM : CT = TH : HL$$

$$y : \frac{ydx}{dy} = \frac{dx^2}{dy} : HL$$

Ergo HL $= dx^3 : dy^2$.

Est vero ob CT $= ydx : dy$, sumto arculo MR $= dx$ pro constante, *t*H $= (dxdy^2 - ydxddy) : dy^2$ (§. 300). Ergo *t*L $=$ *t*H $+$ HL $= (dxdy^2 - ydxddy + dx^3) : dy^2$.

Fiat jam $\frac{dxdy^2 - ydxddy + dx^3}{dy^2} = 0$

erit $dy^2 + dx^2 = yddy$

PROBLEMA CXXXVI.

310. *Determinare punctum flexus contrarii in Conchoide* NICOMEDIS.

Sit AB $= q$M $= a$, BC $= b$, C$q = z$, CM $= y$, M$r = dx$, erit $mr = dy$ & (§. 535 *part.* 1) Tab. I. Fig. 5.

$$z + a = y$$

$$dz = dy$$

Porro B$q = \sqrt{(zz - bb)}$ (§. 417 *Geom.*) & ducto arculo *qt*, erit ob rectos *t* & B, atque S & *q* non nisi infinite parvo angulo *q*CS differentes (§. 239 *Geom.*), adeoque æquales (§. 4), △S*qt* ∽ △BC*q* (§. 267 *Geom.*); consequenter

$$Bq : BC = St : tq$$

$$\sqrt{(z^2 - b^2)} : b = dz : \frac{bdz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}}$$

Et ob sectores C*qt* & CM*r* similes est

Tab.I. Fig.5. $Cq : qt = CM : Mr$

$$z : \frac{bdz}{\sqrt{(z^2-b^2)}} = z + a : \frac{bzdz + abdz}{z\sqrt{(z^2-b^2)}}$$

Unde $dx = (bzdz + abdz) : z\sqrt{(z^2 - b^2)}$

$$zdx\sqrt{(z^2-b^2)} = bzdz + abdz$$

$$\frac{zdx\sqrt{(z^2-b^2)}}{bz+ab} = dz = dy$$

Si itaque dx sumatur pro constante, cum sit differentiale ipsius $zdx\sqrt{(z^2-b^2)} = dzdx\sqrt{(z^2-b^2)} + z^2dzdx : \sqrt{(z^2-b^2)} = (2z^2-b^2)dzdx : \sqrt{(z^2-b^2)}$ & differentiale denominatoris $bz+ab$ sit bdz, reperitur $ddy = (2bz^3 - b^3z + 2abz^2 - ab^3)dzdx : (bz+ab)^2\sqrt{(z^2-b^2)} - bz\sqrt{(z^2-b^2)}dzdx : (bz+ab)^2 = (bz^3 + 2abbz^2 - ab^3)dzdx : (bz+ab)^2\sqrt{(z^2-b^2)} =$ [substituto valore ipsius dz,] $(bz^4 + 2abz^3 - ab^3z)dx^2 : (bz+ab)^3$.

Quoniam in puncto flexus contrarii

$$yddy = dx^2 + dy^2 \ (\S. 308)$$

hinc tandem eruitur

$$b(z+a)(z^4 + 2az^3 - ab^2z)dx^2 : (bz+ab)^3 = dx^2 + (z^4 - b^2z^2)dx^2 : (bz+ab)^2$$

$$z^4 + 2az^3 - ab^2z = (bz+ab)^2 + z^4 - b^2z^2$$

$$2az^3 - ab^2z = b^2z^2 + 2ab^2z + a^2b^2 - b^2z^2$$

$$= 2ab^2z + a^2b^2$$

$$2az^3 - 3ab^2z = a^2b^2$$

$$z^3 - \tfrac{3}{2}b^2z - \tfrac{1}{2}ab^2 = 0$$

Tab.I. Fig.14. Describatur itaque parametro b parabola & (§. 622 *part.* 1) fiat $AL = \frac{5}{4}b$, & $LI = \frac{1}{4}a$. Ex centro I per verticem A describatur circulus: dico esse $PM = z$. Nam $AI^2 = LI^2 + AL^2 = \frac{1}{16}aa + \frac{25}{16}bb$, & $MR = z - \frac{1}{4}a$, $AP = z^2 : b$, $IR = z^2 : b - \frac{5}{4}b$. Quare ob $AI^2 = MI^2 = IR^2 + MR^2$, $\frac{1}{16}aa + \frac{25}{16}bb =$

$$\frac{z^4}{bb} - \frac{10}{4}z^2 + \frac{25}{16}b^2 + z^2 - \frac{1}{2}az + \frac{1}{16}aa$$

$$\frac{z^4}{bb} - \frac{6}{4}z^2 - \frac{1}{2}az = 0 \qquad z : bb$$

$$z^3 - \tfrac{3}{2}b^2z - \tfrac{1}{2}ab^2 = 0$$

SCHOLION.

311. *Nisi inconsulta nobis visa fuisset figurarum multiplicatio, Parabolam circa axem CT descripsissemus, statuto vertice in C & crure sursum tendente.*

PROBLEMA CXXXVII.

312. *Determinare punctum flexus contrarii in Spirali parabolica AMC, quæ generatur, si axis Parabolæ in peripheriam circuli incurvatur.* Tab. III. Fig.

Quoniam semiordinatæ PM ad axem perpendiculares; in centro C concurrere debent (§. 38). Quare si parameter Parabolæ a, abscissa $AP = v$, $PM = y$; erit æquatio ad Spiralem parabolicam

$$av = y^2$$

adeoque $adv = 2ydy$

$$dv = 2ydy : a$$

Sit porro radius circuli $= r$, $MR = dx$; erit $CM = r - y$, &

$$CP : Pp = CM : MR$$

$$r : dv = r - y : dx$$

$$rdx = rdv - ydv$$

$$dx = (r-y)dv : r$$

hoc est, substituto valore ipsius dv,

$$(2rydy - 2y^2dy) : ar = dx$$

$$(4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4)dy^2 : a^2r^2 = dx^2$$

&, si dx sumatur pro constante,

$$\frac{2rdy^2 - 4ydy^2 + 2ryddy - 2y^2ddy}{ar} = 0$$

$$(r - 2y)dy^2 + (ry - y^2)ddy = 0$$

$$(r-y)yddy = (2y-r)dy^2$$

$$yddy = (2y - r)dy^2 : (r-y)$$

Habe-

Habemus adeo

ob $dx^2 + dy^2 = yddy$ (§. 309)

$$\frac{(4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4 + a^2r^2)\,dy^2}{a^2r^2} = \frac{(2y-r)\,dy^2}{r-y}$$

$$4r^3y^2 - 8r^2y^3 + 4ry^4 + a^2r^3 - 4r^2y^3 + 8ry^4 - 4y^5 - a^2r^2y = 2a^2r^2y - a^2r^3$$

$$4y^5 - 12ry^4 + 12r^2y^3 - 4r^3y^2 + 3a^2r^2y - 2a^2r^3 = 0$$

Hujus æquationis radix y eſt ſemiordinata PM in puncto flexus contrarii.

CAPUT III.

De uſu Calculi differentio-differentialis in inveſtigandis Evolutis curvarum & Radio oſculi.

DEFINITIO XVII.

Tab. III. Fig. 37. 313. SI curvæ BC filum circumplicetur & ſucceſſive iterum ab ea abducatur, extremitas ejus A in rectam MC extenſi curvam aliam deſcribit, quam HUGENIUS inventor (k) *Curvam ex evolutione deſcriptam*; ſicut alteram, quæ evolvitur, *Evolutam* vocat.

DEFINITIO XVIII.

314. Portio fili MC appellatur *Radius Evolutæ*, item *Radius curvedinis*, *Radius oſculi*. Circulus enim, qui radio evolutæ MC ex centro C deſcribitur, dicitur curvam ex evolutione deſcriptam in M *oſculari*.

COROLLARIUM I.

315. Evoluta igitur BC eſt locus centrorum omnium circulorum curvam ex evolutione deſcriptam AMI oſculantium.

COROLLARIUM II.

316. Quando punctum B cadit in A, radius evolutæ MC æquatur arcui BC, alias aggregato ex AB & arcu BC.

COROLLARIUM III.

317. Quia elementum arcus Mm in curva ex evolutione deſcripta eſt arcus circuli radio CM deſcriptus (*§. 313*); radius evolutæ CM eſt ad curvam AMI perpendicularis (§. *38*). Tab. III. *Fig. 37.*

(k) In *Horolog. Oſcillatorio* part. 3. Def. 3. ſf. *60.*

COROLLARIUM IV.

318. Quoniam radius evolutæ MC ipſam evolutam BC continuo tangit, ceu ex geneſi manifeſtum (§. *313*); curvæ ex evolutione per innumera puncta deſcribuntur, ſi tangentes in quotlibet punctis evolutæ producantur: donec arcubus ſibi reſpondentibus æquales fiant.

SCHOLION.

319. *Meditatio de curvarum oſculis debetur illuſtri* LEIBNITIO, *qui primus Evolutarum* Hugenianarum *in metienda curvedine curvarum uſum oſtendit.*

PROBLEMA CXXXVIII.

320. *Determinare Radium oſculi vel curvedinis in curvis, quarum ſemiordinatæ* PM *&* pm *ſunt ad axem perpendiculares.* Tab. III. Fig. 37.

RESOLUTIO.

Sit ſemiordinata pm alteri PM infinite propinqua; ſit item radius oſculi Cm alteri CM infinite propinquus. Ducatur CE ipſi AB parallela, donec

 ſemior-

Tab. III. Fig. 37. semiordinatæ MP continuatæ in E occurrat, & MG eidem axi AB parallela. Quoniam anguli E & R sunt recti, &, ob EMG & CM*m* (§. 317) rectos adeoque æquales (§. 145 *Geom.*) utrinque angulo CMG sublato, EMC = GM*m*; erit (§. 267 *Geom.*)

$$MR : Mm = ME : MC$$

$$dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = t : \frac{t\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$$

Jam cum radius MC constans intelligatur, quandiu ex centro C arcus infinite parvus M*m* describitur, interea vero ME augeatur quantitate differentiali R*m*; erit radii osculi CM differentiale nullum (§. 7). Sed, si dx sumatur pro constante, differentiale ipsius MC est

$$\frac{dt\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx} + \frac{tdy\,ddy}{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \frac{dtdx^2 + dtdy^2 + tdyddy}{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}.$$

$$\text{Ergo } \frac{dtdx^2 + dtdy^2 + tdyddy}{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 0$$

$$dtdx^2 + dtdy^2 = -tdyddy$$

Quoniam *m*R differentiale semiordinatæ etiam differentiale ipsius ME ob PE constantem; erit $dt = dy$.

$$\text{Quare } dx^2 + dy^2 = -tddy$$

$$(dx^2 + dy^2) : -ddy = t$$

Quodsi itaque, ex æquatione ad curvam datam, substituatur valor ipsius dy^2 & $-ddy$; prodibit ME $= t$ in quantitatibus ordinariis.

Si vero radius evolutæ MC ipse desideretur (quem interdum inveniri præstat) fiat (§. 268 *Geom.*) ob PH $= ydy : dx$ (§. 35)

$$MP : PH = ME : EC$$

$$y : \frac{ydy}{dx} = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} : \frac{dx^2 dy + dy^3}{-dxddy}$$

$$\text{Unde } EC^2 = \frac{dx^4 dy^2 + 2dx^2 dy^4 + dy^6}{dx^2 ddy^2}$$

$$ME^2 = \frac{dx^4 + 2dx^2 dy^2 + dy^4}{ddy^2} = \frac{dx^6 + 2dx^4 dy^2 + dx^2 dy^4}{dx^2 ddy^2}.$$

$$MC^2 = \frac{dx^6 + 3dx^4 dy^2 + 3dx^2 dy^4 + dy^6}{dx^2 ddy^2} = \frac{(dx^4 + 2dx^2 dy^2 + dy^4)(dx^2 + dy^2)}{dx^2 ddy^2}$$

$$MC = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{-dxddy}.$$

PROBLEMA CXXXIX.

321. *Data æquatione ad curvam algebraicam, invenire æquationem ad Evolutam.*

RESOLUTIO.

1. Investigentur quantitates BN & CN in valore abscissæ AP aut semiordinatæ PM. Nimirum ME invenitur (§. 320): unde subducta PM relinquit PE=NC. Sed per analogiam PM : PH=ME : EC (§. 268 *Geom.*) reperitur EC. Si vero ex AP+EC =AN subtrahatur AB radius Evolutæ in vertice B, per Probl. præc. determinandus, relinquitur BN.
2. Fiat valor ipsius BN $= v$, CN $= z$ & communis æquationum reductio dabit æquationem ad Evolutam in puris v & z atque constantibus.

PROBLEMA CXL.

322. *Invenire Radium circuli Parabolam osculantis, & æquationem ad ejus Evolutam.*

I. Quo-

I. Quoniam $ax = y^2$

erit $adx = 2ydy$

$adx : 2y = dy$

$a^2dx^2 : 4y^2 = dy^2$

h. e. $adx^2 : 4x = dy^2$

Et, si dx sumatur pro constante, invenietur ob $adx : 2\sqrt{ax} = dy$

$-adx^2 : 4x\sqrt{ax} = ddy$

Tab. III. Fig. 37. Unde $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = \frac{(4xdx^2 + adx^2)4x\sqrt{ax}}{4axdx^2} = \frac{(a+4x)\sqrt{ax}}{a} = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a} = y + \frac{4xy}{a}$ $= t =$ ME $=$ PM$+$PE. Est vero PM $= y$. Ergo PE $= 4xy : a$, hoc est, quia $x = y^2 : a$, PE $= 4y^3 : aa$.

Constructio. Quoniam PM $= y$, TP $= 2y^2 : a$, (§. 21); si in T excitetur ad TM perpendicularis TE ipsi MP continuatæ in E occurrens; erit PE $= 4y^4 : aay = 4y^3 : aa$ (§. 327 *Geom*). Quodsi ulterius in E & M excitentur perpendiculares EC & MC ad ME & MT; communis intersectio in C radium osculi seu Evolutæ MC determinabit (§. 317).

II. Quoniam EC ipsi PH parallela; erit (§. 268 *Geom.*) ob PH $= \frac{1}{2}a$ (§. 36)

MP : PH $=$ ME : EC

$y : \frac{1}{2}a = y + \frac{4xy}{a} : \frac{1}{2}a + 2x$

adeoque EC^2 $= \frac{1}{4}aa + 2ax + 4xx$

ME^2 $= ax + 8x^2 + 16x^3 : a$

MC^2 $= \frac{1}{4}aa + 3ax + 12x^2 + 16x^3 : a$.

Jam cum MC coincidit in AB, hoc est, quando radius Evolutæ est AB, $x = 0$. Quare AB^2 $= \frac{1}{4}aa$ & hinc AB $= \frac{1}{2}a$. Est adeo BN $=$ AP $+$ PM $-$ AB $= 3x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a = 3x$. Sit jam BN $= v$, CN $=$ PE $= z$: erit

$v = 3x \qquad z = 4x\sqrt{ax} : a$ Tab. III. Fig. 37.

$\frac{1}{3}v = x \qquad z = \frac{4}{3}v\sqrt{\frac{1}{3}av} : a$

$3az = 4v\sqrt{\frac{1}{3}av}$

$9a^2z^2 = \frac{16}{3}av^3$

$a : 3$

$27az^2 = 16v^3$

En æquationem ad evolutam Parabolæ *Apollonianæ*: unde intelligitur Evolutam Parabolæ APOLLONII esse Parabolam secundi generis, cujus parameter $= \frac{27}{16}$ parametri Parabolæ *Apollonianæ.*

III. Si MC in terminis analyticis quæratur, erit, substitutis in formula generali $(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} : -dxddy$ valoribus dy^2 & $-ddy$ paulo ante inventis, MC $=$ $(dx^2 + \frac{adx^2}{4x})\sqrt{(dx^2 + \frac{adx^2}{4x})}4x\sqrt{ax} : adx^3$ $= (4x+a)dx^3\sqrt{(4x+a)}4x\sqrt{ax} : 8axdx^3\sqrt{x}$ $= (4x+a)\sqrt{(4x+a)} : 2\sqrt{a}$

Quodsi fiat $x = 0$, erit vi n. 1, ME $= 0$ & MC $= a\sqrt{a} : 2\sqrt{a} = \frac{1}{2}a$, hoc est, circuli Parabolam in vertice osculantis diameter æquatur parametro, & centrum ejus, ob ME $= 0$, est in axe Parabolæ. Porro, quia MC $= \frac{(4x+a)\sqrt{(4x+a)}}{2\sqrt{a}}$ $= \frac{(4ax+aa)\sqrt{(4ax+aa)}}{2a^2}$, & $\frac{1}{2}\sqrt{(4ax+aa)}$ $=$ MH seu normali: erit MC $= \frac{8\text{MH}^3}{2a^2}$

Est autem 8MH^3 cubus duplæ normalis MH, sicuti $2a^2$ duplum quadrati parametri.

Constructio. Fiat a : 2MH $=$ 2MH : $\frac{4\text{MH}^2}{a}$ & 2MH : $\frac{4\text{MH}^2}{a} = \frac{4\text{MH}^2}{a} : \frac{8\text{MH}^3}{a^2}$ hoc est, quæratur ad parametrum & duplam normalem 2MH quarta continue proportionalis, erit ejus dimidium radius osculi MC.

Tab. III. Fig. 37. Quoniam etiam $MC = 4MH^3 : a^2$, erit etiam $a : MH = MH : \frac{MH^2}{a}$: & $MH : \frac{MH^2}{a} = \frac{MH^2}{a} : \frac{MH^3}{a^2}$, hoc eſt, quæratur ad parametrum & normalem MH quarta continue proportionalis, erit ejus quadrupla radius oſculi ſeu evolutæ MC.

PROBLEMA CXLI.

323. *Determinare Radium oſculi ſeu Evolutæ* MC *in infinitis Parabolis aut Paraboloidibus.*

Ad infinitas parabolas (§. 519 *part.* 1).

$$y^m = a^{m-1}x$$

$$my^{m-1}dy = a^{m-1}dx$$

Quodſi ergo dx ſumatur pro conſtante, erit

$$(m^2-m)\,y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = 0$$

$$(m^2-m)\,y^{m-2}\,dy^2 = -my^{m-1}\,ddy$$

$$(m-1)\,y^{-1}\,dy^2 = -ddy$$

Quamobrem

$$(dx^2+dy^2) : -ddy = (ydx^2+ydy^2) : (m-1)dy^2$$

hoc eſt, ob $dx^2 = m^2y^{2m-2}dy^2 : a^{2m-2}$

$$ME = \frac{m^2y^{2m-1}dy^2 + a^{2m-2}ydy^2}{(m-1)\,a^{2m-2}dy^2} =$$

$$\frac{m^2y^{2m-1} + a^{2m-2}y}{(m-1)\,a^{2m-2}} = \frac{m^2y^{2m-1}}{(m-1)a^{2m-2}} + \frac{y}{m-1}$$

$$= \frac{1}{m-1}y + \frac{m^2x^2}{(m-1)y}$$

Sit jam $m = 2$, erit $x = y^2 : a$ & hinc $x^2 = ax \cdot y^2 : a^2 = xy^2 : a$, adeoque $ME = 4xy^2 : ay + y = 4xy : a + y$, ut in Problemate præcedente.

PROBLEMA CXLII.

324. *Determinare Radium oſculi in circulo.*

Quoniam ad circulum (§. 377 *part.* 1)

$$y^2 = 2rx - xx$$

$$\text{erit } 2ydy = 2rdx - 2xdx$$

$$ydy = rdx - xdx$$

Quare ſi dx ſumatur pro conſtante, erit

$$dy^2 + y\,ddy = -dx^2$$

$$(dx^2 + dy^2) : y = -ddy$$

Quare (§. 320)

$$\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = \frac{y\,(dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dy^2} = y$$

Eſt itaque $ME = y$, hoc eſt, punctum E cadit in P, adeoque C in centrum circuli H (§. 38, 320). Radius igitur circuli idem eſt cum radio oſculi, hoc eſt, circulus, qui circulum oſculatur, huic congruit & circuli Evoluta eſt centrum ejus.

PROBLEMA CXLIII.

325. *Invenire Radium oſculi in Ellipſi.*

Quoniam ad Ellipſin (§. 420 *part.* 1)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

$$\text{erit } 2aydy = abdx - 2bxdx$$

$$dy = (abdx - 2bxdx) : 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$$

ob $a^2y^2 = a^2bx - abx^2$.

Unde, ſi dx ſumatur pro conſtante,

$$ddy = -\frac{4bdx^2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}}{4a^2bx - 4abx^2}$$

$$\frac{a^3b^2dx^2 - 4a^2b^2xdx^2 + 4ab^2x^2dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)}} =$$

$$\frac{(-4a^2b^2x + 4ab^2x^2 - a^3b^2 + 4a^2b^2x - 4ab^2x^2)dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)}}$$

$$= -\frac{a^3b^2dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)}}$$

Nimirum ſi $D = 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$ & $N = abdx - 2bxdx$; reperietur $dD = (a^2bdx - 2abxdx) : \sqrt{(a^2bx - abx^2)}$, adeoque $\frac{dD.\,N}{D^2} =$

$$\frac{a^3b^2dx^2 - 4a^2b^2xdx^2 + 4ab^2x^2dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)}},$$

quæ eſt differentialis valoris ipſius dy pars negativa (§. 19).

Eſt

Eſt vero porro

$$dy^2 = \frac{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2)\,dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)}$$

Quare $dy^2 + dx^2 = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)dx^2 : (4a^2bx - 4abx^2)$ & $(dy^2 + dx^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)}\,dx^3 : (4a^2bx - 4abx^2)\,2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$; conſequenter $MC = (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -dxddy = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)} : 2a^3b^2 =$ (brevitatis gratia) $v\sqrt{v} : 2a^3b^2$.

Eſt vero (§. 44) normalis $MH = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx$. Quare cum ſit $y = \sqrt{(abx - bx^2)} : \sqrt{a}$ & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{v} : 2\sqrt{(abx - bx^2)}\sqrt{a}$. Erit $MH = \sqrt{(abx - bx^2)}dx\sqrt{v} : 2a\sqrt{(abx - bx^2)}\,dx = \sqrt{v} : 2a$; conſequenter $MH^3 = v\sqrt{v} : 8a^3$; adeoque $4MH^3 = v\sqrt{v} : 2a^3$.

Eſt itaque $MC = v\sqrt{v} : 2a^3b^2 = 4MH^3 : b^2$

Conſtructio. Fiat $b : MH = MH : MH^2$ & $MH : \frac{MH^2}{b} = \frac{MH^2}{b} : \frac{MH^3}{b^2}$

hoc eſt, quæratur ad parametrum b & normalem MH quarta continue proportionalis; erit hujus quadrupla radius oſculi MC.

COROLLARIUM.

326. Si AP, ſive $x = 0$: circuli in A Ellipſin oſculantis AB radius reperitur $a^2b^2\sqrt{a^2b^2} : 2a^3b^2 = a^3b^3 : 2a^3b^2 = \frac{1}{2}b$.

PROBLEMA CXLIV.

327. *Invenire Radium oſculi ſeu Evolutæ in Hyperbola.*

Quoniam ad Hyperbolam (§. 459 *part.* I) $ay^2 = abx + bx^2$, radius oſculi MC eodem prorſus, ut in Probl. præced. modo invenitur $(4a^2bx + 4abx^2 + a^2b^2 + 4ab^2x + 4b^2x^2)\sqrt{(4a^2bx + 4abx^2 + a^2b^2 + 4ab^2x + 4b^2x^2)} : 2a^3b^2 = 4MH^3 : bb$ &, ſi $x = 0$, hoc eſt in vertice,

$$= a^2b^2\sqrt{a^2b^2} : 2a^3b^2 = \tfrac{1}{2}b.$$

PROBLEMA CXLV.

328. *Invenire radium circuli* MC *Cycloidem* AMB *in* M *oſculantis.* Tab. III. Fig. 39.

Sit diameter circuli genitoris $AD = 1$, $AP = x$, $PM = y$, erit $QP = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 *part.* I), arcus $AQ = \int(dx : 2\sqrt{(x - xx)})$ (§. 157); adeoque $PM = PQ + QM = \sqrt{(x - xx)} + \int(dx : 2\sqrt{(x - xx)})$ (§. 575 *part.* I). Quamobrem

$$y = \sqrt{(x - xx)} + \int\frac{dx}{2\sqrt{(x - xx)}}$$

$$dy = \frac{dx - 2xdx + dx}{2\sqrt{(x - xx)}} = \frac{2dx - 2xdx}{2\sqrt{(x - xx)}}$$

$= dx(1 - x) : \sqrt{x}.\sqrt{(1 - x)} = dx\sqrt{(1 - x)} : \sqrt{x}$

Quodſi ergo dx ſumatur pro conſtante, reperietur

$ddy = -dx^2\sqrt{x} : 2x\sqrt{(1 - x)} - dx^2\sqrt{(1 - x)} : 2x\sqrt{x} = (-xdx^2 - dx^2 + xdx^2) : 2x\sqrt{(x - xx)} = -dx^2 : 2x\sqrt{(x - xx)}$.

Unde ob $dx^2 + dy^2 = dx^2 + dx^2.(1 - x) : x = (xdx^2 + dx^2 - xdx^2) : x = dx^2 : x$; eruitur $MC = (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -dxddy$ (§. 320) $= 2xdx^3\sqrt{(x - x^2)} : xdx^3\sqrt{x} = 2\sqrt{(1 - x)} = 2DQ$ (§. 417 *Geom.*). Nam

$PD^2 = 1 - 2x + xx$
$PQ^2 = x - xx$
$DQ^2 = 1 - x$. Ergo $DQ = \sqrt{(1 - x)}$.

Conſtructio. Quoniam tangens TM ipſi AQ parallela (§. 132); TMQ = AQP (§. 233 *Geom.*); Eſt vero AQD rectus (§. 317 *Geom.*), & TMC itidem rectus (§. 317): Ergo QMC = PQD (§. 91 *Arithm.*); conſequenter MC ipſi QD parallela. Conſtructio igitur talis eſt: Ducatur MC ipſi QD parallela, & fiat EC = EM; erit C punctum in Evoluta Cycloidis.

Co-

COROLLARIUM I.

329. Si $x = 0$; erit radius evolutæ $2\sqrt{1} = 2 = 2AD$, quia $AD = 1$. Quare si DG fiat $= AD$; in G terminabitur Evoluta ex una parte. Si $x = AD = 1$; erit radius Evolutæ $2\sqrt{(1-1)} = 2\sqrt{0} = 0$. Quare Evoluta ex altera parte in B terminatur.

COROLLARIUM II.

330. Quodsi BL ipsi QD vel MC parallela ducatur, erit LBD = BDQ (§.233 *Geom.*), adeoque arcus QD & BL (§.322 *Geom.*) chordæque cognomines (§.289 *Geom.*); consequenter BL = EC (§.337 *Geom.*), & hinc LC ipsi BE æqualis & parallela (§.257 *Geom.*). Est vero BE arcui QD (§.575 *part.*1) adeoque & alteri BL, *per demonstr.* æqualis. Quare LC æqualis arcui BL (§.87 *Arithm.*). Est itaque Evoluta Cycloidis itidem Cyclois æqualis & similis (§.575 *part.*1), hoc est, Cyclois sui evolutione seipsam describit.

SCHOLION.

331. *Cum Radius osculi aut Evolutæ vel æqualis sit arcui Evolutæ, vel eundem quantitate data excedat (§.316); omnes arcus Evolutarum geometrice rectificantur, quarum radii per constructiones geometricas exhiberi possunt. Unde patet, cur arcus Cycloidis* BC *sit chordæ* BL *duplus* (§.168): *est enim radius Evolutæ* MC *ejusdem duplus* (§.328) *& Evoluta Cycloidis ipsa quoque Cyclois est* (§.330). *Liquet etiam innumeras inveniri posse curvas, quæ saltem geometrice rectificantur. Ceterum utilis est Radii osculi inventio, quia arcus circuli osculatoris substitui potest pro arcu curvæ, quam osculatur, in praxi. Ita speculum sphæricum cavum, observante* LEIBNITIO *in* Actis Erudit. *A.* 1686, *substituitur parabolico, quia parameter parabolæ est diameter circuli eam in vertice osculantis* (§.317) *sicque perinde ac parabolicum distantiam foci habet quartæ diametri parti æqualem.*

PROBLEMA CXLVI.

332. *Determinare Radium osculi seu Evolutæ in Logarithmica.*

Quoniam in Logarithmica (§.54)

$$ydx : dy = a$$
$$ydx : a = dy$$
$$dxdy : a = ddy,$$ quia dx constans

seu $ddy = ydx^2 : a^2$,

Est vero $dy^2 = y^2dx^2 : a^2$, adeoque

$$dy^2 + dx^2 = y^2dx^2 : a^2 + dx^2$$
$$= (y^2 + a^2)\, dx^2 : a^2$$
$$(dy^2+dx^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dx^3(y^2+a^2)\sqrt{(y^2+a^2)} : a^3$$
$$(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} : -dxddy = \frac{dx^3(y^2+a^2)\sqrt{(y^2+a^2)}}{-a^3ydx^3 : a^2} \quad \frac{(y^2+a^2)\sqrt{(y^2+a^2)}}{-ay}$$

Est igitur Radius osculi seu Evolutæ $= (y^2+a^2)\sqrt{(y^2+a^2)} : ay$.

Enimvero cum a sit subtangens Logisticæ PT, y semiordinata PM, erit $\sqrt{(y^2+a^2)}$ tangens TM (§.417 *Geom.*). Porro cum sit

$$TP : PM = PM : PH$$
$$a : y = y : PH$$

erit subnormalis $PH = y^2 : a$; consequenter TH composita ex subnormali $y^2 : a$ & subtangente $a = (y^2+a^2) : a$.

Habemus adeo

$$y : \frac{y^2+a^2}{a} = \sqrt{(y^2+a^2)} : MC$$

h. e. PM : TH = TM : MC

Theorema. In Logistica Radius osculi seu Evolutæ est quarta proportionalis ad semiordinatam, tangentem atque compositam ex subtangente ac subnormali.

Quantitas negativa est, ob valorem ipsius y in præsente casu negativum.

Porro quoniam ay est spatium logisticum interminatum HPMI (§.134) & $(a^2+y^2)\sqrt{(a^2+y^2)} = TM^3$; erit HPMI : $TM^2 = TM : MC$. Habemus itaque hoc

Theorema. Spatium logisticum interminatum est ad quadratum tangentis, ut tangens ad Radium osculi seu Evolutæ.

SEC-

SECTIO QUINTA.

DE ARITHMETICA INFINITORUM.

CAPUT I.

De natura Arithmeticæ infinitorum.

DEFINITIO XIX.

333. A*Rithmetica infinitorum* eſt methodus ſummandi ſeries numerorum infinitis terminis conſtantes, aut earum rationes inveſtigandi.

PROBLEMA CXLVII.

334. *Invenire ſummam fractionum infinitarum, quarum numerator communis eſt unitas, denominatores vero progrediuntur in ratione numeratoris primæ ad ſuum denominatorem.*

Sit fractio prima $1 : e$. Numerus terminorum cum ſit infinitus, & termini continuo decreſcant, devenietur tandem ad infiniteſimam (§. 2), adeoque ſumma fractionis primæ & hujus, quæ tanquam ultima conſideratur, ipſi fractioni primæ $1 : e$ æqualis (§. 4). Diviſa ergo per $e - 1$ dat ſummam omnium terminorum $1 : (ee - e)$, excepto primo (§. 119 *part.* 1). Quare ſumma integræ ſeriei $1 : (ee - e) + 1 : e = (1 + e - 1) : (ee - e) = e : (ee - e) = 1 : (e - 1)$.

Sit ex. gr. $e = 2$; erit $\int(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ &c. in infinit.$) = 1$.

Sit $e = 3$; erit $\int(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ &c. in infinit.$) = \frac{1}{2}$.

Sit $e = 4$; erit $\int(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$ &c. in infinit.$) = \frac{1}{3}$.

Sit $e = 5$; erit $\int(\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125}$ &c. in infinit.$) = \frac{1}{4}$.

Sit $e = 6$; erit $\int(\frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216}$ &c. in infinit.$) = \frac{1}{5}$.

PROBLEMA CXLVIII.

335. *Invenire ſummam infinitarum fractionum, ubi numerator communis eſt unitate minor denominatore primæ, & denominatores progrediuntur in ratione unitatis ad denominatorem primæ.*

Sit denominator fractionis primæ $= m$; erit numerator $= m - 1$. Summa primi & ultimi termini, utpote primo æqualis $= (m-1) : m$, quæ per $m - 1$ diviſa dat ſummam omnium terminorum, excepto maximo ſeu primo $1 : m$. Quare ſumma integræ ſeriei $= m : m = 1$.

Sit ex. gr. $m = 2$, erit $\int(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6}$ &c. in infinit.$) = 1$, ut ante (§. 334).

Sit $m = 3$, erit $\int(\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}$ &c. in infinit.$) = 1$.

Sit $m = 4$, erit $\int(\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64}$ &c. in infinit.$) = 1$.

SCHOLION.

336. *Poterat idem per modum Corollarii ex Theoremate præcedente deduci. Eſt enim* $\int(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$ &c.$) = \frac{1}{2}$ (§. 334). *Ergo duplum hujus ſeriei, hoc eſt,* $\int(\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}$ &c.$) = \frac{2}{2} = 1$. *Et in genere* $\int(\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4}$ &c. *in infinit.*$) = 1 : (m - 1)$. *Ergo multiplum hujus ſeriei, cum ſumitur vicibus* $m - 1$, *ſit neceſſe eſt* $(m - 1) : (m - 1) = 1$.

PROBLEMA CXLIX.

337. *Invenire summam infinitarum fractionum, ubi numerator communis deficit a denominatore primæ data quantitate, denominatores vero progrediuntur in ratione unitatis ad denominatorem primæ.*

Si terminus primus $=(m-n):m$, qui, utpote æqualis summæ primi & ultimi, divisus per $(m-1)$ dat summam omnium terminorum maximo excepto $(m-n):(m^2-m)$. Quare summa seriei integræ $=(m-n):(m^2-m)+(m-n):m=(m-n+m^2-mn-m+n):(m^2-m)=(m^2-mn):(m^2-m)=(m-n):(m-1)$.

Sit ex. gr. $n=1$, erit $(m-n):(m-1)$ $=(m-1):(m-1)=1$.

Sit $n=2$, $m=4$, erit $\int(\frac{2}{4}+\frac{2}{16}+\frac{2}{64}$ &c. $=(4-2):(4-1)=\frac{2}{3}$.

Sit $n=2$, $m=5$; erit $\int(\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{125}$ &c. $=(5-2):(5-1)=\frac{3}{4}$.

Sit $n=2$, $m=6$; erit $\int(\frac{4}{6}+\frac{4}{36}+\frac{4}{216}$ &c.) $=(6-2):(6-1)=\frac{4}{5}$.

Sit $n=2$, $m=7$; erit $\int(\frac{5}{7}+\frac{5}{49}+\frac{5}{343}$ &c.) $=(7-2):(7-1)=\frac{5}{6}$.

Similiter

Sit $n=3$, $m=6$; erit $\int(\frac{3}{6}+\frac{3}{36}+\frac{3}{216}$ &c.) $=(6-3):(6-1)=\frac{3}{5}$.

Sit $n=3$, $m=7$; erit $\int(\frac{4}{7}+\frac{4}{49}+\frac{4}{343}$ &c.) $=(7-3):(7-1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Sit $n=3$, $m=8$; erit $\int(\frac{5}{8}+\frac{5}{64}+\frac{5}{512}$ &c.) $=(8-3):(8-1)=\frac{5}{7}$.

Porro

Sit $n=4$, $m=8$; erit $\int(\frac{4}{8}+\frac{4}{64}+\frac{4}{512}$ &c.) $=(8-4):(8-1)=\frac{4}{7}$.

Sit $n=4$, $m=9$; erit $\int(\frac{5}{9}+\frac{5}{81}+\frac{5}{729}$ &c.) $=(9-4):(9-1)=\frac{5}{8}$.

Sit $n=4$, $m=10$, erit $\int(\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}$ &c.) $=(10-4):(10-1)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.&c.&c.

PROBLEMA CL.

338. *Invenire summam fractionum infinitarum, quarum communis est numerator, denominatores vero in ratione quacunque progrediuntur.*

Sit numerator communis $=m$; denominator fractionis primæ $=a$; denominator rationis $=n$; erit series summanda $\frac{m}{a}+\frac{m}{na}+\frac{m}{n^2a}+\frac{m}{n^3a}$ &c. in infinit. Unde eodem, quo in Problematibus præcedentibus, modo reperitur summa $m:(na-a)+m:a=(m+mn-m):(na-a)=mn:(na-a)=mn:a(n-1)$.

Sit ex. gr. $m=5$, $a=6$, $n=2$; erit $\int(\frac{5}{6}+\frac{5}{12}+\frac{5}{24}$ &c.) $=10:6(2-1)=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$.

Sit $m=3$, $a=5$, $n=4$; erit $\int(\frac{3}{5}+\frac{3}{20}+\frac{3}{80}+\frac{3}{320}$ &c.) $=12:5(4-1)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$.

Sit $m=1$, $a=7$, $n=2$; erit $\int(\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}$ &c.) $=2:7(2-1)=\frac{2}{7}$.

SCHOLION.

339. *Hoc Problema universalitate sua antecedentia omnia complectitur. Sit enim $n=a$ & $m=n-l$, qui est casus Problematis præcedentis: substitutis hisce valoribus in formula præsente, prodit $(n^2-ln):n(n-1)=(n-l):(n-1)$, quæ est formula Problematis præcedentis. Similiter sit $n=a$, $m=n-1$, erit summa $=(n^2-n):(n^2-n)=1$, ut supra (§.335). Denique si $m=1$, $n=a$; erit summa $=n:(n-1)n=1:(n-1)$, ut supra (§.334).*

PROBLEMA CLI.

340. *Invenire rationem summæ progressionis arithmeticæ simplicis ab* 1 *in infinitum continuatæ* $(1+2+3+4+5+6$ &c.) *ad summam totidem maximo æqualium.*

Termi-

Terminus primus $= 1$, numerus terminorum $= n$, differentia $= 1$. Ergo ultimus $= n$, & hinc $\int(1+2+3+4+5$ &c.$) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (§. 107 *part.* 1) & $\int n = n^2$. Cum n sit infinitus numerus, atque (§. 66 *Arith.*) $1 : n = n : n^2$; erit n^2 ipso n infinities majus, adeoque n respectu n^2 pro nihilo habendum (§. 3), consequenter $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n^2$. Est itaque $\int(1+2+3+4+5$ &c. in infinit.$)$: $\int n = \frac{1}{2}n^2 : n^2 = 1 : 2$ (§. 124 *part.* 1).

Theorema. Summa seriei numerorum naturalium in infinitum continuatæ est ad summam totidem maximo æqualium ut 1 ad 2.

PROBLEMA CLII.

341. *Invenire rationem summæ progressionis arithmeticæ, sive finitæ, sive infinitæ, cujus terminus primus est* 0, *ad summam totidem maximo æqualium.*

Terminus primus $= 0$, ultimus $= v$, numerus terminorum $= n$; erit summa progressionis $= \frac{1}{2}nv$ (§. 107 *part.* 1), summa vero totidem maximo æqualium nv. Est ergo illa ad hanc ut $\frac{1}{2}nv$ ad nv, hoc est, ut 1 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA CLIII.

342. *Invenire rationem, quam habet summa omnium quadratorum ab* 0 *in infinitum continuatorum ad summam totidem maximo æqualium.*

Sit terminus maximus n; erit summa quadratorum $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ (§. 205 *part.* 1). Est vero $1 : n = n^2 : n^3$ (§. 66 *Arithm.*). Ergo, quia 1 infinitesima ipsius n, *per hypoth.* erit etiam n^2 infinitesima ipsius n^3; consequenter $\frac{1}{2}n^2$, adeoque multo magis $\frac{1}{6}n$, respectu ipsius $\frac{1}{3}n^3$ pro nihilo habendum (§. 3). Est ergo summa infinitorum quadratorum $\frac{1}{3}n^3$. Quadratorum vero totidem maximo æqualium summa est n^3. Quare illa ad hanc ut $\frac{1}{3}n^3$ *ad* n^3, hoc est, ut 1 ad 3 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA CLIV.

343. *Invenire rationem, quam habet summa omnium cuborum ab* 0 *in infinitum continuatorum ad summam totidem maximo æqualium.*

Sit terminus maximus n; erit summa cuborum $\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$ (§. 205 *part.* 1.). Sed eodem modo, quo in Problemate præcedente, ostenditur $\frac{1}{2}n^3$, adeoque multo magis $\frac{1}{4}n^2$, respectu ipsius $\frac{1}{4}n^4$ tandem evanescere. Erit ergo summa infinitorum cuborum $\frac{1}{4}n^4$. Sed summa totidem cuborum maximo æqualium est n_4. Quare illa ad hanc ut $\frac{1}{4}n^4$ ad n^4, hoc est, ut 1 ad 4 (§ 124 *part.* 1).

PROBLEMA CLV.

344. *Invenire rationem, quam habet summa omnium potentiarum cujuscunque gradus ab* 0 *in infinitum continuatarum ad summam totidem maximæ æqualium.*

Quoniam omnes potentiæ inferiores numeri infiniti, respectu superioris, evanescunt (id quod eodem modo, quo in Probl. 153 ostenditur), summa omnium potentiarum ab 0 in infinitum continuatarum est $\frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1}$ (§. 203 *part.* 1) $= \frac{1}{m+1}n^{m+1}$ in casu infiniti, ob $1 = 0$, respectu n. Sed potentia maxima est n^m adeoque summa totidem maximæ æqualium n^{m+1}.

 Ergo

Ergo summa illa ad hanc ut $\frac{1}{m+1} \times n^{m+1}$ ad n^{m+1}, consequenter ut 1 ad $m+1$ (§. 124 *part.* 1).

Ex. gr. Sit $m = 2$; erit summa quadratorum infinitorum ad totidem maximo æqualium ut 1 ad 3.

Sit $m = 3$; erit summa cuborum infinitorum ad totidem maximo æqualium ut 1 ad 4.

Sit $m = 7$; erit summa potentiarum septimi gradus ad totidem maximæ æqualium ut 1 ad 8.

SCHOLION I.

345. *In infinitum continuari revera non aliud significat, quam eo usque continuari, donec quantitates quædam respectu aliarum evanescant* (*l*). *Nam ex. gr.* (§. 342) *in summa quadratorum* $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$, *ratio termini primi* $\frac{1}{3}n^3$ *ad reliquos* $\frac{1}{2}n^2$ & $\frac{1}{6}n$ *continuo crescit. Unde non mirum, si ratio posteriorum tandem adeo exigua evadat, ut assignari amplius nequeat. Est enim primus ad secundum* $= \frac{1}{3}n^3 : \frac{1}{2}n^2 = 2n : 3$ (§. 124 *part.* 1). *Quare crescente n, ratio ipsius* $2n$ *ad* 3 *continuo crescit* (§. 203 *Arithm.*). *Similiter terminus primus est ad tertium ut* $\frac{1}{3}n^3$ *ad* $\frac{1}{6}n$ *hoc est, ut* $2n^2$ *ad* 1 (§. 124 *part.* 1). *Quare crescente n, ratio ipsius* $2n^2$ *ad* 1 *multo magis crescit, quam in casu priore* (§. 203 *Arithm.*). *In eo igitur casu, in quo terminus secundus respectu primi fit inassignabilis, tertius multo magis inassignabilis esse debet.*

SCHOLION II.

346. *Eodem modo plurima alia Arithmeticæ infinitorum Theoremata inveniri possunt, si utamur iis, quæ in Analysi finitorum* (§. 210 & seqq.) *de numeris figuratis demonstrata sunt.*

SCHOLION III.

347. *Usum Arithmeticæ infinitorum in Geometria ostenderunt* (*m*) WALLISIUS *inventor, & qui eam magis excoluit,* Ismael BULIALDUS (*n*). *Enimvero cum per calculum* LEIBNITII *summatorium non modo ea, quæ per Arithmeticam infinitorum eruuntur, longe facilius, sed & plurima huic insuperabilia inveniri possint; e re nostra non esse judico, ut de ejus usu multa proferamus. Sufficerit igitur pauca eam in rem attulisse.*

CAPUT II.

De usu Arithmeticæ infinitorum in Geometria.

PROBLEMA CLVI.

Tab. III. Fig. 40. 348. *Invenire rationem trianguli* ACB *ad parallelogrammum* AEFB *super eadem vel æquali basi* AB, *& ejusdem altitudinis.*

Concipiatur altitudo CD in partes infinite parvas & inter se æquales divisa; triangulum ACD resolvetur in parallelogrammula, quorum bases sunt ordinatæ trianguli Mm, Nn, Oo &c. altitudines infinitesimæ ipsius CD; parallelogrammum vero EABF in totidem parallelogrammula & inter se & maximo in triangulo æqualia, quorum nempe bases basi trianguli AB

(*l*) Vid. *Ontologia* nostra §. 823. & seqq.

(*m*) In *Arithmetica infinitorum*, quæ extat in Vol. I. *Oper. Mathem.*

(*n*) In *Opere novo ad Arithmeticam infinitorum.*

Tab. II. Fig. 40. AB sigillatim æquales sunt. Parallelogrammula itaque, seu elementa trianguli progrediuntur in ratione ordinatarum Mm, Nn, Oo &c. (§. 389 *Geom.*). Ordinatæ vero sunt ut abscissæ CP, CQ, CR (§. 396 *Geom.*); &, quoniam altitudo in partes æquales divisa, abscissæ crescunt in progressione arithmetica 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. Ergo elementa trianguli constituunt progressionem arithmeticam a cyphra inchoatam & in infinitum continuatam. Est adeo triangulum ACB ad parallelogrammum EABF ut 1 ad 2 (§. 341).

PROBLEMA CLVII.

Tab. II. Fig. 28. 349. *Invenire rationem spatii parabolici externi* AKLPA *nec non interni* ANLPA, *ad rectangulum* AKLN *super eadem basi* KL *& ejusdem altitudinis* AK.

Si spatium parabolicum APLKA & rectangulum KN in parallelogrammula resolvantur, ut in Probl. præc. (§. 348), altitudine communi AK in partes infinite parvas æquales divisa; elementa parabolici progrediuntur ut semiordinatæ HI, QP, KL &c. iisdem vero in rectangulo totidem respondent maximo, cujus basis KL, æqualia. Quodsi parameter parabolæ fuerit a, AH$=1$, AQ$=2$, AK$=3$ &c. erit HI $= 1 : a$, QP $= 4 : a$, KL $= 9 : a$ &c. (§. 391 *part.* 1), hoc est bases elementorum, adeoque elementa ipsa (§. 389 *Geom.*), progrediuntur in ratione duplicata abscissarum, hoc est, ut 0, 1, 4, 9 &c. Est ergo spatium parabolicum AKLPA ad rectangulum ANLK ut 1 ad 3 (§. 342); adeoque ANLPA ad idem rectangulum ANLK ut 2 ad 3. Tab. II. Fig. 28.

PROBLEMA CLVIII.

350. *Invenire rationem spatii paraboloidici cujuscunque* AKLPA *&* ANLPA *ad rectangulum* AKLN.

Si abscissæ AH, AQ, AK fuerint ut 1, 2, 3 &c. in paraboloidibus quibuscunque, erunt semiordinatæ HI, QP, LK ut 1, 2^m, 3^m &c. (§. 519 *part.* 1). Quare, cum etiam spatii paraboloidici AKLPA elementa progrediantur ut 1, 2^m, 3^m &c. (§. 349), iisdem vero in rectangulo respondeant totidem maximo æqualia, erit illud ad hoc ut 1 ad $1 + m$ (§. 344); consequenter ANLPA ad idem rectangulum NK, ut $1 - \frac{1}{1+m}$ ad 1, hoc est, ut $\frac{m}{1+m}$ ad 1, seu ut m ad $1 + m$ (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA CLIX.

351. *Invenire rationem Pyramidis & Coni ad Prisma & Cylindrum super eadem basi & ejusdem altitudinis.* Tab. III. Fig. 41.

Si Pyramidis ADBC altitudo concipiatur in partes infinite parvas æquales divisa; in prismata resolvitur, quæ inter se sunt ut bases (§. 573 *Geom.*), hoc est, ut plana similia a, b, c, d (§. 474 *Geom.*). Quoniam vero altitudines illorum prismatum sunt ut 1, 2, 3 &c. planorum latera homologa erunt itidem ut 0, 1, 2, 3 &c. (§. 566 *Geom.*) adeoque ipsa plana ut 0, 1, 4, 9 &c. (§. 406 *Geom.*) Quare cum elementis pyramidis respondeant in prismate super eadem basi & ejus-

 dem

Tab. III. Fig. 41. dem altitudinis totidem maximo æqualia; Pyramis ad Prisma est ut 1 ad 3 (§. 342).

Quodsi ACBD fuerit conus, plana *a*, *b*, *c*, *d* erunt circuli: qui cum progrediantur ut 0, 1, 4, 9 &c. (*§*. 387 *Geom.*), in cylindro vero ipsis respondeant totidem maximo *d* æquales; conus quoque ad cylindrum super eadem basi & ejusdem altitudinis est ut 1 ad 3 (§. 342).

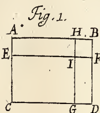
PROBLEMA CLX.

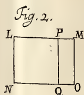
352. *Invenire rationem Conoidis parabolici, ex rotatione Parabolæ* AMSR *circa axem* AR *geniti, ad Cylindrum super eadem basi & ejusdem altitudinis.*

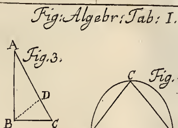
Constat ex superioribus (§. 197), altitudine AR in particulas infinite parvas & æquales divisa, Conoides resolvi in cylindrulos, quorum bases sunt circuli radiis PM, QN, SR descripti, quique adeo sunt ut isti circuli (§. 573 *Geom.*). Quodsi AP = 1, AQ = 2, AR = 3; erit PM = 1, QN = $\sqrt{2}$, SR = $\sqrt{3}$ (§. 392 *part.* 1) adeoque circuli sunt ut 0, 1, 2, 3 &c. (*§*. 408 *Geom.*). Quare cum iisdem respondeant in cylindro totidem maximo æquales; omnia elementa conoidis ad omnia elementa cylindri sunt ut 1 ad 2 (§. 341).

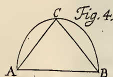
FINIS *Analyseos infinitorum, & Tomi Primi.*

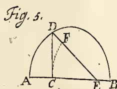
Fig: Algebr: Tab: I.

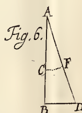


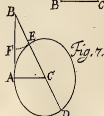


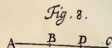


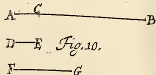


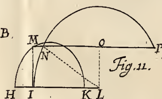












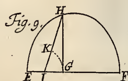
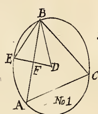
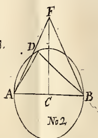
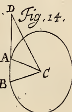
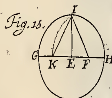


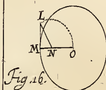
Fig. 12.

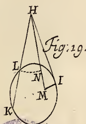


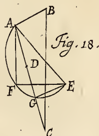


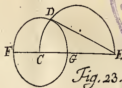


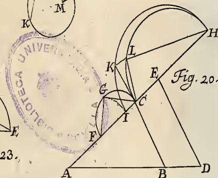












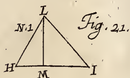


Fig. 21.
N.1
L
H
M
I

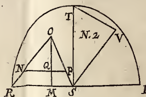

T
N.2
V
O
N
Q
P
R
M
S
I

Fig. 29.
M
H
N
I

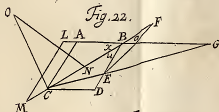


Fig. 22.
O
L
A
B
F
G
N
E
C
D
M

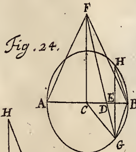


Fig. 24.
F
H
A
C
D
E
B
G

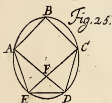


Fig. 25.
B
A
C
F
E
D

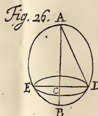


Fig. 26.
A
E
C
D
B

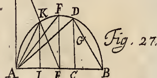


Fig. 27.
H
K
F
D
G
A
I
E
C
B

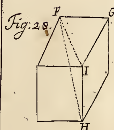


Fig. 28.
F
G
I
H

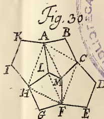


Fig. 30
K
A
B
C
I
L
M
D
H
G
F
E

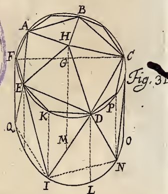


Fig. 31.
A
B
H
F
G
C
E
K
D
P
Q
M
O
I
L
N

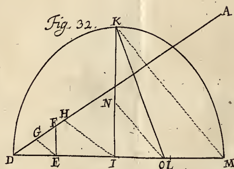


Fig. 32.
K
A
N
H
G
F
D
E
I
O
L
M

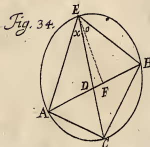


Fig. 34.
E
B
D
F
A
C

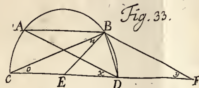


Fig. 33.

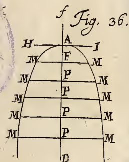


Fig. 36.

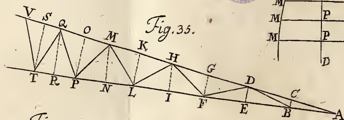


Fig. 35.

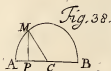


Fig. 38.

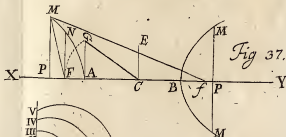


Fig 37.

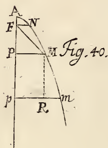


Fig. 40.

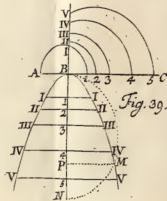


Fig. 39.

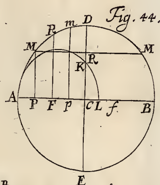


Fig. 44.

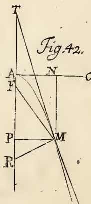


Fig. 42.

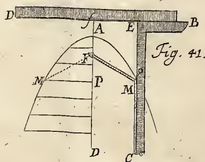


Fig. 41.

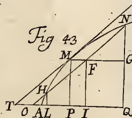
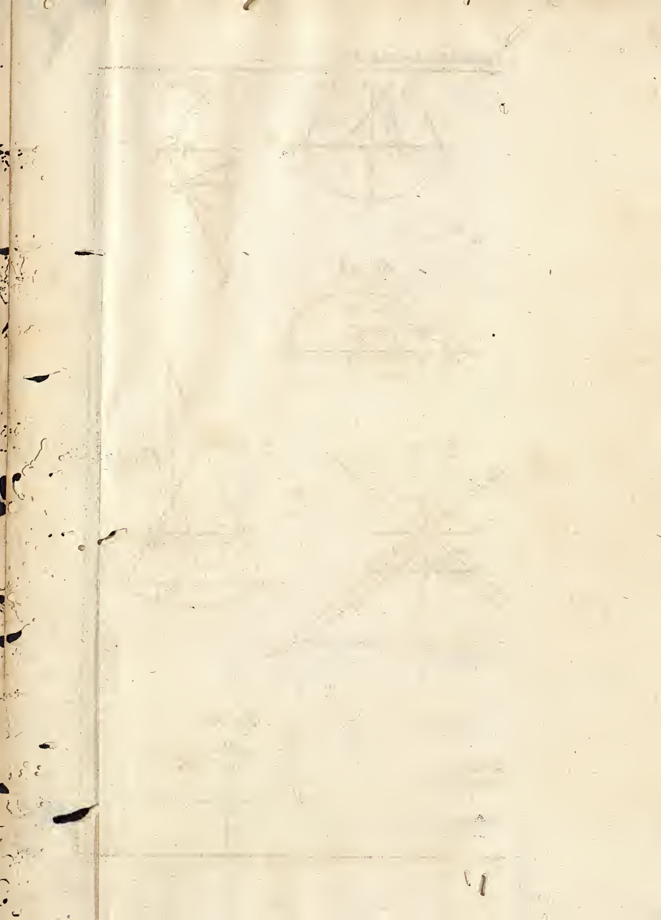


Fig 43



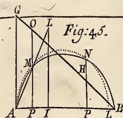


Fig:45.
G
O
L
M
N
H
A
P
I
P
L
B

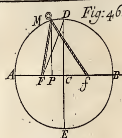


Fig:46.
M
D
A
F
P
C
f
B
E

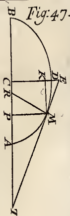


Fig:47.
B
C
R
P
A
K
D
E
M
T

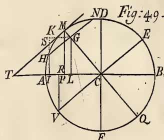


Fig:49.
N
D
E
K
M
S
G
H
T
A
I
R
P
L
C
B
V
Q
F

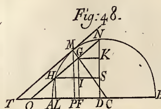


Fig:48.
N
M
G
K
H
S
I
T
O
A
L
P
F
D
C
B

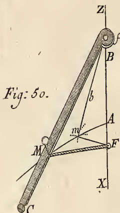


Fig: 50.
Z
f
B
b
A
m
M
F
X
C

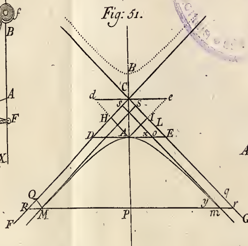


Fig: 51.
B
C
d
s
S
e
H
I
L
D
A
o
E
Q
R
M
P
y
q
r
m
F
G

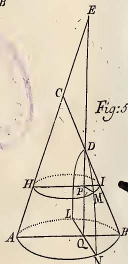


Fig:57.
E
C
D
H
P
I
M
L
A
Q
B
N

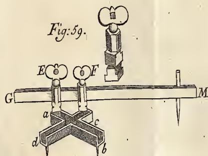


Fig:59.
E
F
G
M
a
c
d
b

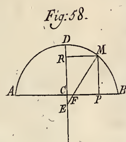
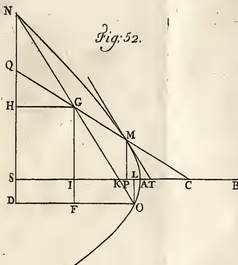
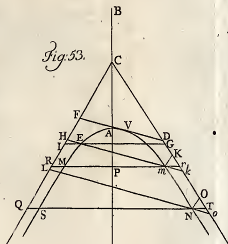
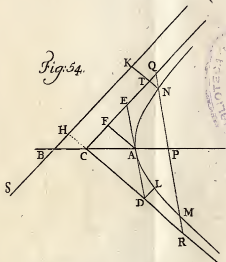


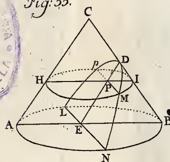
Fig:58.
D
R
M
A
C
F
P
B
E

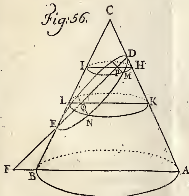
Fig: Algebr. Tab: V.

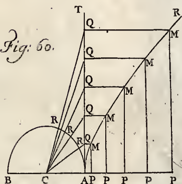


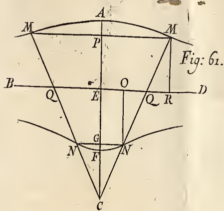


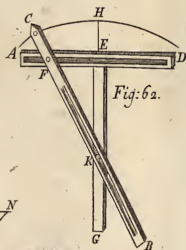









A
M
M
P
Fig: 61.
B
O
D
Q
E
Q
R
G
N
N
F
C


C
H
E
A
D
F
Fig: 62.
K
G
B

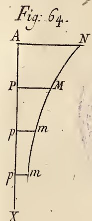
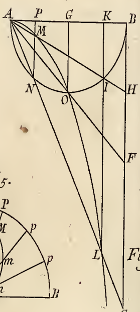


Fig: 64.
A
N
P
M
p
m
p
m
X


A
P
G
K
B
M
N
O
I
H
F
L
Fig: 63.
C

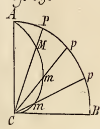
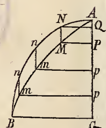


Fig: 65.
A
P
M
p
m
p
m
C
B


N
A
Q
n
M
P
n
m
p
m
p
B
C
Fig: 68.

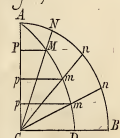


Fig: 67.
A
N
P
M
n
p
m
n
p
m
C
D
B

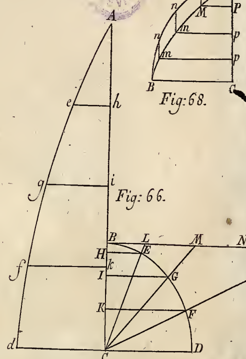

A
e
h
g
i
Fig: 66.
B
L
M
N
H
E
k
f
I
G
K
F
d
C
D

Fig. 69.

Fig. 70.

Fig. 71.

Fig. 72.

Fig. 73.

Fig. 74.

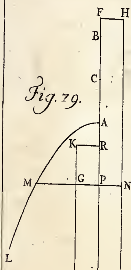
Fig. 75.

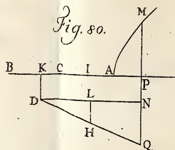
Fig. 76.

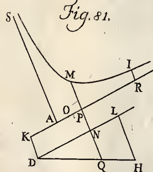
Fig. 77.

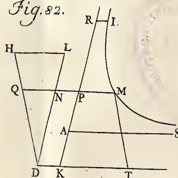
Fig. 78.

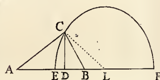
Fig. Algebr. Tab. VIII

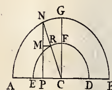


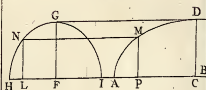


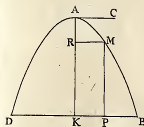












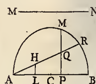


Fig: 89.

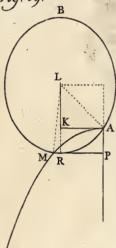


Fig: 90.

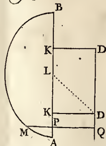


Fig: 91.

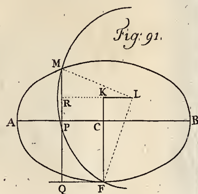


Fig: 93.

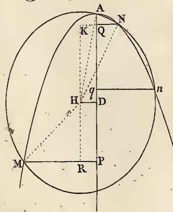


Fig: 92.

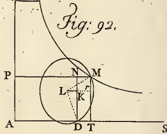


Fig: 94.

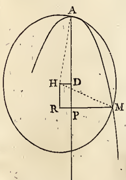


Fig: 95.

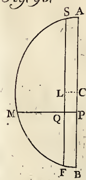
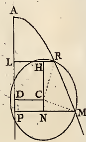


Fig: 96.



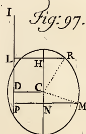


Fig: 97.
I
L
H
R
D
C
M
P
N

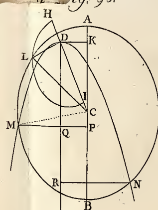
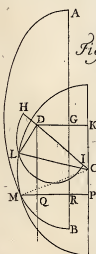


Fig: 98.
H
A
D
K
L
I
C
M
Q
P
R
N
B


A
Fig: 99.
H
D
G
K
L
I
C
M
Q
R
P
B

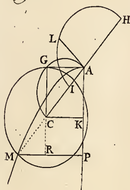


Fig: 100.
H
L
G
A
I
C
K
M
R
P

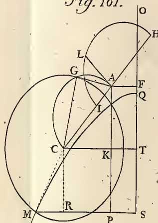


Fig: 101.
O
H
L
G
A
F
Q
I
C
K
T
R
M
P
S

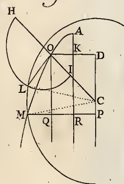


Fig: 102.
H
A
O
K
D
I
L
C
M
Q
R
P

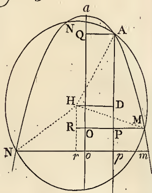


Fig: 103.
a
N
Q
A
H
D
M
R
O
P
N
r
o
p
m

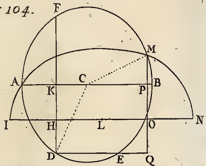


Fig: 104.
F
M
A
C
B
K
P
I
H
L
O
N
D
E
Q

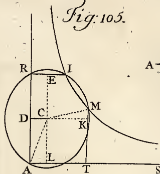


Fig: 105.
R
I
E
M
D
C
K
L
A
T
S

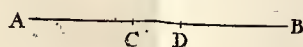


Fig: 106.
A
C
D
B

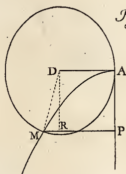


Fig: 107.
D
A
R
M
P

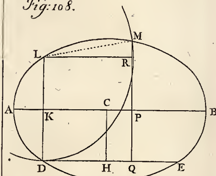


Fig: 108.
M
L
R
C
A
K
P
B
D
H
Q
E

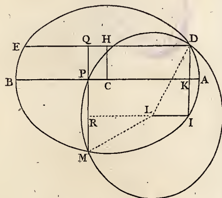


Fig: 109.
Q
H
D
E
P
B
C
K
A
L
R
I
M

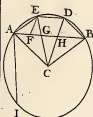


Fig: 110.
E
D
A
G
B
F
H
C
I

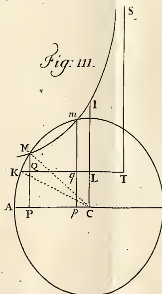


Fig: 111.
S
I
m
M
Q
K
q
L
T
A
P
p
C

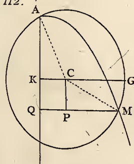
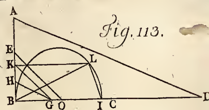
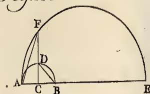
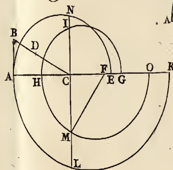


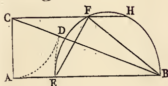
Fig: 112.
A
K
C
G
Q
P
M

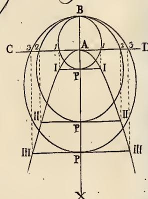
Fig. Algebr. Tab. XII.

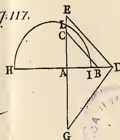


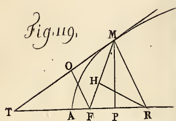


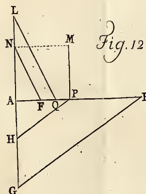












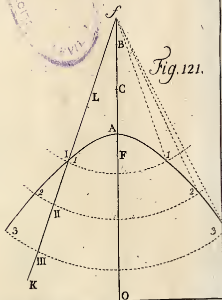


Fig. 122.

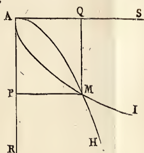


Fig. 124.

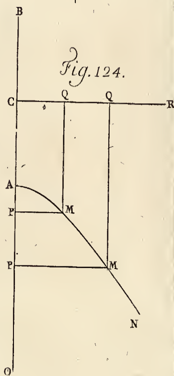


Fig. 126

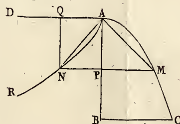


Fig. 123.

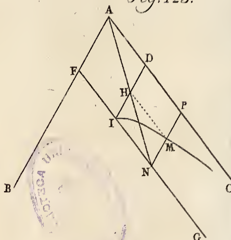


Fig. 125.

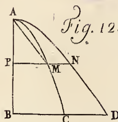
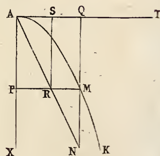


Fig. 127.



ELEMENT
UNIVERS

TOM I